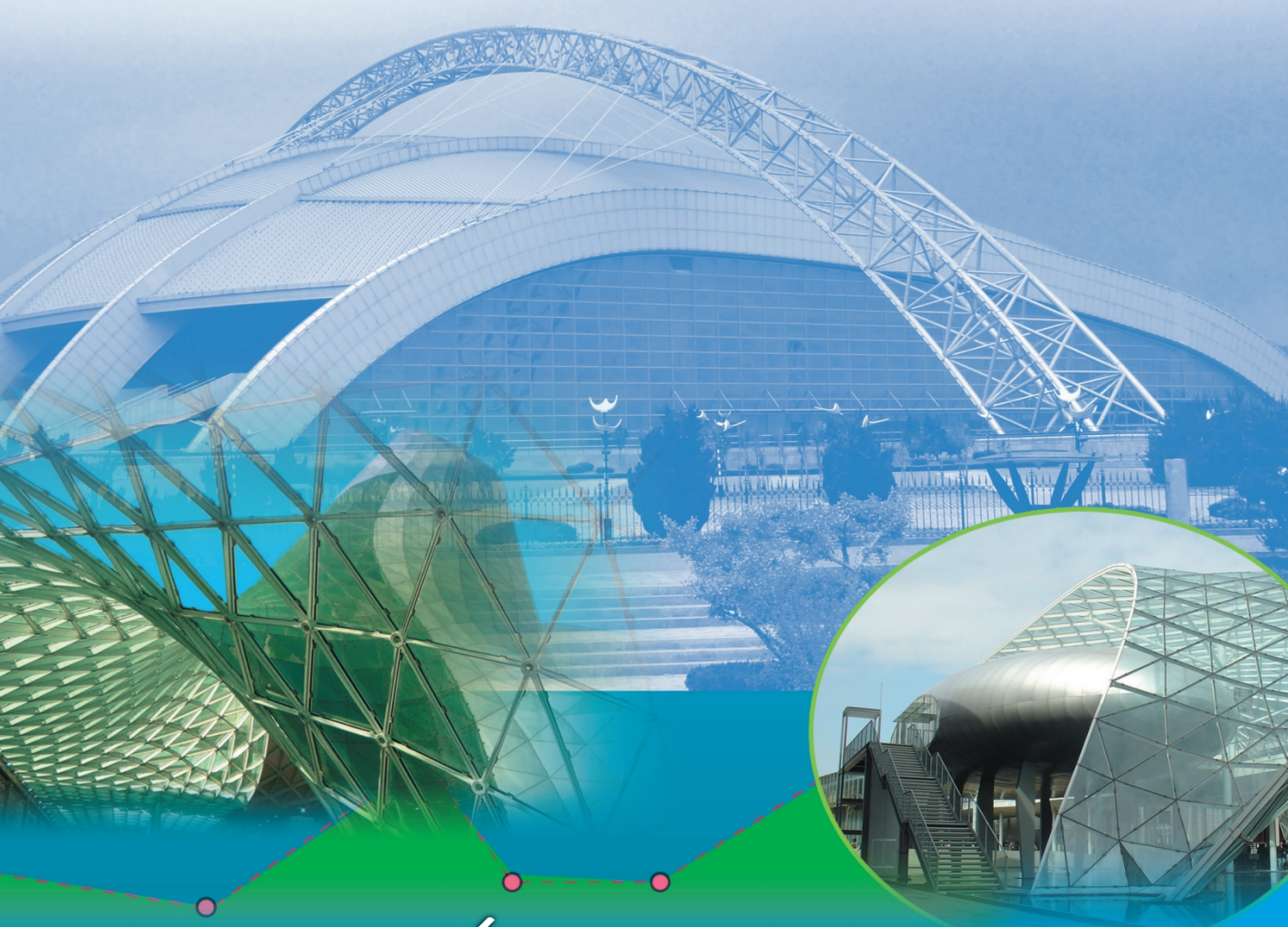
教育部审定
2013

义务教育教科书

数学

SHU XUE

九年级 下册



江苏凤凰科学技术出版社

义务教育教科书

数学

SHU XUE

九年级 下册

杨裕前　董林伟　主编

江苏凤凰科学技术出版社 · 南京

图书在版编目(CIP)数据

数学.九年级.下册/杨裕前,董林伟主编.--南京:江苏凤凰科学技术出版社,2014.12(2021.11重印)

ISBN 978-7-5537-0472-2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①杨… ②董… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第256432号

义务教育教科书

数学 九年级下册

主　　编	杨裕前　董林伟
责任编辑	许礼光　闵正年　沈　琼
责任校对	仲　敏
出　　版	江苏凤凰科学技术出版社
出版社地址	南京市湖南路1号A楼，邮编：210009
重　　印	江苏凤凰出版传媒股份有限公司
发　　行	江苏凤凰出版传媒股份有限公司
照　　排	江苏凤凰制版有限公司
印　　刷	江苏凤凰新华印务集团有限公司
开　　本	787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张	10
版　　次	2006年12月第1版　2014年12月第3版
印　　次	2021年11月第16次印刷
标准书号	ISBN 978-7-5537-0472-2
定　　价	9.88元

如发现印、装质量问题，请与凤凰传媒联系，电话：400-828-1132

致 同 学

亲爱的伙伴：

这套数学课本与你同行了 3 个春秋，那一串串走过的脚印是你成长的记录．

本册课本将继续引导你实践、操作、探索、交流，并通过数学思考解决一些实际问题．在这样的过程中你将学到更多的数学知识，变得更加聪明，更加富有创造性．

某种粮大户今年多承租多少亩水稻，才能使总收益最大？一艘满载抗洪救灾物资的船只，能否通过抛物线形的桥洞……学习了“二次函数”的概念、图像和性质后，你就能解决这样的实际问题．

“图形的相似”将引导你经历从“全等”到“相似”的探索过程，感悟特殊与一般的关系，并进而探索相似图形的性质，判定两个三角形相似的方法，以及它们的一些应用．

当你爬楼梯的时候，你会感到楼梯很陡或比较平缓；当你乘坐的汽车行驶在盘山公路上时，你也许会想，山路陡不陡？“锐角三角函数”能帮助你做出这种判断；树有多高，河有多宽？当你乘坐摩天轮时，你也许想知道自己升高了多少……“锐角三角函数”会给你解决这些问题的方法．

你校全体学生的视力情况如何？影响视力的因素是什么？对于保护视力你能提出哪些合理的建议？某地区的空气质量如何？怎样才能更好地保护环境……设计调查方案，选取调查样本，收集、整理、描述、分析调查所得到的数据，就能对这样的问题做出合理的判断和预测．“统计和概率的简单应用”将引导你经历统计的全过程，体会统计对决策的作用．

你是否认为，抽签时先抽的人沾光，后抽的人吃亏？先抽与后抽中签的可能性一样吗？保险公司怎样才能不亏本？怎样估计一条河流中某种鱼的数量……“统计和概率的简单应用”将引导你研究、解决这样的问题．

你曾是“小树”，现在“长大”了．当你学完这册课本的时候，将带着成功的体验和数学给你的知识和智慧，充满自信地走向新的学习生活．

目　录

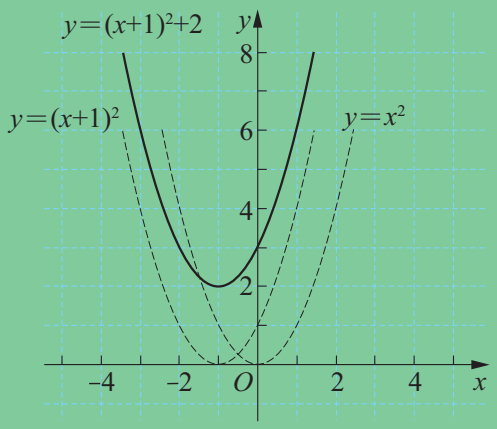
第 5 章　二次函数

第 6 章　图形的相似

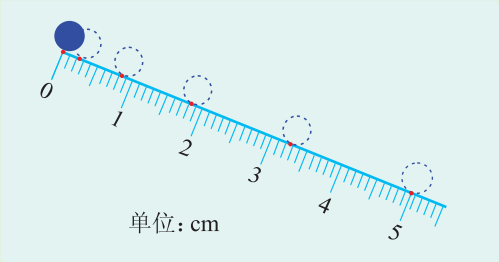
第 7 章　锐角三角函数

第 8 章　统计和概率的简单应用

第5章　二次函数



一次函数、反比例函数、二次函数……
揭示了变量之间的关系；
直线、双曲线、抛物线……
直观地显示了函数的性质 .



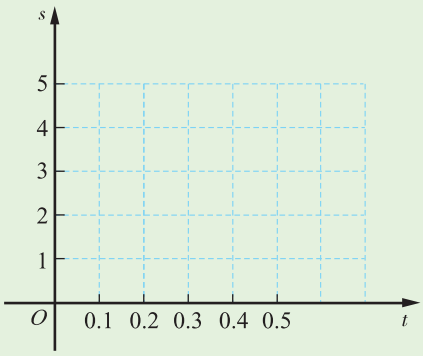
图中分别记录了小球滚落 0.1 s、0.2 s、0.3 s、0.4 s、0.5 s 时的位置．

（1）观察图中小球各时刻的位置与起点的距离，并将结果填入下表：

时刻 t/s	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
距离 s/cm					

（2）以表中 t 的值为点的横坐标、对应的 s 的值为点的纵坐标，在平面直角坐标系中描出各点，并把它们用平滑曲线顺次连接．

（3）在小球滚落的过程中，距离 s 是时刻 t 的一次函数吗？

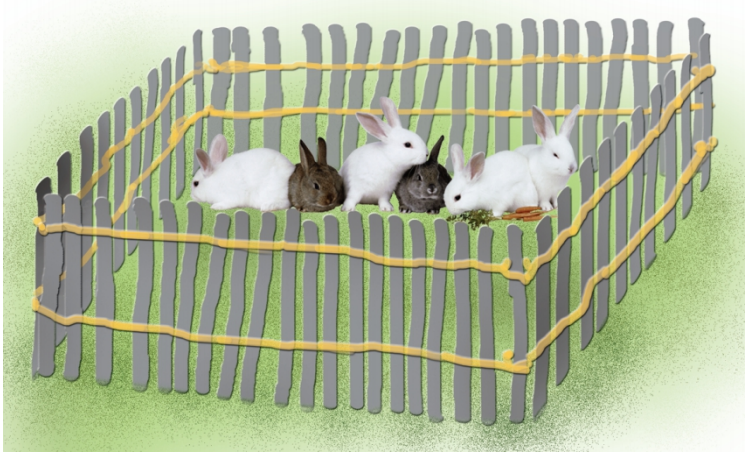


本章将学习二次函数的概念，二次函数的图像、性质及二次函数的应用．

5.1　二次函数

水滴激起的波纹不断向外扩展，所形成的圆的面积 S 与半径 r 之间的函数关系为 $S=\pi r^2$.

我们曾讨论过“用长 16 m 的篱笆围成长方形的生物园饲养小兔，怎样围可使小兔的活动范围较大”的问题 .



设长方形的长为 x m，则宽为$(8-x)$ m，面积 $y(\mathrm{m}^2)$与长 $x(\mathrm{m})$之间的函数关系为 $y=x(8-x)=-x^2+8x$.

一面长与宽之比为 2∶1 的矩形镜子，四周镶有边框 . 已知镜面的价格是每平方米 120 元，边框的价格是每米 30 元，加工费为45 元 .

设镜面宽为 x m，则长为 $2x$ m，镜面面积为 $2x^2$ m²，镜面费用为 $120\times 2x^2$ 元，即 $240x^2$ 元；边框费用为 $30(2x+x+2x+x)$ 元，即 $180x$ 元．总费用 y(元)与镜面宽 x(m)之间的函数关系为：

$$y=240x^2+180x+45.$$

观察与思考

函数表达式 $S=\pi r^2$、$y=-x^2+8x$ 和 $y=240x^2+180x+45$ 有什么共同特征？

一般地，形如 $y=ax^2+bx+c$(a、b、c 是常数，且 $a\neq 0$)的函数叫做**二次函数**(quadratic function)，其中 x 是自变量，y 是 x 的函数．

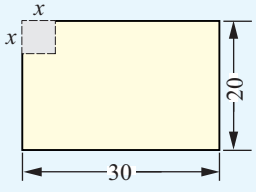
通常，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的自变量 x 可以是任意实数．

如果二次函数的自变量表示实际问题中的某个数量，那么它的取值范围受到实际意义的限制．例如，在以上实际问题中，二次函数 $S=\pi r^2$、$y=-x^2+8x$ 和 $y=240x^2+180x+45$ 的自变量的取值范围分别是 $r>0$、$0<x<8$ 和 $x>0$.

生活中有许多类似的实例，你还能举出一些例子吗？

练习

1. 写出正方体的表面积 S(cm²)与正方体的棱长 a(cm)之间的函数表达式．
2. 写出高为 14 cm 的圆柱的体积 V(cm³)与底面半径 r(cm)之间的函数表达式．
3. 如图，矩形纸片长为 30 cm、宽为 20 cm，剪去一个边长为 x cm 的正方形，写出剩余部分的面积 S(cm²)与 x(cm)之间的函数表达式．



(第 3 题)

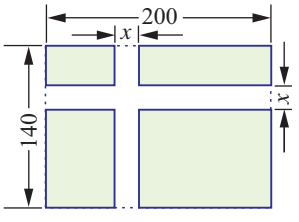
5.1 习题

1. 某矩形的长是宽的 1.6 倍，写出这个矩形的面积 S 与宽 x 之间的函数表达式．

2. 一个圆柱的高与底面直径相等，写出它的表面积 S 与底面半径 r 之间的函数表达式．

3. 写出下列问题中 y 与 x 之间的函数表达式，并写出自变量的取值范围：

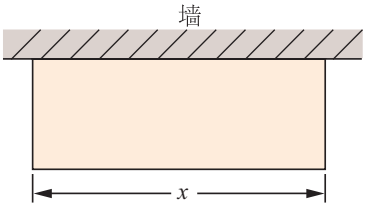
(1) 如图，在长 200 m、宽 140 m 的矩形绿地内修建等宽的十字形道路，设道路宽为 x(m)，绿地面积为 y(m^2)；



（第 3 题（1））

(2) 某化肥厂 10 月份生产某种化肥 200 t，设该厂 11 月、12 月的月平均增长率为 x，12 月份化肥的产量为 y(t)；

(3) 如图，用长 50 m 的护栏围成一块靠墙的矩形花园，设矩形花园的长为 x(m)，面积为 y(m^2)．



（第 3 题（3））

5.2 二次函数的图像和性质

我们已经学习了一次函数和反比例函数的图像的画法，并借助图像研究这些函数的性质．

二次函数的图像是什么形状？二次函数有什么性质？

我们先研究二次函数 $y=x^2$ 的图像和性质．

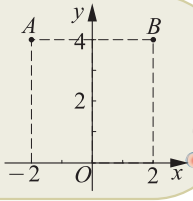
根据二次函数表达式 $y=x^2$，你能描述它的图像有什么特征吗？

$x=0$ 时，$y=0$．图像过原点．

x 可取一切实数．图像向左、右无限延伸．

$y\geqslant 0$，图像向上无限延伸，且 x 轴下方没有图像．

$x=2$ 时，$y=4$；$x=-2$ 时，$y=4$．图像上的点 $A(-2,4)$ 与点 $B(2,4)$ 关于 y 轴对称．



1．在图 5－1 的平面直角坐标系中，用描点法画出二次函数 $y=x^2$ 的图像．

（1）列表：恰当地选取自变量 x 的几个值，计算函数 y 对应的值：

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…								…

（2）描点：以表中各对 x、y 的值为点的坐标，在图 5－1 的平面直角坐标系中描出对应的点．

（3）连线：用平滑曲线顺次连接描出的各点．

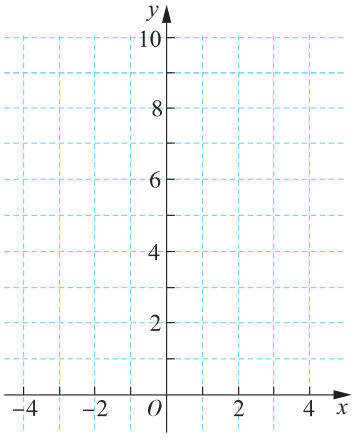


图 5－1

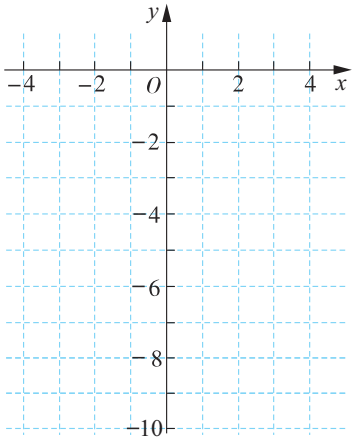
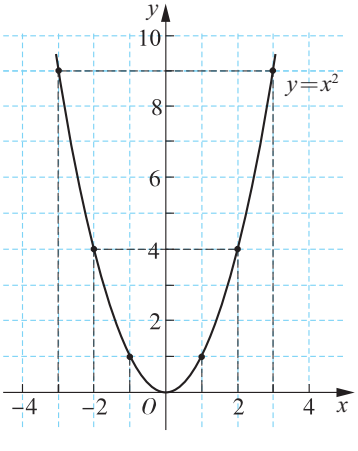


图 5－2

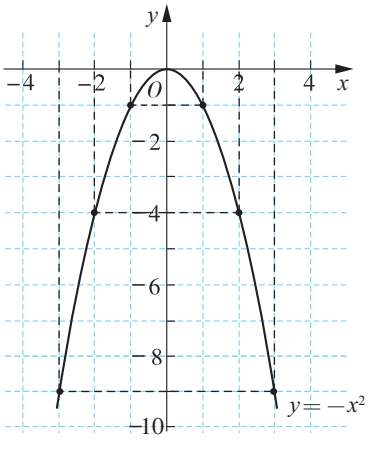
2. 类似地，在图 5－2 的平面直角坐标系中画出二次函数 $y=-x^2$ 的图像．

3. 函数 $y=x^2$ 的图像与函数 $y=-x^2$ 的图像有什么共同特征？

如图 5－3，二次函数 $y=x^2$、$y=-x^2$ 的图像都是**抛物线**(parabola)，且关于 y 轴对称．抛物线与对称轴的交点叫做抛物线的顶点．



(1)



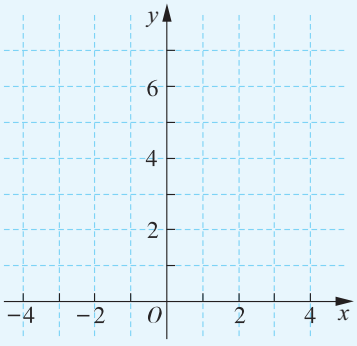
(2)

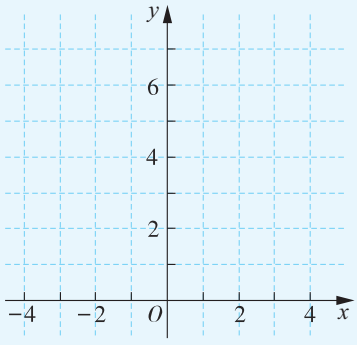
图 5－3

练习

1. 在平面直角坐标系中，分别画出下列函数的图像：

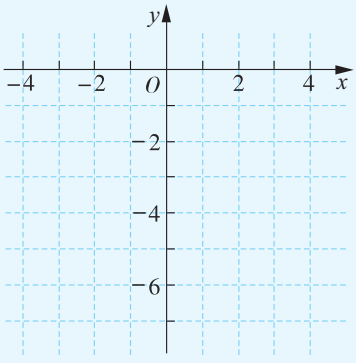
(1) $y=\frac{1}{2}x^2$；　　(2) $y=2x^2$.

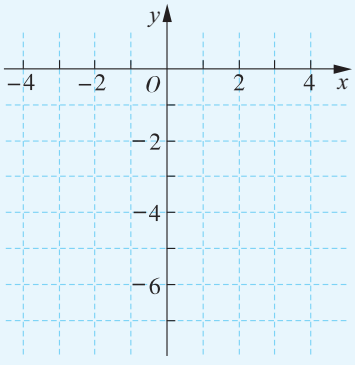




2. 在平面直角坐标系中，分别画出下列函数的图像：

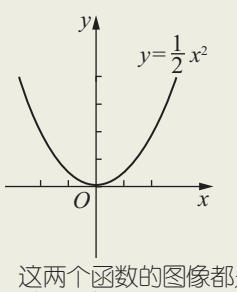
(1) $y=-\frac{1}{2}x^2$；　　(2) $y=-2x^2$.

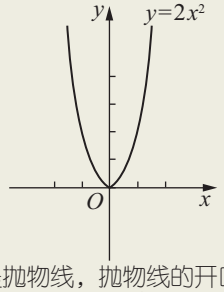




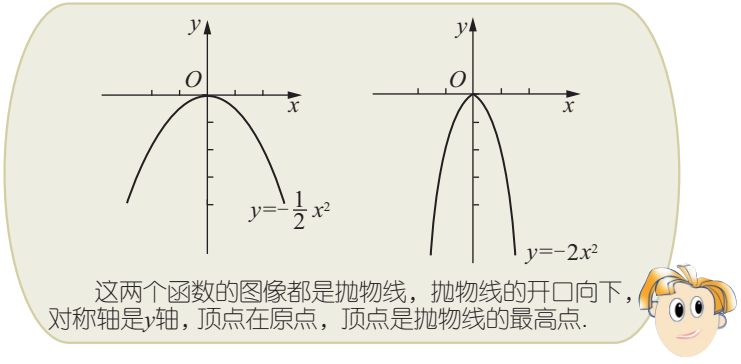
观察与思考

函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=2x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-2x^2$ 的图像各有什么特征？与同学交流.





这两个函数的图像都是抛物线，抛物线的开口向上，对称轴是y轴，顶点在原点，顶点是抛物线的最低点.



二次函数 $y=ax^2$ 的图像是一条抛物线，抛物线的顶点在原点、对称轴是 y 轴．

当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，顶点是抛物线的最低点；

当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下，顶点是抛物线的最高点．

思考与探索

1．观察 $y=ax^2$ 的图像(如图 5－4)，你还能发现什么？

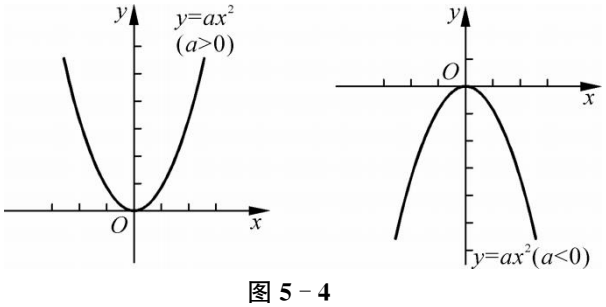
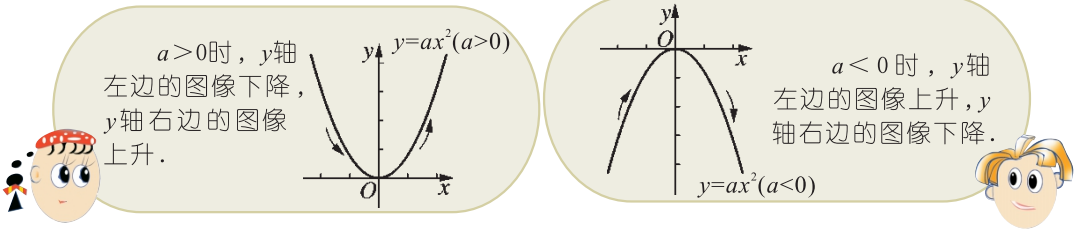
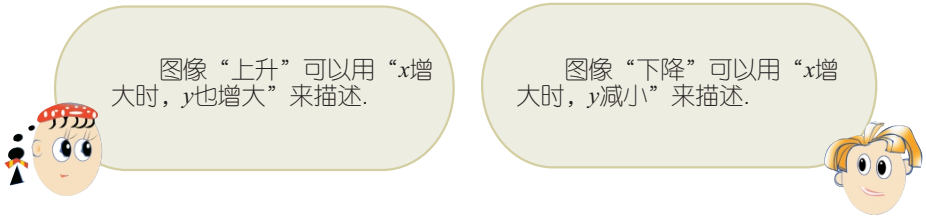


图 5－4



2. 如何用 x、y 的值的变化来描述图像的上升、下降？



二次函数 $y=ax^2$ 的性质：

(1) $a>0$，

当 $x<0$ 时，y 随 x 增大而减小；

当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而增大；

当 $x=0$ 时，y 的值最小，最小值是 0.

(2) $a<0$，

当 $x<0$ 时，y 随 x 增大而增大；

当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而减小；

当 $x=0$ 时，y 的值最大，最大值是 0.

1. 分别说出下列函数图像的开口方向、顶点坐标与对称轴：

$$y=-3x^2,\ y=\frac{1}{3}x^2,\ y=5x^2,\ y=-\frac{3}{4}x^2.$$

2. 填空：

(1) 对于函数 $y=-7x^2$，当 $x<0$ 时，y 随 x 增大而_____；当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而_____；当 $x=$_____时，y 的值最_____，最_____值是_____.

(2) 对于函数 $y=\frac{2}{3}x^2$，当 $x<0$ 时，y 随 x 增大而_____；当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而_____；当 $x=$_____时，y 的值最_____，最_____值是_____.

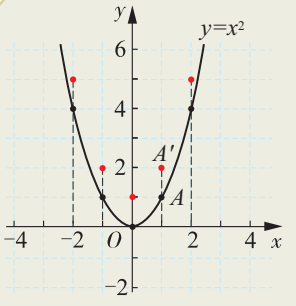
3. 已知二次函数 $y=ax^2$ 的图像经过点 $P(2,3)$，确定图像的开口方向.

思考与探索

函数 $y=x^2+1$ 的图像与函数 $y=x^2$ 的图像之间有什么关系？

x	…	−2	−1	0	1	2	…
$y=x^2$	…	4	1	0	1	4	…
$y=x^2+1$	…	5	2	1	2	5	…

对应于同一个自变量的值，两个函数的值相差1.



将点$A(1,1)$向上平移1个单位长度得到点$A'(1,2)$……

函数 $y=x^2+1$ 的图像可以由函数 $y=x^2$ 的图像向上平移 1 个单位长度得到(如图 5－5)，它是一条开口向上的抛物线，顶点坐标是(0，1)，对称轴是 y 轴．

根据图 5－5，可以知道：当 $x<0$ 时，y 随 x 增大而减小；当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而增大；当 $x=0$ 时，y 的值最小，最小值是 1．

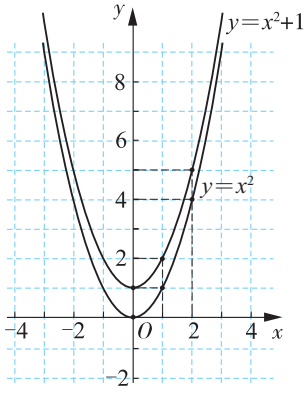


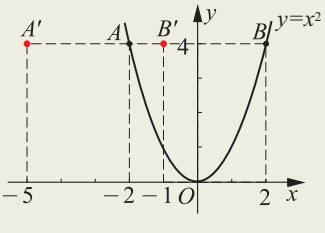
图 5－5

你能说出函数 $y=-x^2+1$ 的图像与函数 $y=-x^2$ 的图像之间有什么关系吗？

思考与探索

函数 $y=(x+3)^2$ 的图像与函数 $y=x^2$ 的图像之间有什么关系？

由$(x+3)^2=4$，得
$x=-5$，$x=-1$.
描出点$A'(-5,4)$
和点$B'(-1,4)$.



由$x^2=4$，得
$x=-2$，$x=2$.
描出点$A(-2,4)$
和点$B(2,4)$.

将点A向左平移3个单位长度得到点A'，
将点B向左平移3个单位长度得到点B'.

函数 $y=(x+3)^2$ 的图像可以由函数 $y=x^2$ 的图像向左平移 3 个单位长度得到（如图 5－6），它是一条开口向上的抛物线，顶点坐标是 $(-3, 0)$，对称轴是过点 $(-3, 0)$ 且平行于 y 轴的直线．

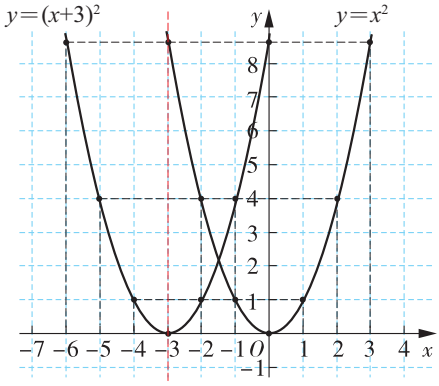


图 5－6

根据图 5－6，可以知道：

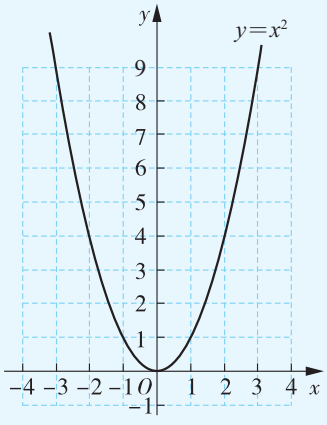
当 $x<-3$ 时，y 随 x 增大而减小；

当 $x>-3$ 时，y 随 x 增大而增大；

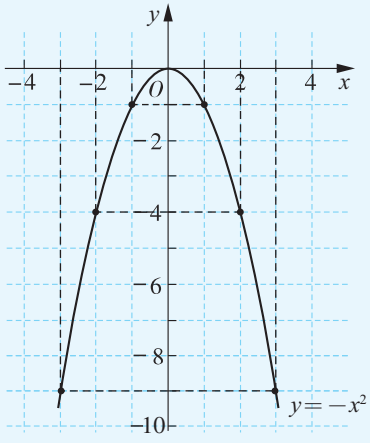
当 $x=-3$ 时，y 的值最小，最小值是 0．

你能说出函数 $y=-(x+3)^2$ 的图像与函数 $y=-x^2$ 的图像之间有什么关系吗？

1. 说出函数 $y=x^2-1$ 的图像与函数 $y=x^2$ 的图像之间的位置关系，并画出它的图像．



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 说出函数 $y=-(x-2)^2$ 的图像与函数 $y=-x^2$ 的图像之间的位置关系，并画出它的图像．

思考与探索

根据图 5－7，说出函数 $y=(x+1)^2+2$ 的图像与函数 $y=x^2$ 的图像之间的关系，以及这个图像的特征．函数 $y=(x+1)^2+2$ 有什么性质？

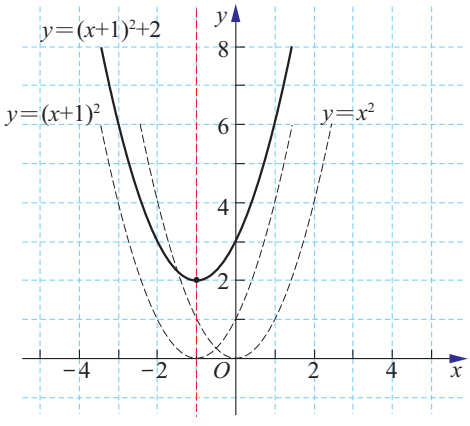


图 5－7

把函数$y=x^2$的图像向左平移1个单位长度，可得到函数$y=(x+1)^2$的图像，再把函数$y=(x+1)^2$的图像向上平移2个单位长度，就得到函数$y=(x+1)^2+2$的图像.它是一条开口向上的抛物线，顶点坐标是（−1,2），对称轴是过点（−1，2）且平行于y轴的直线.

当$x<-1$时，y随x增大而减小；
当$x>-1$时，y随x增大而增大；
当$x=-1$时，y的值最小，最小值是2.

函数 $y=-(x+1)^2+2$ 的图像与函数 $y=-x^2$ 的图像之间有什么关系？函数 $y=-(x+1)^2+2$ 有什么性质？

一般地，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可以变形为 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式：

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2+bx+c \\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\
&= a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.
\end{aligned}
$$

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像是一条抛物线，它的顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴是过顶点且平行于 y 轴的直线．

$a>0$，抛物线开口向上，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数 $y=ax^2+bx+c$ 的值最小，$y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；

$a<0$，抛物线开口向下，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数 $y=ax^2+bx+c$ 的值最大，$y_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

例 画出二次函数 $y=-x^2-4x-5$ 的图像，并指出它的开口方向、顶点坐标、对称轴、最大值或最小值．

分析： 要画出二次函数 $y=-x^2-4x-5$ 的图像，可先将函数表达式变形为 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式．

解： $y=-x^2-4x-5$

$=-(x^2+4x+4-4)-5$

$=-(x+2)^2-1$.

二次项系数 $-1<0$，函数图像开口向下，顶点坐标是 $(-2,-1)$，对称轴是过点 $(-2,-1)$ 且平行于 y 轴的直线．

二次函数 $y=-x^2-4x-5$ 的图像如图 5－8.

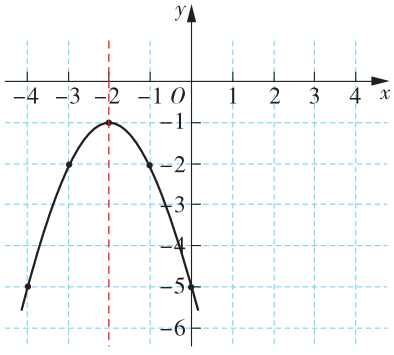


图 5－8

当 $x=-2$ 时，y 的值最大，最大值是 -1.

练习

1. 填空：

(1) x^2+4x+____ $=(x+$____$)^2$；

(2) $x^2-\frac{7}{2}x+$____ $=(x-$____$)^2$；

(3) $x^2+6x+12=(x+3)^2+$____；

(4) $x^2-7x+13=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+$____.

2. 画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{5}{2}$ 的图像.

3. 填表：

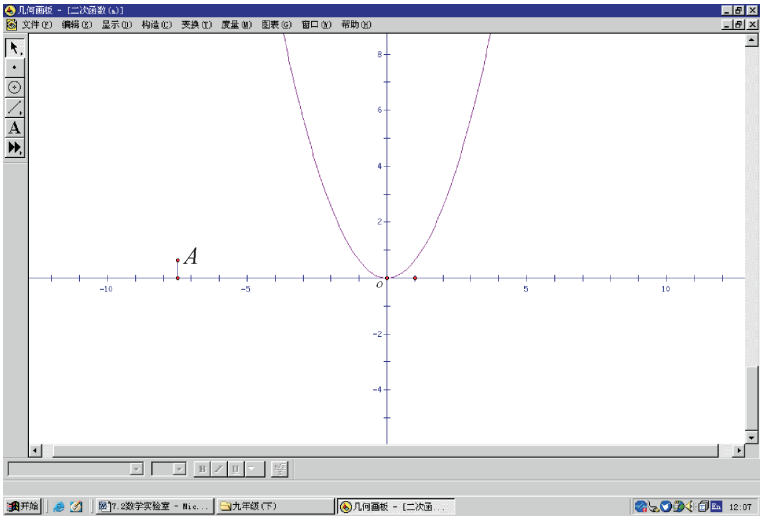
函　数	图像特征			函数的最大值或最小值
	开口方向	顶点坐标	对称轴	
$y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2$			过点 $\left(\frac{1}{2},-2\right)$ 且平行于 y 轴的直线	当 $x=$____时，$y_{最(\ )值}=$____
$y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+5$				当 $x=$____时，$y_{最(\ )值}=$____
$y=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$				当 $x=$____时，$y_{最(\ )值}=$____
$y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$				当 $x=$____时，$y_{最(\ )值}=$____

数学实验室

用几何画板软件研究二次函数的性质

1. 画二次函数 $y=ax^2$ 的图像.

(1) 打开几何画板软件，过 x 轴上任意一点作 x 轴的垂线，在该垂线上任取一点 A 后隐去垂线；



（2）度量点 A 的纵坐标，改用字母 a 表示这个纵坐标；

（3）以 a 的值为二次项系数，画二次函数 $y=ax^2$ 的图像，则此图像随 a 的值的变化而变化．

2. 操作与观察．

（1）用鼠标拖动点 A，观察 a 的值由正变为负时，抛物线开口方向的变化；

（2）过 y 轴上任意一点作 y 轴的垂线，观察 a 的绝对值由小变大时，抛物线与垂线的两个交点间的距离的变化；

（3）在抛物线上任取一点 P，度量点 P 的横坐标，用鼠标拖动点 P，观察点 P 的横坐标变化时，点 P 在抛物线上的位置变化．

3. 结论．

交流由观察而得到的结论．

你会用类似的方法，研究系数 a、b、c 对二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像的影响吗？

5.2 习题

1. 在同一平面直角坐标系中，画出下列函数的图像：

$$y=\frac{3}{2}x^2,\qquad y=\frac{2}{3}x^2,\qquad y=-\frac{3}{2}x^2,\qquad y=-\frac{2}{3}x^2.$$

2. 已知函数：

① $y=0.5x^2$，② $y=\frac{2}{5}x^2$，③ $y=-11x^2$，④ $y=\frac{7}{4}x^2$.

(1) 图像开口向下的是_____，图像开口向上的是_____；

(2) 当 $x<0$ 时，y 随 x 增大而增大的是_____，当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而增大的是_____.

3. 二次函数 $y=ax^2$ 的图像经过点 A $(-2, 5)$.

(1) 写出点 A 关于 y 轴对称的点 B 的坐标，点 B 在这个二次函数的图像上吗？为什么？

(2) y 有最大值还是有最小值？x 为何值时，y 的最大值或最小值是多少？

4. 在同一平面直角坐标系中，函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2+2$、$y=-\frac{1}{2}x^2-2$ 的图像有怎样的位置关系？

5. 在同一平面直角坐标系中，画出下列函数的图像及其对称轴，并写出它们的顶点坐标：

$$y=\frac{2}{3}x^2,\ y=\frac{2}{3}(x-2)^2.$$

6. 画出下列函数的图像及其对称轴，并写出它们的顶点坐标：

(1) $y=2(x+2)^2+1$；　　(2) $y=-\frac{3}{4}(x-3)^2+2$.

7. 画出下列函数的图像：

(1) $y=x^2-x-2$；　　(2) $y=-\frac{1}{2}x^2-x+2$.

8. 求下列函数的最大值或最小值：

(1) $y=x^2-2x-3$；　　(2) $y=-2x^2-5x+7$；

(3) $y=3x^2+2x$；　　(4) $y=\frac{5}{2}x-2-3x^2$.

9. 怎样平移函数 $y=-x^2$ 的图像，可以得到函数 $y=-x^2-8x-7$ 的图像？

5.3 用待定系数法确定二次函数表达式

我们知道，根据已知条件用待定系数法可以确定一次函数、反比例函数的表达式．类似地，根据已知条件用待定系数法也可以确定二次函数的表达式．

例 1 已知二次函数 $y=ax^2$ 的图像经过点$(-2,8)$，求 a 的值．

分析： 如果一个点在函数的图像上，那么这个点的坐标适合函数的表达式．要确定“a”的值，只要根据已知条件“图像经过点$(-2,8)$”列出关于 a 的一元一次方程．

解： 由二次函数 $y=ax^2$ 的图像经过点$(-2,8)$，

得

$$8=(-2)^2a.$$

解得

$$a=2.$$

例 2 已知二次函数 $y=ax^2+c$ 的图像经过点$(-2,8)$和$(-1,5)$，求 a、c 的值．

分析： 要确定“a”、“c”的值，只要根据已知条件“图像经过点$(-2,8)$和$(-1,5)$”列出关于 a、c 的二元一次方程组．

解： 由二次函数 $y=ax^2+c$ 的图像经过点$(-2,8)$和$(-1,5)$，

得

$$\begin{cases}8=(-2)^2a+c,\\5=(-1)^2a+c.\end{cases}$$

解得

$$a=1,\ c=4.$$

*例 3　已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点(−3，6)、(−2，−1)和(0，−3)，求这个二次函数的表达式．

解： 由二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点(−3，6)、(−2，−1)和(0，−3)，

得

$$\begin{cases}6=(-3)^2a-3b+c,\\-1=(-2)^2a-2b+c,\\-3=c.\end{cases}$$

解得

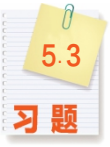
$$\begin{cases}a=2,\\b=3,\\c=-3.\end{cases}$$

所求二次函数表达式为 $y=2x^2+3x-3$.

通常，要确定函数表达式中几个待定的系数，相应地需要几个已知条件，根据这些已知条件列出方程（组）求解．

1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图像经过点(−2，8)和(−1，5)，求这个二次函数的表达式．

*2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点(0，3)、(3，0)和(1，4)，求这个二次函数的表达式．

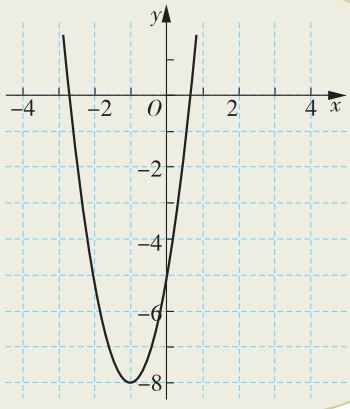


1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+1$ 的图像经过点(1，3)和(3，−5)，求 a、b 的值．

*2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点(−1，−6)、(1，4)和(3，6)，求这个二次函数的表达式．

3. 这是小明在阅读一本关于函数的课外读物时看到的一段文字，你能写出被墨迹污染的二次项系数吗？

由图像知，当$x=-1$时，二次函数$y=$[redacted]x^2+6x-5的值最小.



5.4　二次函数与一元二次方程

思考与探索

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有怎样的关系？

当y的值确定后，由二次函数$y=ax^2+bx+c$可以相应地得到一个一元二次方程. 如，$y=0$时，由二次函数$y=ax^2+bx+c$可得一元二次方程$ax^2+bx+c=0$.

从图像上看，如果二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像与x轴有交点，那么交点的纵坐标$y=0$，交点的横坐标就是一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的根.

根据二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的关系，我们可以由二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像确定一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况.

如图 5-9，二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图像与 x 轴的交点坐标分别是 $M(3,0)$、$N(-1,0)$.

由此可知，当 $x=3$ 时，$y=0$，即 $x^2-2x-3=0$. 也就是说，$x=3$ 是一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ 的一个根.

同样，$x=-1$ 是一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ 的另一个根.

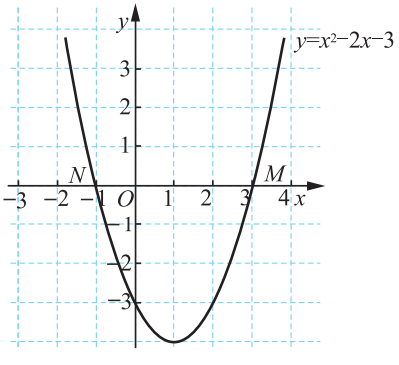


图 5-9

观察与思考

观察二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-4x-6$、$y=x^2-6x+9$、$y=x^2-2x+3$ 的图像(如图 5-10)，分别说出一元二次方程 $-\frac{1}{2}x^2-4x-6=0$、$x^2-6x+9=0$、$x^2-2x+3=0$ 的根的情况.

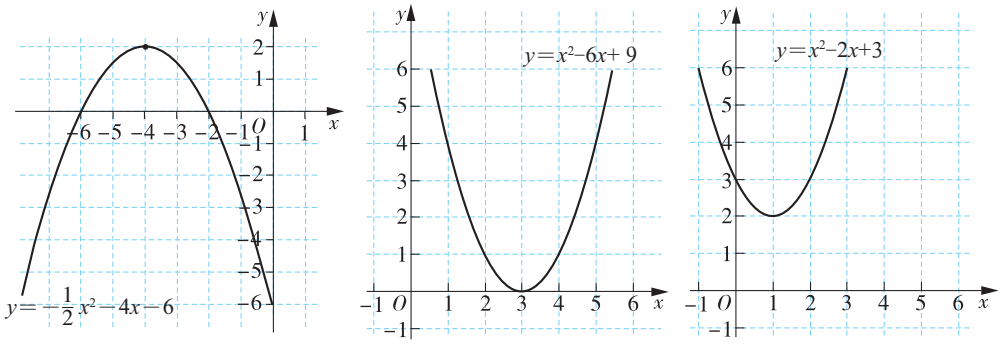


图 5－10

如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有两个公共点，那么一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根；

如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有且只有一个公共点，那么一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根；

如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴没有公共点，那么一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根．

反过来，根据一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况，可以判断二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴的公共点的个数．

例 不画图像，判断二次函数 $y=-x^2+5x-8$ 的图像与 x 轴是否有公共点．

解： 因为一元二次方程 $-x^2+5x-8=0$ 的根的判别式

$b^2-4ac=5^2-4\times(-1)\times(-8)<0$，

所以方程 $-x^2+5x-8=0$ 没有实数根．

二次函数 $y=-x^2+5x-8$ 的图像与 x 轴没有公共点．

不画图像，判断下列函数的图像与 x 轴的公共点的个数：

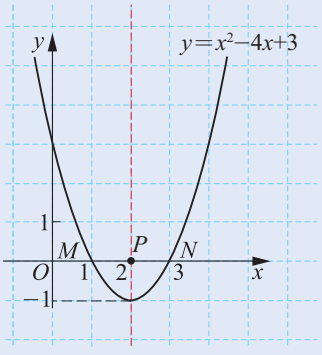
(1) $y=x^2-x$；

(2) $y=-x^2+6x-9$；

(3) $y=3x^2+6x+11$.

读一读

学会“读”二次函数的图像



二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像，不仅直观地显示了函数的性质，而且从中还可以“读”出其他的相关信息．

例如，从二次函数 $y=x^2-4x+3$ 的图像中，可以“读”出如下信息：

这个函数的图像开口向上，顶点的坐标是$(2,-1)$，对称轴是过点$(2,-1)$且平行于 y 轴的直线，与 x 轴交于 $M(1,0)$、$N(3,0)$ 两点，进而可知 MN 的中点 $P(2,0)$在对称轴上．

根据函数 $y=x^2-4x+3$ 的图像，我们还可以知道：

(1) 当 $x<2$ 时，y 随 x 增大而减小；当 $x=2$ 时，y 的值最小，最小值是-1；当 $x>2$ 时，y 随 x 增大而增大．

(2) $x=1$ 或 $x=3$ 是一元二次方程 $x^2-4x+3=0$ 的根．

(3) 当 $x<1$ 或 $x>3$ 时，图像上所有点的纵坐标 y 都大于 0. 也就是说，$x<1$ 或 $x>3$ 是一元二次不等式 $x^2-4x+3>0$ 的解集．

当 $1<x<3$ 时，图像上所有点的纵坐标 y 都小于 0. 也就是说，$1<x<3$ 是一元二次不等式 $x^2-4x+3<0$ 的解集．

观察与思考

你能利用函数 $y=x^2+2x-5$ 的图像(如图 5－11)，探索方程 $x^2+2x-5=0$ 的根的取值范围吗？

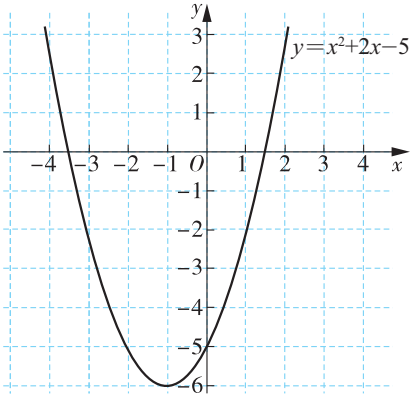


图 5－11

从图 5－11 可以看出，函数 $y=x^2+2x-5$ 的图像与 x 轴有两个公共点，它们分别位于表示实数 1 与 2、－4 与－3 的点之间，所以一元二次方程 $x^2+2x-5=0$ 有两个根，它们分别介于实数 1 与 2、－4 与－3 之间．

下面，我们借助计算器，探索介于 1 与 2 之间的根的近似值．

表 1

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
y	－1.59	－1.16	－0.71	－0.24	0.25	0.76

所以 $1.4<x<1.5$．

表 2

x	1.41	1.42	1.43	1.44	1.45	1.46
y	－0.191 9	－0.143 6	－0.095 1	－0.046 4	0.002 5	0.051 6

所以 $1.44<x<1.45$.

表 3

x	1.441	…	1.447	1.448	1.449	1.450
y	－0.041 519	…	－0.012 191	－0.007 296	－0.002 399	0.002 5

所以 $1.449<x<1.450$．

⋮

如此继续进行下去，可以进一步缩小这个根的取值范围．在解决实际问题时，常常需要取一元二次方程根的近似值．例如，取方程 $x^2+2x-5=0$ 介于 1 与 2 之间的根的近似值，如果要精确到 0.1，根据表 1，可知 $x\approx1.4$；如果要精确到 0.01，根据表 2，可知 $x\approx1.45$；如果要精确到 0.001，根据表 3，可知 $x\approx1.449$．

利用二次函数 $y=x^2+2x-5$ 的图像，借助计算器探索方程 $x^2+2x-5=0$ 的另一个介于－4 与－3 之间的根的近似值（精确到 0.01）．

5.4 习题

1. 不画图像，判断下列函数的图像与 x 轴是否有公共点．如果有，写出公共点的坐标．

(1) $y=2x^2+x+1$；　　(2) $y=x^2+x-6$.

2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+16$ 的图像经过点 $(-2, 40)$ 和点 $(6, -8)$，求一元二次方程 $ax^2+bx+16=0$ 的根．

3. 利用二次函数的图像，借助计算器求下列方程的根的近似值(精确到 0.1)：

(1) $x^2+x-3=0$；　　(2) $\frac{1}{2}x^2-x-1=0$.

5.5 用二次函数解决问题

我们已经知道，生产、生活中的一些实际问题，有时可以用二次函数来揭示其中数量之间的关系，运用二次函数的有关知识，常常可以使这些实际问题得到解决．

问题 1 某种粮大户去年种植水稻 360 亩，平均每亩收益 440 元．他计划今年多承租若干亩稻田，预计原 360 亩稻田平均每亩收益不变，新承租的稻田每增加 1 亩，其每亩平均收益比去年每亩平均收益少 2 元．该种粮大户今年应多承租多少亩稻田才能使总收益最大？

分析： 如果今年多承租 x 亩稻田，那么新承租的稻田共收益 $(440-2x)x$ 元．

解： 设今年多承租 x 亩稻田，总收益为 y 元，则

$$y=440\times360+(440-2x)x=-2(x-110)^2+182\,600.$$

当 $x=110$ 时，y 的值最大，最大值是 182 600.

答： 该种粮大户今年应多承租 110 亩稻田才能使总收益最大，最大收益为 182 600 元．

问题 2　某鱼塘里饲养了鱼苗 10 千尾，预计平均每千尾鱼的产量为1 000 kg. 若再向该鱼塘里投放鱼苗，每多投放鱼苗 1 千尾，每千尾鱼的产量将减少 50 kg. 应再投放鱼苗多少千尾才能使总产量最大？最大总产量是多少？

分析： 若向鱼塘里再投放鱼苗 x 千尾，则鱼塘里共有鱼苗$(10+x)$千尾，每千尾鱼的产量为$(1\,000-50x)$ kg.

解： 设向鱼塘里再投放鱼苗 x 千尾，总产量为 y kg，则

$$y=(1\,000-50x)(10+x)=-50(x-5)^2+11\,250.$$

当 $x=5$ 时，y 的值最大，最大值是 11 250.

答： 应再投放鱼苗 5 千尾才能使总产量最大，最大总产量为 11 250 kg.

某商场以每件 42 元的价格购进一种服装，由试销知，每天的销量 t(件)与每件的销售价 x(元)之间的函数关系为 $t=204-3x$.

(1) 试写出每天销售这种服装的毛利润 y(元)与每件销售价 x(元)之间的函数表达式(毛利润＝销售价－进货价)；

(2) 每件销售价多少元才能使每天的毛利润最大？最大毛利润是多少？

问题 3　河上有一座抛物线形的拱桥，水面宽 6 m 时，水面离桥拱顶部 3 m. 因降暴雨水位上升 1 m，此时水面宽为多少(精确到 0.1 m)？

分析： 解决这个实际问题，先要把它数学化——恰当地建立平面直角坐标系，把抛物线形的桥拱看作一个二次函数的图像，并写出这个函数的表达式，然后根据题设条件求解.

解： 如图 5－12，以桥拱的最高点为原点，过原点的水平线为横轴，过原点的铅垂线为纵轴，建立平面直角坐标系. 抛物线形的桥拱是二次函数 $y=ax^2$ 的图像.

因为当水面宽 $AB=6$ m 时，水面离桥拱顶部 3 m，所以点 A 的坐标是$(3,-3)$.

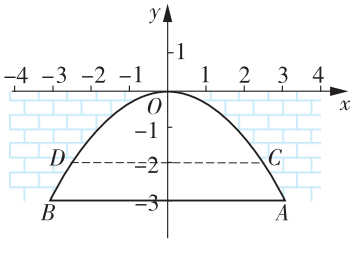


图 5－12

把 $x=3$、$y=-3$ 代入 $y=ax^2$，得

$$-3=a\times 3^2.$$

解得

$$a=-\frac{1}{3}.$$

把 $y=-2$ 代入 $y=-\frac{1}{3}x^2$，得

$$-2=-\frac{1}{3}x^2.$$

解得

$$x=\pm\sqrt{6}.$$

所以，点 C、D 的坐标分别为 $(\sqrt{6},-2)$、$(-\sqrt{6},-2)$，

$$CD=2\sqrt{6}\approx 4.9.$$

答： 水位上升 1 m 时，水面宽约为 4.9 m.

拓展与延伸

根据问题 3 给出的条件，一艘装满物资的小船，露出水面部分的高为0.5 m、宽为 4 m（横断面如图 5－13）．暴雨后这艘船能从这座拱桥下通过吗？

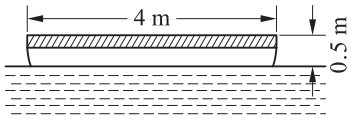
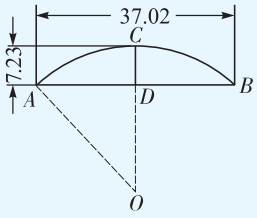


图 5－13

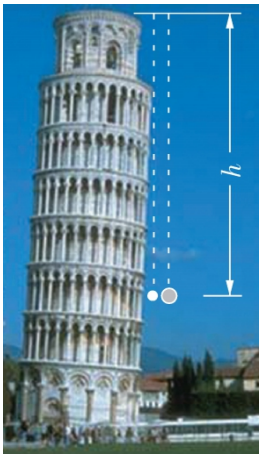
练习

我国隋朝建造的赵州石拱桥闻名中外．假设石拱桥的桥拱是抛物线形，已知石拱跨径 AB 为 37.02 m，拱高 CD 为 7.23 m．把桥拱看作一个二次函数的图像，建立恰当的平面直角坐标系，写出这个函数的表达式．



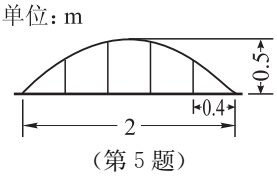
5.5 习题

1. 比萨斜塔是意大利的一座著名斜塔，据说物理学家伽利略曾在塔顶上做过著名的自由落体试验：在地球上同一地点，不同质量的物体从同一高度同时下落，如果除地球引力外不考虑其他外力的作用，那么它们的落地时间相同，物体的下落距离 h(m)与下落时间 t(s)之间的函数表达式为 $h=\frac{1}{2}gt^2$，g 的取值为 9.8 m/s^2，即 $h=4.9t^2$. 已知比萨斜塔的高度为 55 m，试计算试验物大约经过多少时间落到地面(精确到 0.1 s).



(第 1 题)

2. 小明利用第 1 题中的自由落体计算公式，用一块小石子来估算一口枯井的深度. 如果石子从井口脱手 1.3 s 时听到石子落到井底的声音(不计声音传播的时间)，那么该枯井大约有多深(精确到 0.1 m)?
3. 用长 16 m 的篱笆围成长方形的生物园饲养小兔，怎样围可使小兔的活动范围最大?
4. 某汽车出租公司以每辆汽车月租费 3 000 元，100 辆汽车可以全部租出. 若每辆汽车的月租费每增加 50 元，则将少租出 1 辆汽车. 已知每辆租出的汽车支付月维护费 200 元，问每月租出多少辆汽车时，该出租公司的月收益最大? 最大月收益是多少?
5. 某公园草坪的护栏由 50 段形状相同的抛物线形不锈钢管组成，如果每段护栏都按 0.4 m的间距加装不锈钢管的立柱(如图)，那么制作这些立柱共需要多少不锈钢管(精确到 1 m)?



(第 5 题)

6. 正常水位时，抛物线形拱桥下的水面宽 20 m. 水面上升 3 m 达到警戒水位时，桥下水面宽 10 m.
   (1) 把桥拱看作一个二次函数的图像，建立恰当的平面直角坐标系，写出这个函数的表达式;
   (2) 如果水位以 0.2 m/h 的速度持续上涨，那么达到警戒水位后，再过多长时间此桥孔将被淹没?

阅读

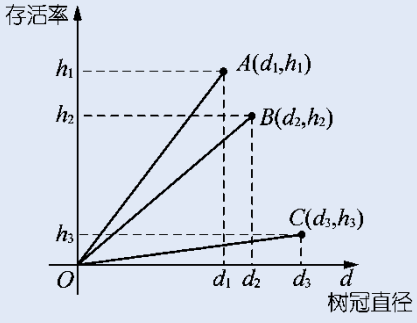
把实际问题数学化

在本章中，我们把一些实际问题中的数量关系抽象成为二次函数，并应用二次函数的有关知识解决了这些问题．事实上，日常生产、生活中的许多实际问题，都可以抽象成为数学问题．

例如，道路两旁种植行道树，选择哪种树更好呢？

选择行道树要考虑的因素很多，比如树形要美、树冠要大、存活率要高、落叶要少……如果只考虑树冠的大小、存活率的高低两个因素，那么就可以用如下的方法把这个实际问题数学化：

设树冠直径为 d，存活率为 h，在平面直角坐标系中画出点 (d, h)．在所画的点中，与原点距离较远的点所表示的树种较优，因为这种树种或树冠直径较大、或存活率较高．如图，$OA>OB$，A 树种比 B 树种优．



若表示两种树种的点与原点的距离相等，则可先分别计算它们的 d 与 h 的差的绝对值，再比较这些绝对值的大小，绝对值较小的树种较优，因为这种树种的树冠的大小和存活率的高低没有明显的缺陷．如图，$OB=OC$，且 $|d_2-h_2|<|d_3-h_3|$，B 树种比 C 树种优．

像这样，如果一个实际问题涉及的因素较多，那么应根据实际需要选择其中的一些主要因素，舍弃次要因素，然后通过抽象建立数学模型，再运用有关的数学知识解决实际问题．应当指出：数学问题的解，需要检验它是否符合实际．如果符合，那么要对解的意义做出解释；如果不符合，那么要建立新的数学模型，重新尝试解决实际问题．

数学活动

校园景观设计

如图 5－14，学校计划在流经校园的小河上建造一座抛物线形的小拱桥，桥拱的跨径为 4 m、拱高为 2.5 m.

(1) 把该桥拱看作一个二次函数的图像，请你建立恰当的平面直角坐标系，写出这个函数的表达式；

(2) 施工时，工人师傅先要制作如图 5－15 的桥孔模型，请你帮助工人师傅计算模型中各立柱的高；

(3) 如有条件，可选择适当材料，按 1∶20 的比例制作这座桥的模型.

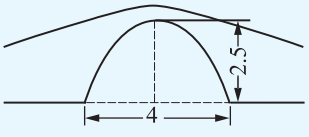


图 5－14

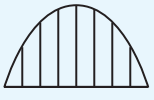


图 5－15

小结与思考

1. 形如 $y=ax^2+bx+c$(a、b、c 是常数，且 $a\neq 0$) 的函数是二次函数，它是描述现实世界数量变化及其关系的一种数学模型.

2. 二次函数的图像是抛物线，它直观地揭示了二次函数的性质，你能根据二次函数 $y=ax^2$ 的图像的开口方向、对称轴和顶点位置，说出二次函数 $y=ax^2$ 的性质吗？

3. 你知道二次函数 $y=ax^2+k$、$y=a(x+h)^2$、$y=a(x+h)^2+k$ 的图像与 $y=ax^2$ 的图像有怎样的位置关系吗？

通过配方，把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化为 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式，可以方便地确定抛物线的顶点坐标和对称轴的位置.

4. 确定一个二次函数表达式中的待定系数，通常需要根据问题中的已知条件建立方程(组). 待定系数个数与问题中的条件数有什么关系？

5. 我们曾通过“读”一次函数的图像，发现了一次函数与一元一次方程、一元一次不等式之间的联系. 你能通过“读”二次函数的图像发现什么？

6. 用二次函数解决实际问题通常经历怎样的过程？试举例说明.

复习巩固

1. 画出下列函数的图像：

(1) $y=(x-2)^2$；　　(2) $y=(x+2)^2$；

(3) $y=(x-2)^2+3$；　　(4) $y=(x+2)^2-3$.

2. (1) 填表：

函　数	图像特征			函数的最大值或最小值
	开口方向	顶点坐标	对称轴	
$y=2x^2+3x$				
$y=-x^2-2x$				
$y=2x^2-6x+3$				
$y=-\frac{1}{3}x^2+4x-8$				

(2) 画出上表中各个二次函数的图像.

3. 在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y=-\frac{1}{4}x^2$、$y=-\frac{1}{4}(x-1)^2$、$y=-\frac{1}{4}(x-1)^2+1$ 的图像. 指出这三个函数图像之间的位置关系，并画出它们的对称轴，写出顶点坐标.

4. 已知二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图像与 x 轴的两个交点的横坐标分别为 1 和 2.

(1) 求这个二次函数的表达式；

(2) 指出这个二次函数图像的开口方向、顶点坐标和对称轴的位置；

(3) x 在什么范围内，y 随 x 增大而增大？

(4) x 在什么范围内，y 随 x 增大而减小？

5. 美国圣路易斯市有一座巨大的拱门，这座拱高和底宽都是 192 m 的不锈钢拱门是美国开发西部的标志性建筑．如果把拱门看作一条抛物线，试建立恰当的平面直角坐标系，并写出与该抛物线相应的函数表达式．

（第 5 题）

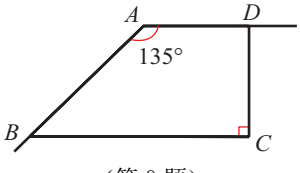
6. 两个数的和是 100，这两个数积的最大值是多少？

7. 我国是最早发明火箭的国家，制作火箭模型、模拟火箭升空是青少年喜爱的一项科技活动．已知学校航模组设计制作的火箭，它的升空高度h(m)与飞行时间t(s)满足函数表达式 $h=-t^2+26t+1$. 如果火箭在点火升空到最高点时打开降落伞，那么火箭点火后多少时间降落伞将打开？这时该火箭的高度是多少？

（第 7 题）

8. 把一根长 100 cm 的铁丝分成两部分，分别围成两个正方形，这两个正方形的面积和最小是多少？

9. 如图，利用 135° 的墙角修建一个梯形 $ABCD$ 的储料场，并使 $\angle C=90°$. 如果新建墙 BCD 总长 15 m，那么怎样修建才能使储料场的面积最大？



（第 9 题）

灵活运用

10. (1) 已知二次函数 $y=x^2-mx+m$ 的图像与 x 轴有且只有一个公共点，求 m 的值；

(2) 已知二次函数 $y=ax^2-2x-3$ 的图像与 x 轴有两个公共点，求 a 的取值范围．

11. 当自变量 $x=4$ 时，二次函数的值最小，最小值为 -3，且这个函数的图像与 x 轴的一个交点的横坐标为 1. 求：

(1) 这个二次函数的表达式；

(2) 这个函数的图像与 x 轴另一个交点的横坐标．

12. 一艘装有防汛器材的运输船，露出水面部分的宽为 4 m，高为 0.75 m. 当水面与抛物线形桥拱的顶部相距 5 m 时，桥下水面宽为 8 m. 要使该船顺利通过桥孔，水面与顶部至少相距多少？

13. 心理学家研究发现，某年龄段的学生 30 min 内对概念的接受能力 y 与提出概念所用时间 x 之间满足函数表达式：$y=-0.1x^2+2.6x+43(0\leqslant x\leqslant 30)$．何时学生接受概念的能力最强？什么时段学生接受概念的能力逐步降低？

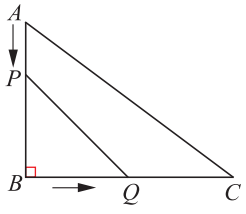
探索研究

14. 把二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图像向下平移 1 个单位长度，再向左平移 5 个单位长度后，所得的抛物线的顶点坐标为$(-2,0)$．写出原抛物线相应的函数表达式．

15. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，$AB=3$ cm，$BC=4$ cm. 点 P 从点 A 出发，以 1 cm/s 的速度沿 AB 运动；同时，点 Q 从点 B 出发，以 2 cm/s 的速度沿 BC 运动．当点 Q 到达点 C 时，P、Q 两点同时停止运动．

(1) 试写出$\triangle PBQ$ 的面积 $S(\text{cm}^2)$与动点运动时间 $t(\text{s})$之间的函数表达式；

(2) 运动时间 t 为何值时，$\triangle PBQ$ 的面积最大？最大面积是多少？



（第 15 题）

16. 某水果店出售一种水果，每只定价 20 元时，每周可卖出 300 只．试销发现：

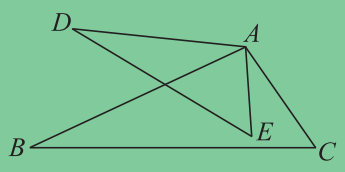
(1) 每只水果每降价 1 元，每周可多卖出 25 只，如何定价，才能使一周销售收入最多？

(2) 每只水果每涨价 1 元，每周将少卖出 10 只，如何定价，才能使一周销售收入最多？

(3) 根据以上信息，你认为应当如何定价才能使一周销售收入最多？

17. 根据函数表达式 $y=\dfrac{1}{x^2}$，你能说出它的图像具有的一些特征吗？试画出它的图像．

第6章　图形的相似

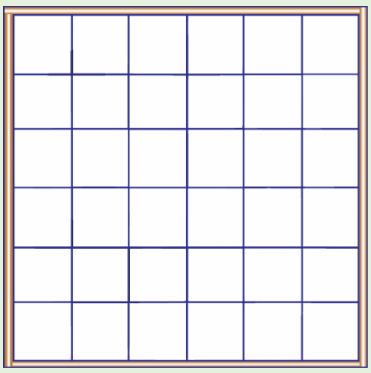


$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$

“全等”、“相似”，具有特殊与一般的关系，研究“相似”，可以有效地解决一些实际问题．

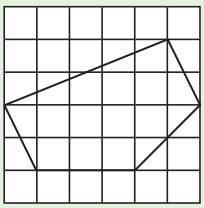
把图(1)中的熊猫图案放大，画到图(2)的方格中．

图（1）

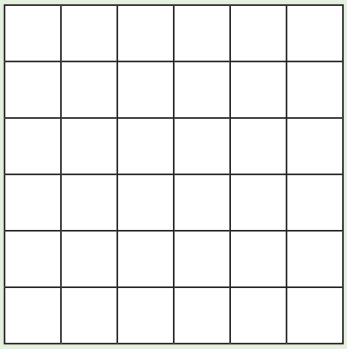


图（2）

把图(3)中的多边形放大，画到图(4)的方格中．



图（3）



图（4）

这两个多边形的形状相同吗？

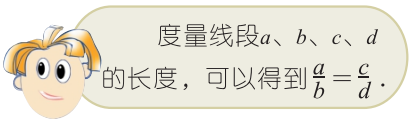
度量这两个多边形对应的边和角，你有什么发现？请与同学交流．

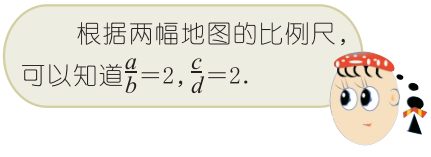
本章将学习相似形的概念，探索并证明三角形相似的判定方法和相似三角形的性质，并运用这些知识解决简单的实际问题．

6.1　图上距离与实际距离

尝试与交流

在上面的两幅江苏省地图中，设连接南京与徐州的线段分别为 a、b，它们的比(即 a 与 b 的长度的比)为 $a:b$ 或 $\frac{a}{b}$，连接南京与连云港的线段分别为 c、d，它们的比为 $c:d$ 或 $\frac{c}{d}$，这两个比值相等吗？





在四条线段中，如果两条线段的比等于另两条线段的比，那么这四条线段叫做成比例线段．

思考与探索

1．在图 6－1 中，哪两个矩形的长和宽是成比例线段？

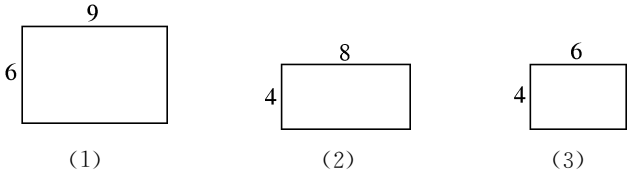


图 6－1

2. 如图 6－2，线段 A_1B_1、B_1C_1、A_2B_2、B_2C_2 的端点都在边长为 1 的小正方形的顶点上．这四条线段是成比例线段吗？为什么？

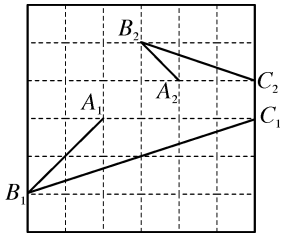


图 6－2

在小学里，我们学习过**比例的基本性质：如果 $a:b=c:d$，那么 $ad=bc$；**反过来，**如果 $ad=bc(b\neq 0,d\neq 0)$，那么 $a:b=c:d$．**

在比例式 $a:b=b:c$ 中，b 叫做 a 和 c 的比例中项．

例 1 某公园平面图上有一块三角形草地，三边长分别为 4 cm、5 cm、6 cm. 已知这块三角形草地最短边的实际长度为 80 m，求另外两条边的实际长度．

解： 比例尺＝图上距离：实际距离＝4：8 000＝1：2 000.

三角形草地的另外两条边的实际长度分别为

$5\times 2\,000=10\,000(\text{cm})=100\text{ m}$，

$6\times 2\,000=12\,000(\text{cm})=120\text{ m}$.

答： 这块三角形草地的另外两条边的实际长度分别为 100 m 和 120 m.

例 2 已知 $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}$，且 $x+y=24$. 求 x、y 的值．

解： 设 $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=k$，则 $x=3k$，$y=5k$.

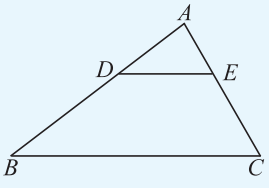
$\because x+y=24$，

$\therefore 3k+5k=24$，$k=3$.

$\therefore x=9$，$y=15$.

练习

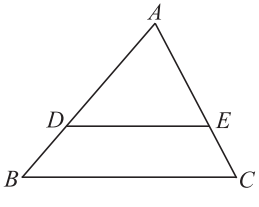
1. 根据本节开头提供的地图，分别求南京与徐州、南京与连云港之间的实际距离．
2. 小丽的身高为 1.6 m，在某一时刻，她的影长为 2 m. 求此时小丽的身高与影长的比．
3. 图纸上画出的某个工件的长为 40 mm，如果比例尺为1∶30，那么这个工件实际长度是多少？如果比例尺为 2∶1 呢？
4. 如图，$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，$AD=15$，$AB=40$，$AC=28$. 求 AE 的长．



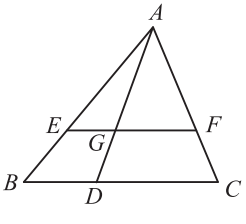
（第 4 题）

6.1 习题

1. 在比例尺为 1∶38 000 的城市交通地图上，某条道路的长为7 cm. 求这条道路的实际长度．
2. 已知 $\frac{a}{9}=\frac{b}{11}=\frac{c}{14}$，且 $a+b+c=68$. 求 a、b、c 的值．
3. 如图，$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=2$. 求$\frac{AB}{DB}$、$\frac{AE}{AC}$ 的值．



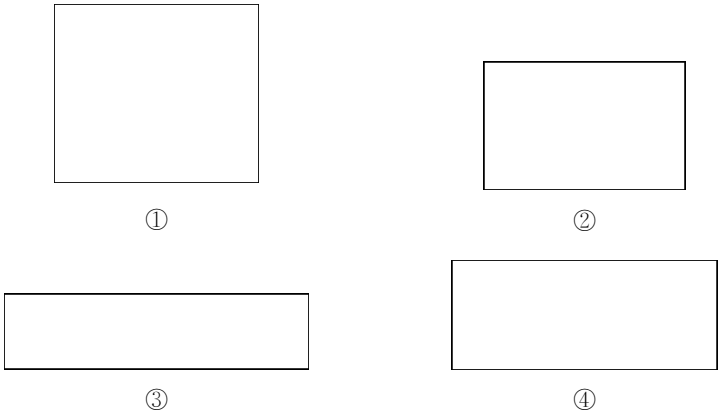
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，$\frac{AG}{AD}=\frac{EF}{BC}$，$EF=10$，$BC=15$，$GD=4$，求 AD 的长．

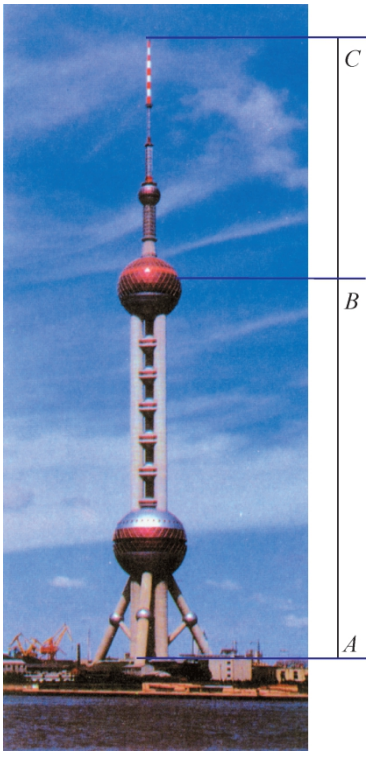
5. 给出下列一组矩形：



（第 5 题）

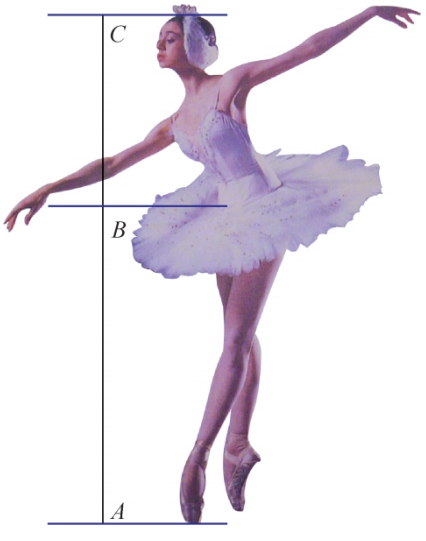
请调查 10 名(或更多)同学，他们最喜欢这组矩形中的哪一个？并记录调查结果．

6.2　黄金分割



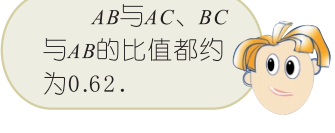
上海东方明珠电视塔设计巧妙，整个塔体挺拔秀丽．

度量图中线段 AB、AC 的长度，并计算线段 AB 与 AC、BC 与 AB 的比值．



芭蕾舞演员身体各部分之间适当的比例给人以匀称、协调的美感．

度量图中线段 AB、AC 的长度，并计算线段 AB 与 AC、BC 与 AB 的比值．



尝试与交流

在习题 6.1 第 5 题“你最喜欢的矩形”调查活动中，小丽调查了 10 名同学，其中有 8 名同学最喜欢第②个矩形．度量这个矩形（如图 6－3）的边 BC、AB 的长度，计算它们的比值，你发现了什么？

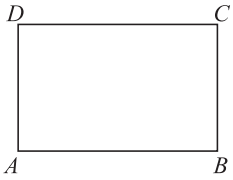
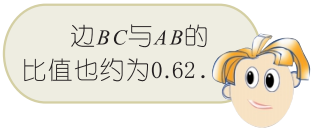


图 6－3



例 如图 6－4，点 B 在线段 AC 上，且 $\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{AC}$. 设 $AC=1$，求 AB 的长．

图 6－4

解： 设 $AB=x$，则 $BC=AC-AB=1-x$.

由 $\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{AC}$，得

$$\frac{1-x}{x}=x,$$

即 $x^2+x-1=0$.

解这个方程，得

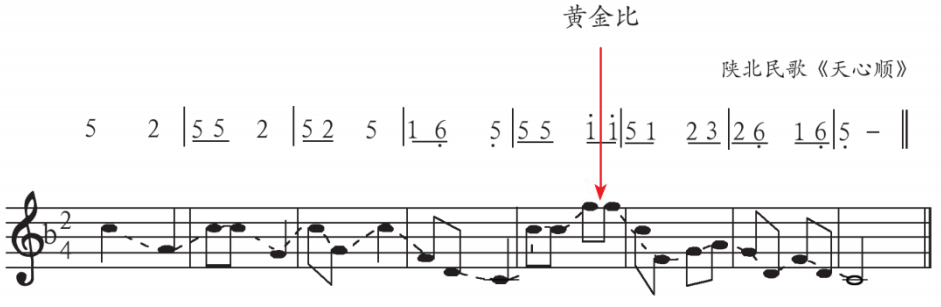
$$x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2},x_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\text{（不合题意，舍去）}.$$

于是，AB 的长为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

像图 6－4 那样，点 B 把线段 AC 分成两部分，如果 $\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{AC}$，那么称线段 AC 被点 B **黄金分割**（golden section），点 B 为线段 AC 的黄

金分割点．AB 与 AC（或 BC 与 AB）的比称为黄金比，它们的比值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，在计算时，通常取它的近似值 0.618.

“黄金分割”给人以美感，它在建筑、艺术等领域有着广泛的应用．

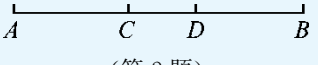


用黄金比巧妙构思的音乐作品

我国的国歌歌词是散文式的自由体新诗，作曲家聂耳在谱曲时，创造性地将它谱成由 6 个长短不等的乐句组成的自由体乐段．歌曲高潮部分在结构上几乎正好是全曲的黄金分割的位置，音乐富有动力，让人感到无比振奋．

你能举例说明黄金分割在生活中的应用吗？

1. 在图 6－3 中，BC 与 AB 的比为黄金比，这样的矩形称为黄金矩形，它给人以美感．某建筑物的窗户为黄金矩形，已知它的一边长为 3.24 m，求它的邻边的长（精确到 0.01 m）．
2. 如图，C、D 是线段 AB 的两个黄金分割点，$AB=1$. 求线段 CD 的长．



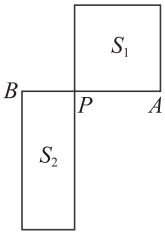
（第 2 题）

6.2 习题

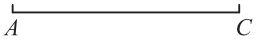
1. 东方明珠电视塔高 468 m，如果把塔身看作一条线段 AC，中间的球体看作点 B，那么点 B 是线段 AC 的黄金分割点．求 AB 的长（精确到 0.1 m）．

（第 1 题）

2. 如图，P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $PA>PB$，S_1 表示以 PA 为一边的正方形的面积，S_2 表示长为 AB、宽为 PB 的矩形的面积．比较 S_1 与 S_2 的大小，并说明理由．



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，设线段 $AC=1$.

（1）过点 C 画 $CD\perp AC$，使 $CD=\frac{1}{2}AC$；连接 AD，以点 D 为圆心，DC 的长为半径画弧，交 AD 于点 E；以点 A 为圆心，AE 的长为半径画弧，交 AC 于点 B.

（2）在所画图中，点 B 是线段 AC 的黄金分割点吗？为什么？

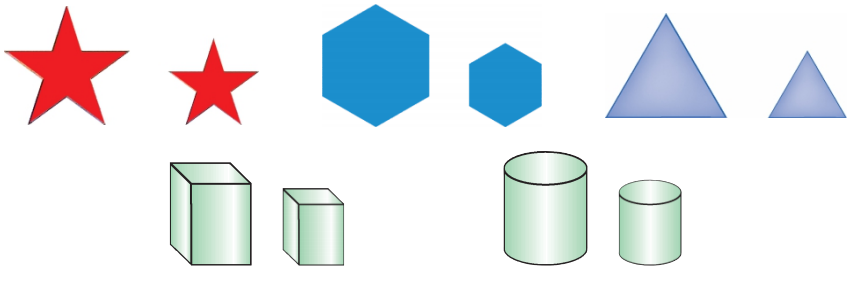
6.3　相似图形

放映电影时，银幕上的画面是由放映机把底片上的画面经过放大后投影得到的，底片上的画面与银幕上的画面形状相同．

用复印机可以把图形按比例放大或缩小，得到形状相同的图形．

观察与思考

下列各组图形有什么共同的特征？你还能举出具有这样特征的图形吗？



形状相同的图形叫做**相似形**(similar figures).

在数学中，两个多边形具有怎样的特征才能说它们“形状相同”，称为相似多边形呢？

思考与探索

1. 图 6－5(1)中的两个正三角形的边和角分别有怎样的数量关系？图 6－5(2)中的两个三角形呢？

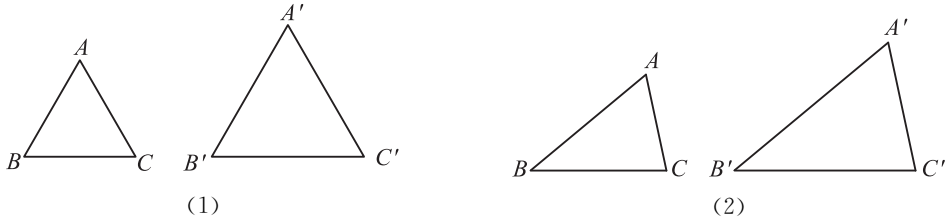
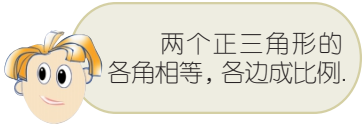
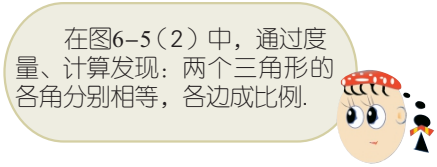


图 6－5


两个正三角形的各角相等，各边成比例.


在图6–5（2）中，通过度量、计算发现：两个三角形的各角分别相等，各边成比例.

2. 图 6－6(1)中的两个正方形的边和角分别有怎样的数量关系？图 6－6(2)中的两个四边形呢？

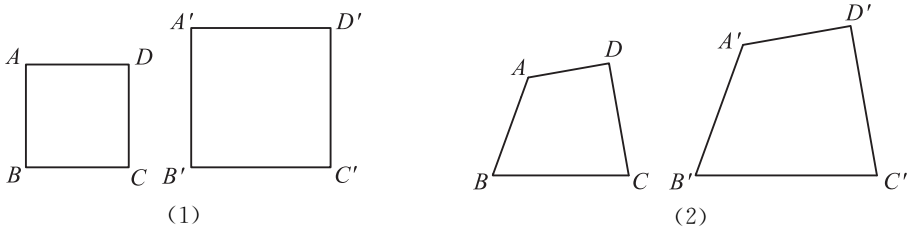
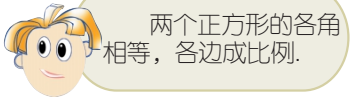
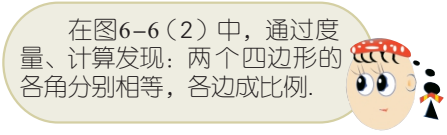


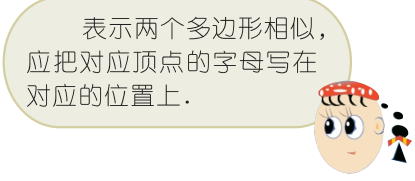
图 6－6


两个正方形的各角相等，各边成比例.


在图6–6（2）中，通过度量、计算发现：两个四边形的各角分别相等，各边成比例.

如图 6－5，在△ABC 与△$A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$、$\angle B=\angle B'$、$\angle C=\angle C'$、$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$；如图 6－6，在四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 中，$\angle A=\angle A'$、$\angle B=\angle B'$、$\angle C=\angle C'$、$\angle D=\angle D'$、$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$. 像这样，各角分别相等、各边成比例的两个多边形，它们的形状相同，称为**相似多边形**(similar polygons).

在图 6－5 中，△ABC 与△$A'B'C'$ 相似，记作“△ABC∽△$A'B'C'$”，读作“△ABC 相似于△$A'B'C'$”；在图 6－6 中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似，记作“四边形 $ABCD$∽四边形 $A'B'C'D'$”，读作“四边形 $ABCD$ 相似于四边形 $A'B'C'D'$”.


表示两个多边形相似，应把对应顶点的字母写在对应的位置上.

相似多边形的对应角相等，对应边成比例．相似多边形的对应边的比叫做**相似比**(similarity ratio).

尝试与交流

图 6－7(1) 中的两个矩形是相似多边形吗？为什么？图 6－7(2) 中的两个菱形呢？

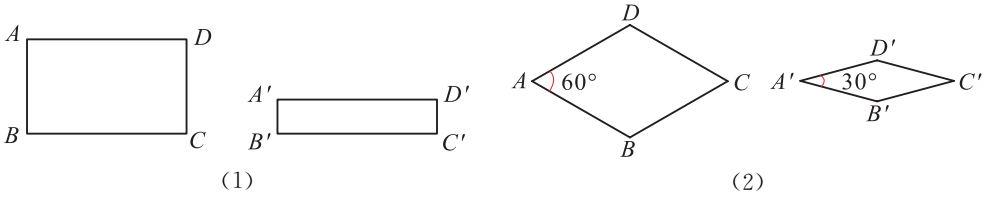


图 6－7

例 1　如图 6－8，已知$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$．求$\angle\alpha$ 的大小和 $A'C'$ 的长．

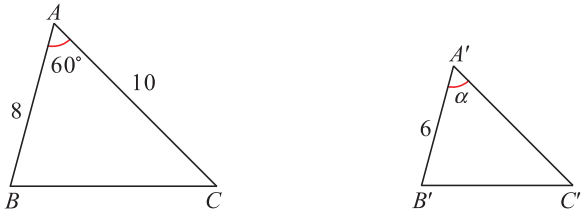


图 6－8

解：因为$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

所以它们的对应角相等，对应边成比例．

由此，得

$\angle\alpha = \angle A = 60°$，

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'},\ A'C' = \frac{AC \cdot A'B'}{AB} = \frac{10 \times 6}{8} = 7.5.$$

例 2　如图 6－9，D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 三边的中点．$\triangle DEF$ 与$\triangle ABC$ 相似吗？为什么？

分析：判定两个三角形相似，需要知道它们的各角分别相等，各边成比例．

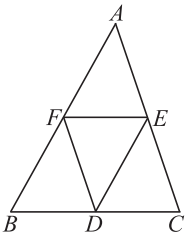


图 6－9

解： 由三角形中位线的性质，知

$EF \parallel BC$，$DE \parallel AB$，$DF \parallel AC$；

$EF = \frac{1}{2}BC$，$DE = \frac{1}{2}AB$，$DF = \frac{1}{2}AC$.

于是，在▱$AFDE$、▱$BDEF$、▱$CEFD$ 中，

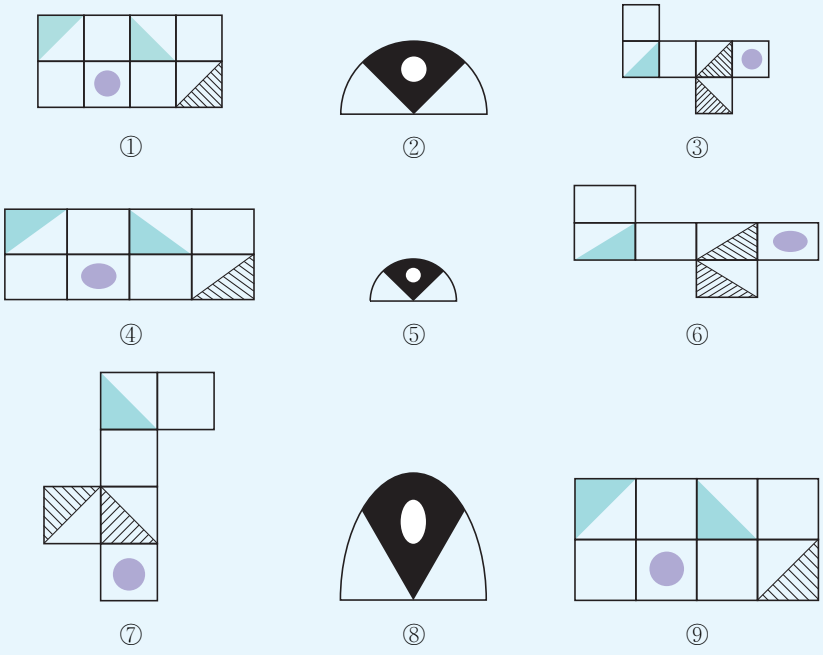
$\angle EDF = \angle A$，$\angle DEF = \angle B$，$\angle DFE = \angle C$.

又因为 $\frac{EF}{BC} = \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{1}{2}$，

所以 $\triangle DEF \backsim \triangle ABC$.

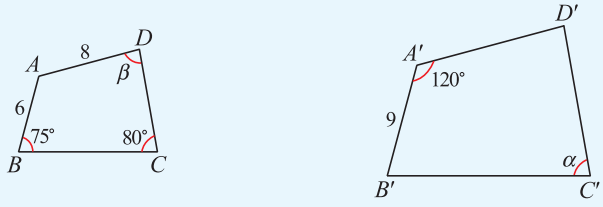
练习

1. 在图④～⑨中，找出分别与图①、图②、图③相似的图形．



（第 1 题）

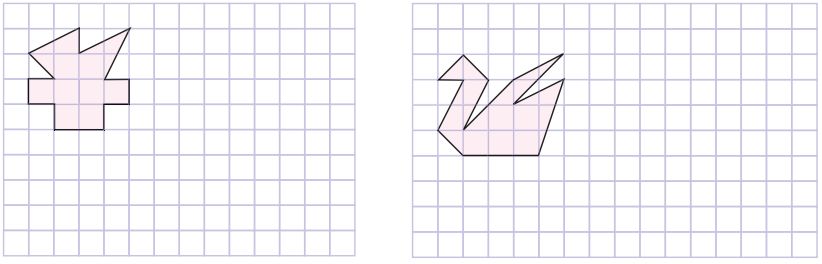
2. 如图，四边形 $ABCD \backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$．求 $\angle\alpha$、$\angle\beta$ 的大小和 $A'D'$ 的长．



（第 2 题）

6.3 习题

1. 在方格纸中分别画出与下列图形相似的图形．



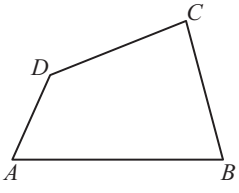
（第 1 题）

2. $\triangle ABC$ 的三条边的长分别为 4、5、6，与 $\triangle ABC$ 相似的 $\triangle A'B'C'$ 的最长边的长为 18. 求 $\triangle A'B'C'$ 的最短边的长．

3. (1) 所有的等腰三角形都相似吗？为什么？

   (2) 所有的直角三角形都相似吗？所有的等腰直角三角形呢？为什么？

4. 如图，在四边形 $ABCD$ 的边 AB 上任取一点 O（不与点 A、B 重合），连接 OC、OD，分别取 OA、OB、OC、OD 的中点 A'、B'、C'、D'，连接 $A'D'$、$D'C'$、$C'B'$. 四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 相似吗？为什么？



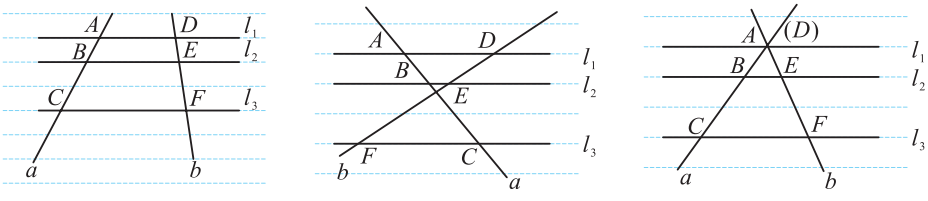
（第 4 题）

6.4 探索三角形相似的条件

我们知道，两个相似三角形的对应角相等，对应边成比例．反过来，当两个三角形具备几对角相等或几对边成比例的条件时，它们就相似呢？

尝试与交流

1. 在练习本上，先画 3 条互相平行的直线 l_1、l_2、l_3，再任意画 2 条直线 a、b，使 a、b 与 l_1、l_2、l_3 分别相交于点 A、B、C 和点 D、E、F（如图 6－10）.



（1）　　（2）　　（3）

图 6－10

2. 度量所画图中 AB、BC、DE、EF 的长度，并计算对应线段的比值．你有什么发现？请与同学交流．

在练习本上，画 4 条、5 条……互相平行的直线，重复上面的过程，你发现的结论还成立吗？

实践告诉我们一个**基本事实**：

两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例．

例 1　如图 6－11，在△ABC 中，点 D、E 分别在 AB、AC 上，且 $DE \parallel BC$．试说明△ADE 与△ABC 相似的理由．

分析：由题意知，在△ADE 和△ABC 中，各角分别相等，且$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，要说明△$ADE$∽△$ABC$，只需要$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$．为此，把 DE 平移到 FC 的位置（作 $DF \parallel AC$，交 BC 于点 F）就可以了．

解：过点 D 作 $DF \parallel AC$，交 BC 于点 F．

∵ $DE \parallel BC$，$DF \parallel AC$，

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，$\frac{AD}{AB}=\frac{FC}{BC}$（两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例）．

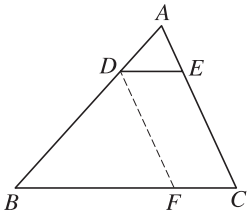


图 6－11

∵ 四边形 $DFCE$ 是平行四边形，

∴ $DE=FC$.

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$.

∵ $DE \parallel BC$，

∴ $\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$.

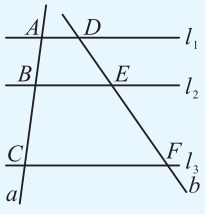
又∵ $\angle DAE=\angle BAC$，

∴ △ADE ∽ △ABC.

由例 1，我们得到如下结论：

平行于三角形一边的直线与其他两边相交，所截得的三角形与原三角形相似．

1. 如图，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，直线 a、b 与 l_1、l_2、l_3 分别相交于点 A、B、C 和点 D、E、F. 设 $AB=3$，$BC=5$，$DE=4$，求 EF 的长．

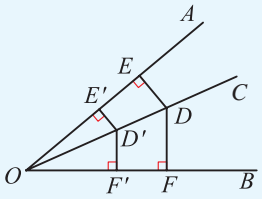


（第 1 题）

2. 如图，OC 是$\angle AOB$ 内的一条射线，点 D、D' 在 OC 上，过点 D、D' 分别作 OA、OB 的垂线，垂足分别为 E、E' 和 F、F'.

(1) 图中有几对相似三角形？是哪几对？

(2) $\frac{DE}{D'E'}$ 与 $\frac{DF}{D'F'}$ 相等吗？为什么？



(第 2 题)

如图 6－12，已知$\angle\alpha$、$\angle\beta$.

作$\triangle ABC$，使 $\angle A=\angle\alpha$，$\angle B=\angle\beta$. 这样的三角形可以作多少个？它们都相似吗？

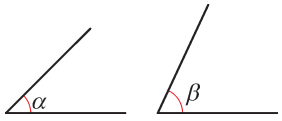


图 6－12

如图 6－13，在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$.

我们可以用如下方法证实$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$：

平移$\triangle A'B'C'$，使点 A' 与点 A 重合，$A'B'$ 落在 AB 上（假设 $AB>A'B'$）. 由 $\angle A'=\angle A$，可知 $A'C'$ 落在 AC 上（如图 6－14）.

又由 $\angle AB'C'=\angle B$，可知 $B'C'\parallel BC$.

这样，根据本节例 1 所得的结论，可得 $\triangle ABC\backsim\triangle AB'C'$.

因为平移$\triangle A'B'C'$ 不改变它的形状、大小，所以 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

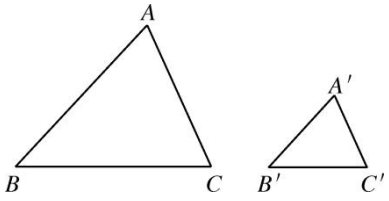


图 6－13

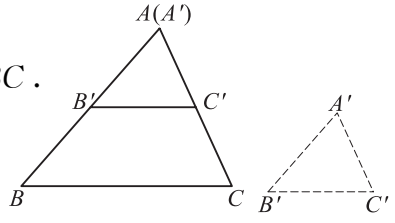


图 6－14

于是，我们得到如下定理：

两角分别相等的两个三角形相似.

例 2 如图 6－15，在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=50°$，$\angle B=\angle B'=60°$，$\angle C'=70°$. $\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 相似吗？为什么？

解： $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似．

在 $\triangle ABC$ 中，

$\because \angle A = 50°$，$\angle B = 60°$，

$\therefore \angle C = 180° - (50° + 60°) = 70°$.

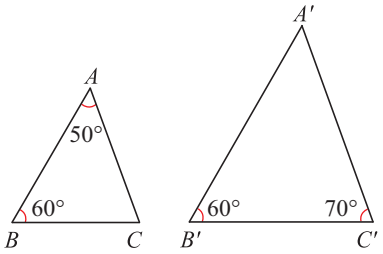


图 6－15

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，

$\because \angle B = \angle B'$，$\angle C = \angle C'$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$（两角分别相等的两个三角形相似）.

例 3　如图 6－16，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，点 D、E 分别在 BC、AB 上，且 $\angle BDE = \angle CAD$. $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABD$ 相似吗？为什么？

分析： 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABD$ 中，$\angle DAB$ 是公共角，如果 $\angle ADE = \angle B$（或 $\angle AED = \angle ADB$），那么这两个三角形就相似．

解： $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABD$ 相似．

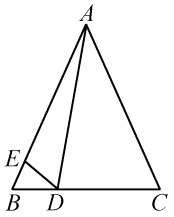


图 6－16

$\because \angle ADB = \angle ADE + \angle BDE$，

$\angle ADB = \angle CAD + \angle C$，

$\angle BDE = \angle CAD$，

$\therefore \angle ADE = \angle C$.

又 $\because AB = AC$，

$\therefore \angle B = \angle C$.

$\therefore \angle ADE = \angle B$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABD$ 中，

$\because \angle DAE = \angle BAD$，$\angle ADE = \angle B$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABD$（两角分别相等的两个三角形相似）.

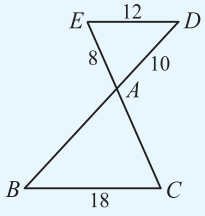
练习

1. 在△ABC和△$A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=k$，$\angle B=\angle B'$.

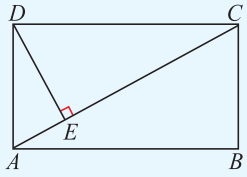
   (1) 当 $k=1$ 时，△ABC 与△$A'B'C'$有怎样的关系？

   (2) 当 $k\neq 1$ 时，△ABC 与△$A'B'C'$有怎样的关系？

2. 如图，$BC\parallel ED$，计算 AB、AC 的长.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 在矩形 $ABCD$ 中，$DE\perp AC$，垂足为 E. 图中有哪些三角形与△ABC 相似？为什么？

实践与探索

如图 6－17，已知△ABC.

作△$A'B'C'$，使 $\angle A'=\angle A$，$\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{1}{2}$. 所作的△$A'B'C'$与△$ABC$ 相似吗？

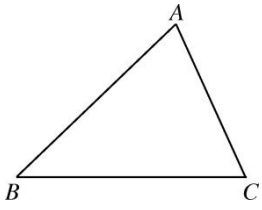


图 6－17

设 $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=k$，改变 k 值的大小，再试一试.

如图 6－18，在△ABC 和△$A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

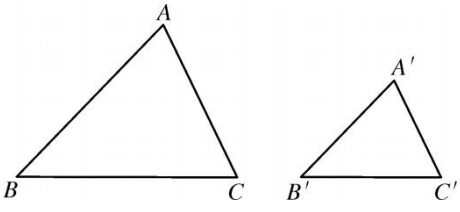


图 6－18

我们可以用如下方法证实△ABC∽△$A'B'C'$：

在 AB 上截取 $AB''=A'B'$（假设 $AB>A'B'$），过点 B'' 作 $B''C''\parallel BC$，交 AC 于点 C''（如图 6－19）.

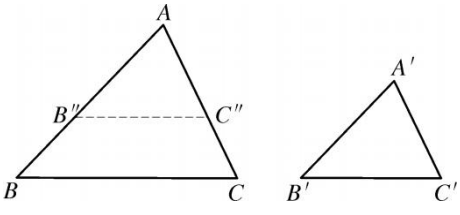


图 6－19

根据本节例 1 所得的结论，可以知道 $\triangle ABC \backsim \triangle AB''C''$.

于是，$\frac{AB}{AB''}=\frac{AC}{AC''}$.

又由 $AB''=A'B'$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$，可得 $AC''=A'C'$.

这样，$\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

于是，我们得到如下定理：

两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

例 4　如图 6－20，点 D 在$\triangle ABC$ 内，点 E 在$\triangle ABC$ 外，且 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. $\triangle DBE$ 与$\triangle ABC$ 相似吗？为什么？

分析： 在$\triangle DBE$ 和$\triangle ABC$ 中，易知$\angle DBE=\angle ABC$. 如果$\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}$，那么这两个三角形就相似.

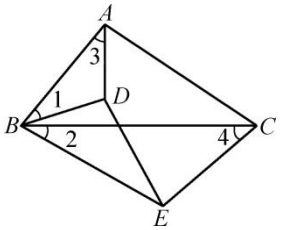


图 6－20

解： $\triangle DBE$ 与$\triangle ABC$ 相似.

在$\triangle ABD$ 和$\triangle CBE$ 中，

$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle CBE$（两角分别相等的两个三角形相似）.

$\therefore \frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}$（相似三角形的对应边成比例）.

又$\because \angle 2=\angle 1$，

$\therefore \angle DBE=\angle ABC$.

在$\triangle DBE$ 和$\triangle ABC$ 中，

$\because \frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}$，$\angle DBE=\angle ABC$，

$\therefore \triangle DBE \backsim \triangle ABC$（两边成比例且夹角相等的两个三角形相似）.

如图 6－21，在$\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$AC=2$.

（1）试在 AB 上确定点 D 的位置，使$\triangle ACD \backsim \triangle ABC$；

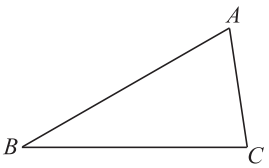


图 6－21

(2) 试在 AC 的延长线上确定点 E 的位置，使$\triangle AEB \backsim \triangle ABC$. 此时，$BE$ 与 DC 有怎样的位置关系？为什么？

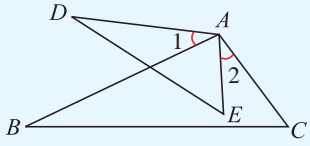
练习

1. 在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A = \angle A'$，$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = k$.

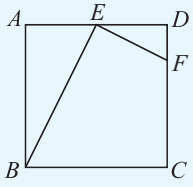
   (1) 当 $k = 1$ 时，$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 有怎样的关系？

   (2) 当 $k \neq 1$ 时，$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 有怎样的关系？

2. 如图，$\angle 1 = \angle 2$. 要使$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，还需要添加什么条件？



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是 AD 的中点，点 F 在 CD 上，且 $CF = 3FD$. $\triangle ABE$ 与 $\triangle DEF$ 相似吗？为什么？

实践与探索

如图 6－22，已知$\triangle ABC$.

作$\triangle A'B'C'$，使 $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} = \dfrac{1}{2}$. 所作的$\triangle A'B'C'$ 与$\triangle ABC$ 相似吗？

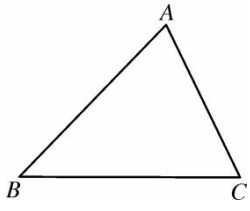


图 6－22

设 $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} = k$，改变 k 值的大小，再试一试.

如图 6－23，在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$ 中，$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$.

我们可以用如下方法证实 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$：

在 AB 上截取 $AB'' = A'B'$（假设$AB > A'B'$），过点 B'' 作 $B''C'' /\!/ BC$，交 AC 于点 C''（如图 6－24）.

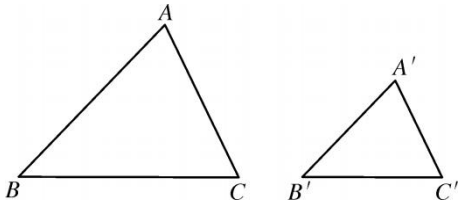


图 6－23

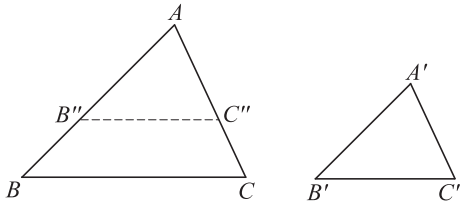


图 6－24

根据本节例 1 所得的结论，可以知道 $\triangle ABC \backsim \triangle AB''C''$.

于是，$\dfrac{AB}{AB''}=\dfrac{BC}{B''C''}=\dfrac{CA}{C''A}$.

又由 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$，$AB''=A'B'$，

可得 $B''C''=B'C'$，$C''A=C'A'$.

这样，$\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

于是，我们得到如下定理：

三边成比例的两个三角形相似．

例 5　如图 6－25，在四边形 $ABCD$ 中，AC、BD 相交于点 F，点 E 在 BD 上，且 $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BC}{ED}=\dfrac{AC}{AD}$.

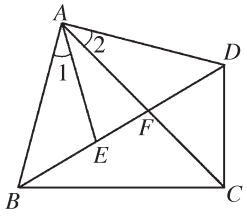


图 6－25

（1）$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等吗？为什么？

（2）判断 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACD$ 是否相似，并说明理由．

解：（1）$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等．

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中，

$\because \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BC}{ED}=\dfrac{AC}{AD}$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle AED$（三边成比例的两个三角形相似）.

$\therefore \angle BAC=\angle EAD$（相似三角形的对应角相等）.

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

(2) $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACD$ 相似.

由 $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}$，得

$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$\because \frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$，$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle ACD$(两边成比例且夹角相等的两个三角形相似).

拓展与延伸

在图 6－25 中，还有哪几对相似三角形？把它们分别表示出来，并说明理由.

练习

1. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=k$.

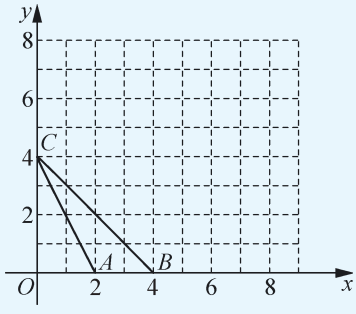
   (1) 当 $k=1$ 时，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有怎样的关系？

   (2) 当 $k\neq 1$ 时，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有怎样的关系？

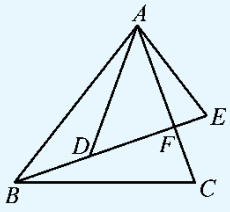
2. 如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的顶点坐标为 $A(2,0)$、$B(4,0)$、$C(0,4)$，将各顶点的横坐标、纵坐标都乘 2，得相应的点 A'、B'、C' 的坐标.

   (1) 画 $\triangle A'B'C'$；

   (2) $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 相似吗？为什么？



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，点 B、D、E 在一条直线上，BE 交 AC 于点 F，$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$. $\angle BAD$ 与 $\angle EBC$ 相等吗？为什么？

例 6　如图 6－26，在△ABC 中，$AB=AC$，点 D 在 BC 上，AD 的延长线交 △ABC 的外接圆于点 E．△ABE 与 △CDE 相似吗？为什么？

解： △ABE 与△CDE 相似.

∵ $AB=AC$，

∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，

∴ $\angle AEB=\angle AEC$．

在△ABE 和△CDE 中，

∵ $\angle AEB=\angle DEC$，$\angle BAE=\angle DCE$，

∴ △ABE ∽ △CDE（两角分别相等的两个三角形相似）.

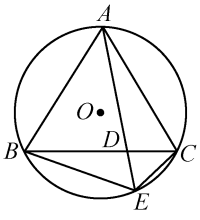


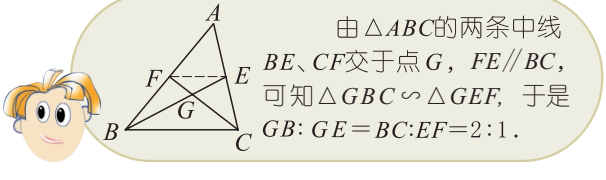
图 6－26

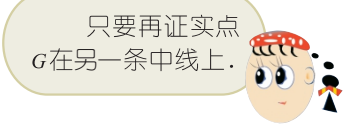
拓展与延伸

在图 6－26 中，还有哪几对相似三角形？把它们分别表示出来，并说明理由．

思考与探索

在七年级，我们通过观察、操作，发现三角形的三条中线相交于一点．你能运用相似形的有关知识证实这个结论吗？





如图 6－27，△ABC 的中线 BE、CF 相交于点 G，连接 EF，则 $FE/\!/BC$，$FE=\frac{1}{2}BC$. 这样，由△GEF∽△GBC，可得 $GE=\frac{1}{2}GB$.

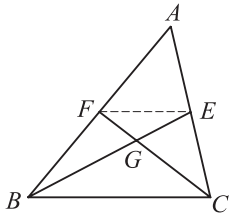


图 6－27

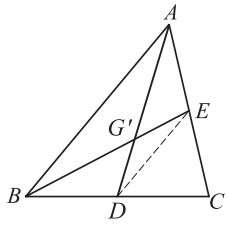


图 6－28

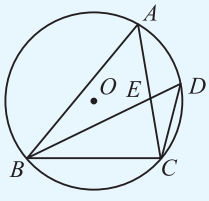
如图 6－28，AD 是△ABC 的另一条中线，设 AD 与 BE 相交于点 G'，连接 DE，同样可得△$G'DE$∽△$G'AB$，$G'E=\frac{1}{2}G'B$.

于是，点 G' 与点 G 重合，三角形的三条中线相交于一点．

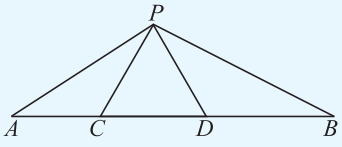
三角形的三条中线相交于一点，这点叫做**三角形的重心**（barycenter of a triangle）.

重心是物理学中的一个概念．物理学告诉我们：一个物体的各个部分都受到重力的作用，从效果看，可以认为各部分受到的重力作用集中于一点，这点叫做物体的重心．如果我们用一根手指顶在一块质地均匀的三角形薄板的重心处，这块薄板就能保持平衡．

1. 如图，△ABC 是⊙O 的内接三角形，D 是$\overset{\frown}{AC}$的中点，BD 交 AC 于点 E．△CDE 与△BDC 相似吗？为什么？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在△PAB 中，点 C、D 在 AB 上，且 $PC=PD=CD$，$\angle APB=120°$．△APC 与△PBD 相似吗？为什么？

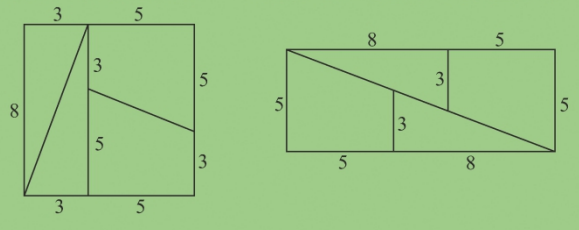
读一读

直觉的误导

在七年级下册“12.2　证明”一节中，我们做过如下实验：

图 12－4(1)是一张 8×8 的正方形纸片，把它剪成 4 块，按图 12－4(2) 重新拼合．

这 4 块纸片恰好能拼成一个长为 13、宽为 5 的长方形吗？

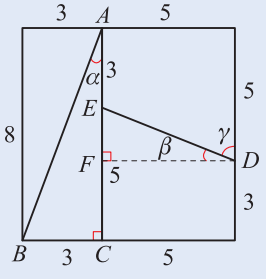


(1)　　(2)

图 12－4

现在，我们用反证法证实图(2)不是长方形．

如图(3)，过点 D 作 $DF\perp AC$，垂足为 F. 假设图(2)是长方形，那么图(2)的右下角就应是直角．于是，在图(3)中，有$\angle\alpha+\angle\gamma=90^\circ$. 又$\angle\beta+\angle\gamma=90^\circ$，这样$\angle\alpha=\angle\beta$，$\mathrm{Rt}\triangle DEF\backsim\mathrm{Rt}\triangle ABC$，$\frac{EF}{BC}=\frac{DF}{AC}$，即$\frac{2}{3}=\frac{5}{8}$，这是不可能的，因而图(2)不是长方形．



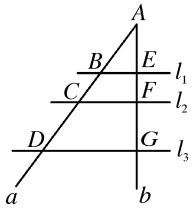
(3)

由于$\frac{2}{3}-\frac{5}{8}=\frac{1}{24}$，这个差很小，因此造成了我们视觉上的误差．

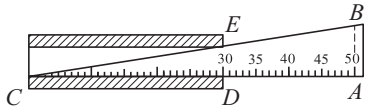
这个例子说明：对于数学结论，完全凭借直觉判断是不行的，还需要通过推理加以证实．

6.4 习题

1. 如图，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，过点 A 的直线 a、b 分别与 l_1、l_2、l_3 相交于点 B、C、D 和点 E、F、G. 图中有几对相似三角形？是哪几对？



（第 1 题）



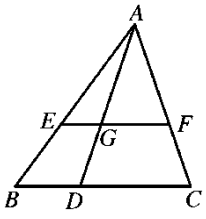
（第 2 题）

2. 如图，刻度尺的分度值为 1 mm. 如果玻璃管的内径 DE 正对“30”刻度线（$DE \parallel AB$），且量得 AB 长 7 mm，那么 DE 的长为多少？如果 DE 正对“35”刻度线呢？

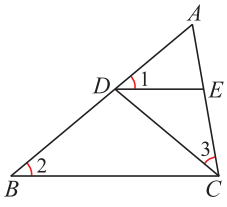
3. 如图，在△ABC 中，点 D、E、F 分别在 BC、AB、AC 上，$EF \parallel BC$，交 AD 于点 G.

（1）图中有几对相似三角形？是哪几对？

（2）$\dfrac{EG}{BD}$与$\dfrac{FG}{CD}$相等吗？为什么？



（第 3 题）



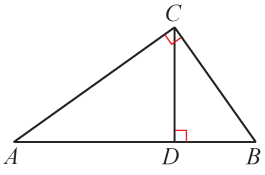
（第 4 题）

4. 如图，在△ABC 中，点 D、E 分别在 AB、AC 上，且 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. 图中有几对相似三角形？是哪几对？

5. 如图，在△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，$CD \perp AB$，垂足为 D.

（1）△ACD 与△CBD 相似吗？为什么？

（2）图中还有几对相似三角形？是哪几对？

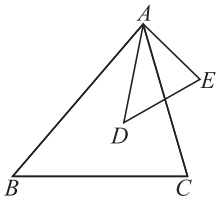


（第 5 题）

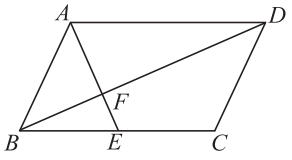
6. 如图，$\angle BAD=\angle CAE$，$\angle B=\angle D$.

(1) $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 相似吗？为什么？

(2) 如果 $AB=2AD$，$BC=4$，那么 DE 的长为多少？



（第 6 题）

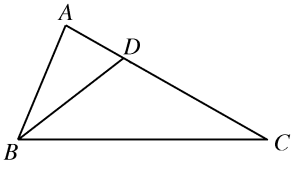


（第 7 题）

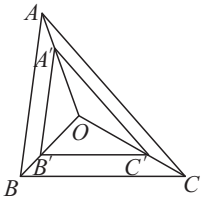
7. 如图，在▱$ABCD$ 中，E 是 BC 的中点，AE 交 BD 于点 F. 求 $\dfrac{AF}{EF}$ 的值.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=6$，$AC=8$，$\angle A=50^\circ$；在 $\triangle DEF$ 中，$DE=12$，$\angle D=50^\circ$. 试确定 DF 的长，使 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 AC 上，且 $AB^2=AD\cdot AC$. $\angle ABD$ 与 $\angle C$ 是否相等？为什么？



（第 9 题）

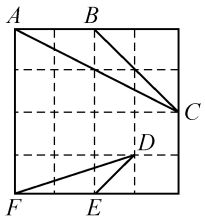


（第 10 题）

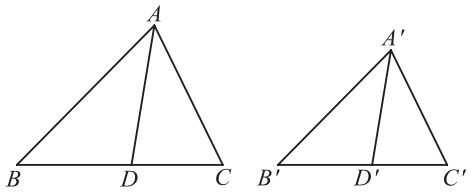
10. 如图，O 是 $\triangle ABC$ 内的一点，点 A'、B'、C' 分别在线段 OA、OB、OC 上，且 $\triangle OA'B'\backsim\triangle OAB$，$\triangle OB'C'\backsim\triangle OBC$. $\triangle OA'C'$ 与 $\triangle OAC$ 相似吗？为什么？

11. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=8$，$AC=6$；在 $\triangle DEF$ 中，$DE=4$，$DF=3$. 当 BC 与 EF 的比值为多少时，$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$？

12. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的顶点都在边长为 1 的小正方形的顶点上．$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似吗？为什么？



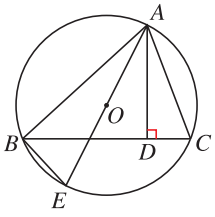
（第 12 题）



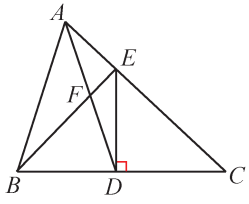
（第 13 题）

13. 如图，AD、$A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的角平分线，且 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BD}{B'D'}=\frac{AD}{A'D'}$．判断 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是否相似，并说明理由．

14. 如图，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形，AD 是 $\triangle ABC$ 的高，AE 是 $\odot O$ 的直径．$\triangle ABE$ 与 $\triangle ADC$ 相似吗？为什么？



（第 14 题）



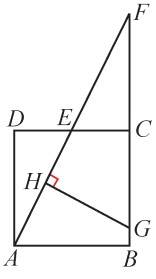
（第 15 题）

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，BC 的垂直平分线分别交 BC、AC 于点 D、E，BE 交 AD 于点 F，$AB=AD$.

(1) 判断 $\triangle FDB$ 与 $\triangle ABC$ 是否相似，并说明理由．

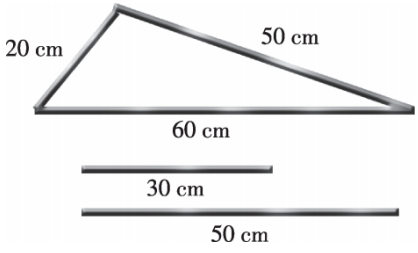
(2) AF 与 DF 相等吗？为什么？

16. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 8，E 是 CD 的中点，AE、BC 的延长线相交于点 F，AE 的垂直平分线分别交 AE、BC 于点 H、G. 求 FG 的长．



（第 16 题）

17. 如图，一个三角形钢筋框架的三边长分别为 20 cm、50 cm、60 cm，要再做一个与它相似的三角形钢筋框架．现有长分别为 30 cm、50 cm 的两根钢筋，要求以其中的一根为一边，从另一根上截下两段（允许有余料）作为另外两边，你认为有几种不同的截法？



（第 17 题）

6.5 相似三角形的性质

相似三角形除了具有对应角相等、对应边成比例的性质外，还具有什么性质？

如图 6－29，我们已经知道，当 D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 各边的中点时，$\triangle DEF \backsim \triangle ABC$，相似比为$\frac{1}{2}$．这两个三角形的周长、面积分别有什么关系？

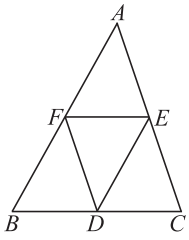
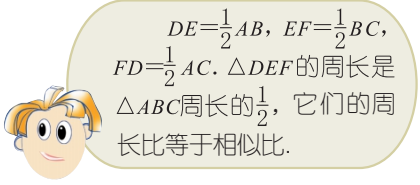
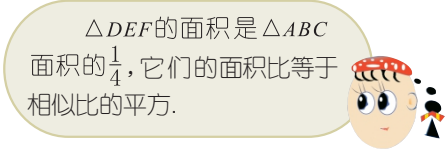


图 6－29





我们可以用如下的方法证实小明、小丽的猜想：

如果$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k，那么 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=k$，

$AB=kA'B'$，$BC=kB'C'$，$CA=kC'A'$．

所以 $\frac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=\frac{kA'B'+kB'C'+kC'A'}{A'B'+B'C'+C'A'}=k$．

于是，我们得到如下定理：

相似三角形周长的比等于相似比．

类似地，我们还可以得到：

相似多边形周长的比等于相似比．

如图 6－30，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k，AD、$A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$的高．

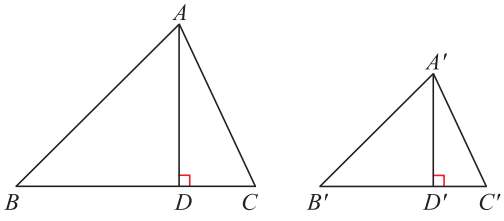


图 6－30

由 $\angle B=\angle B'$，$\angle ADB=\angle A'D'B'=90^\circ$，可得 $\triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'$，$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}=k$，$AD=kA'D'$.

因为 $BC=kB'C'$，

所以 $\frac{\triangle ABC\text{ 的面积}}{\triangle A'B'C'\text{ 的面积}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot AD}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}=\frac{\frac{1}{2}kB'C'\cdot kA'D'}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}=k^2$.

于是，我们得到如下定理：

相似三角形面积的比等于相似比的平方.

如果把两个相似多边形分成若干个相似的三角形，我们还可以得到：

相似多边形面积的比等于相似比的平方.

例 1　在比例尺为 1∶500 的地图上，测得三角形地块 ABC 的周长为 12 cm，面积为 6 cm^2. 求这个地块的实际周长和面积.

解：如果把实际三角形地块记为 $\triangle A'B'C'$，那么 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，且相似比 $k=\frac{1}{500}$.

于是 $\frac{\triangle ABC\text{ 的周长}}{\triangle A'B'C'\text{ 的周长}}=\frac{1}{500}$（相似三角形周长的比等于相似比），

$\frac{\triangle ABC\text{ 的面积}}{\triangle A'B'C'\text{ 的面积}}=\left(\frac{1}{500}\right)^2$（相似三角形面积的比等于相似比的平方）.

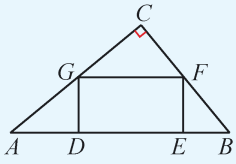
$\therefore\ \triangle A'B'C'$ 的周长 $=12\times500=6\ 000(\text{cm})=60\text{ m}$，

$\triangle A'B'C'$ 的面积 $=6\times500^2=1\ 500\ 000(\text{cm}^2)=150\text{ m}^2$.

答：这个地块的实际周长为 60 m，面积为 150 m^2.

练习

1. 给形状相同且对应边的比为 1∶2 的两块多边形标牌的表面涂漆．如果小标牌用漆半听，那么大标牌需用漆多少听？
2. 两个相似多边形面积的比为 9∶16，其中较小的多边形的周长为 36 cm. 求另一个多边形的周长．
3. 如图，在△ABC 中，$\angle C=90°$，矩形 $DEFG$ 的顶点 G、F 分别在 AC、BC 上，DE 在 AB 上．设 $AG=5$，$AD=4$，求△ADG 与△FEB 的面积的比．



（第 3 题）

思考与探索

在探索“相似三角形面积的比等于相似比的平方”的过程中，我们发现了“相似三角形对应高的比等于相似比”. 类似地，相似三角形对应中线、对应角平分线等对应线段的比是否也等于相似比呢？

如图 6－31，如果 △ABC ∽ △$A'B'C'$，相似比为 k，AE、$A'E'$ 分别是△ABC 和△$A'B'C'$ 的中线，那么 $\frac{AE}{A'E'}=k$.

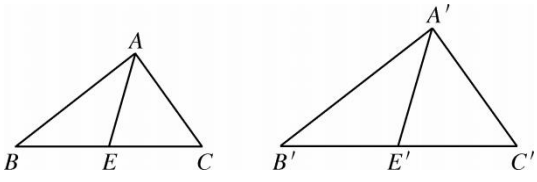


图 6－31

由 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BE}{B'E'}$，$\angle B=\angle B'$，可知△$ABE$∽△$A'B'E'$.

如图 6－32，如果 △ABC ∽ △$A'B'C'$，相似比为 k，AF、$A'F'$ 分别是△ABC 和△$A'B'C'$ 的角平分线，那么 $\frac{AF}{A'F'}=k$.

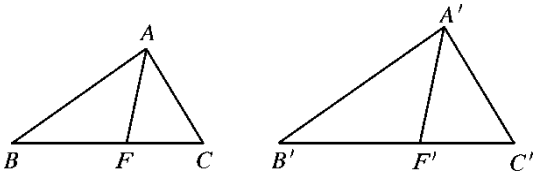


图 6－32

由 $\angle B=\angle B'$，$\angle BAF=\angle B'A'F'$，可知△ABF∽△$A'B'F'$.

如图 6－33，如果 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k，点 G、G' 分别在 BC、$B'C'$ 上，且 $\frac{BG}{B'G'}=k$，那么 $\frac{AG}{A'G'}=k$.

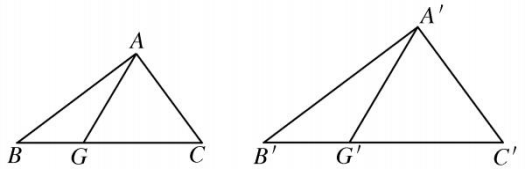


图 6－33

由 $\frac{AB}{A'B'}=k$，$\frac{BG}{B'G'}=k$，$\angle B=\angle B'$，可知 $\triangle ABG \backsim \triangle A'B'G'$.

于是，我们得到如下定理：

相似三角形对应线段的比等于相似比．

例 2　如图 6－34，AF 是 $\triangle ABC$ 的高，点 D、E 分别在 AB、AC 上，且 $DE \parallel BC$，DE 交 AF 于点 G. 设 $DE=6$，$BC=10$，$GF=5$，求点 A 到 DE、BC 的距离．

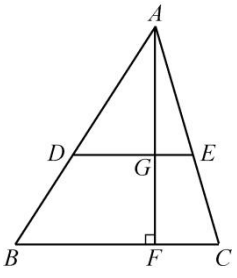


图 6－34

解： 由 $DE \parallel BC$，$\angle AFB=90°$，得 $\angle AGD=90°$，即 $AG \perp DE$.

可知 AG、AF 的长分别为点 A 到 DE、BC 的距离．

由 $DE \parallel BC$，得

$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$.

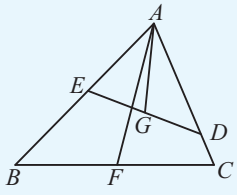
于是，$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，$\frac{AG}{AF}=\frac{DE}{BC}$，即 $\frac{AG}{AG+5}=\frac{3}{5}$.

计算，得 $AG=7.5$，$AF=AG+5=12.5$，

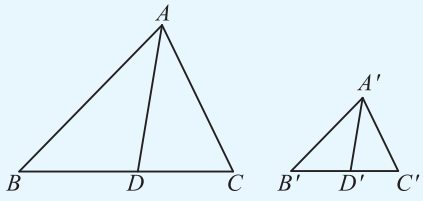
即点 A 到 DE、BC 的距离分别为 7.5、12.5.

练习

1. 如图，点 D、E 分别在 AC、AB 上，且 $\angle ADE=\angle B$，F、G 分别是 BC、DE 的中点．设 $AD=3$，$AB=5$，求 $\frac{AG}{AF}$ 的值．



（第 1 题）



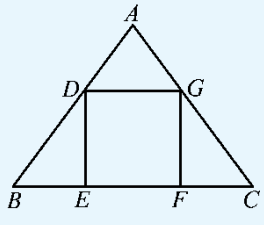
（第 2 题）

2. 如图，在△ABC 和△$A'B'C'$ 中，AD、$A'D'$ 分别是△ABC、△$A'B'C'$ 的角平分线，且 $AB=2A'B'$，$AC=2A'C'$，$\angle BAC=\angle B'A'C'$．求：

(1) $\frac{AD}{A'D'}$ 的值；

(2) △ABC 与△$A'B'C'$ 的面积的比．

3. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，正方形 $DEFG$ 的顶点 D、G 分别在 AB、AC 上，EF 在 BC 上．设 $AB=5$，$BC=6$，求正方形 $DEFG$ 的边长．

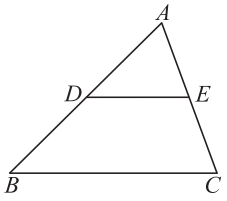


（第 3 题）

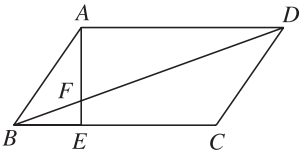
6.5 习题

1. 在比例尺为 1∶5 000 的地图上，测得一个多边形地块的面积为 24 cm^2．求这个多边形地块的实际面积．

2. 如图，在△ABC 中，点 D、E 分别在 AB、AC 上，且 $DE \parallel BC$，△ADE 与四边形 $DBCE$ 的面积的比为 1∶3. 求$\frac{AD}{AB}$的值.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在▱$ABCD$ 中，E 是 BC 上的 3 等分点，AE 交 BD 于点 F. 求：

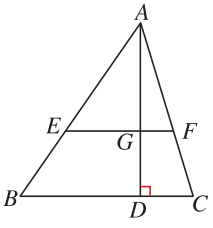
（1）$\frac{BF}{DF}$的值；

（2）△BEF 与△DAF 的周长的比、面积的比.

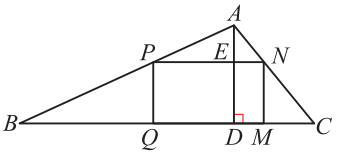
4. 如图，在△ABC 中，AD 是高，点 E、F 分别在 AB、AC 上，且 $EF \parallel BC$，EF 交 AD 于点 G，$\frac{EF}{BC}=\frac{3}{5}$. 求：

（1）$\frac{AG}{AD}$的值；

（2）△AEF 与△ABC 的面积的比.



（第 4 题）



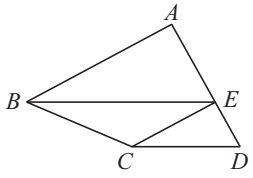
（第 5 题）

5. 如图，在△ABC 中，AD 是高，矩形 $PQMN$ 的顶点 P、N 分别在 AB、AC 上，QM 在 BC 上，AD 交 PN 于点 E. 设 $BC=48$，$AD=16$，$PQ∶PN=5∶9$，求矩形 $PQMN$ 的面积.

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，点 E 在 AD 上，且 $EC \parallel AB$，$EB \parallel DC$.

(1) $\triangle ABE$ 与 $\triangle ECD$ 相似吗？为什么？

(2) 设 $\triangle ABE$ 的边 BE 上的高为 h_1，$\triangle ECD$ 的边 CD 上的高为 h_2，$\triangle ABE$ 的面积为 3，$\triangle ECD$ 的面积为 1，求 $\frac{h_1}{h_2}$ 的值以及 $\triangle BCE$ 的面积.



（第 6 题）

6.6　图形的位似

在玻璃片上画一个三角形，使玻璃片与墙面平行，用点光源（如手电筒光源）把三角形投影到墙面上（如图 6－35）．你发现了什么？

保持玻璃片与墙面平行，将玻璃片前后移动，你又能发现什么？

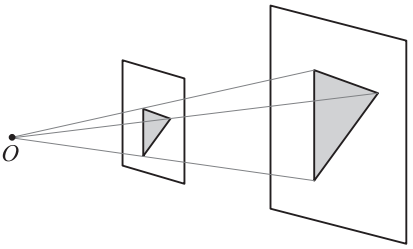


图 6－35

尝试与交流

1．在图 6－36(1)中，连接 OA、OB、OC，分别在线段 OA、OB、OC 的反向延长线上取点 A'、B'、C'，使 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=2$；画 $\triangle A'B'C'$．

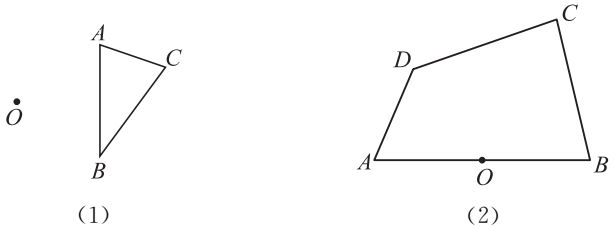
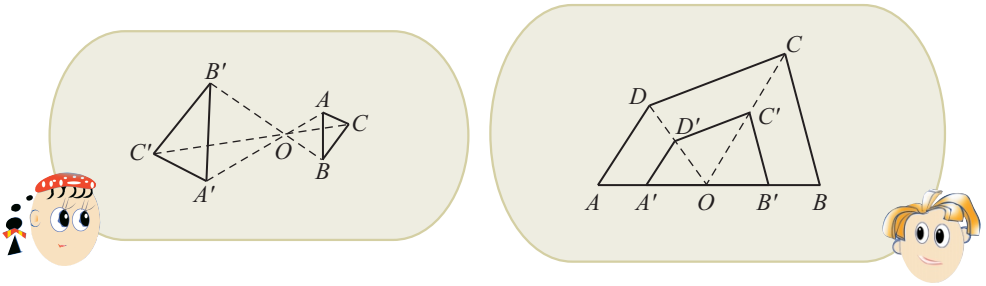


图 6－36

2．在图 6－36(2)中，连接 OC、OD，分别在线段 OA、OB、OC、OD 上取点 A'、B'、C'、D'，使 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{1}{2}$；画四边形 $A'B'C'D'$．



如图 6－37，两个多边形的顶点 A 与 A'、B 与 B'、C 与 C'……所在的直线都经过同一点 O，并且 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=$……像这样的两个多边形叫做**位似多边形**(homothetic polygons)，点 O 叫做位似中心．

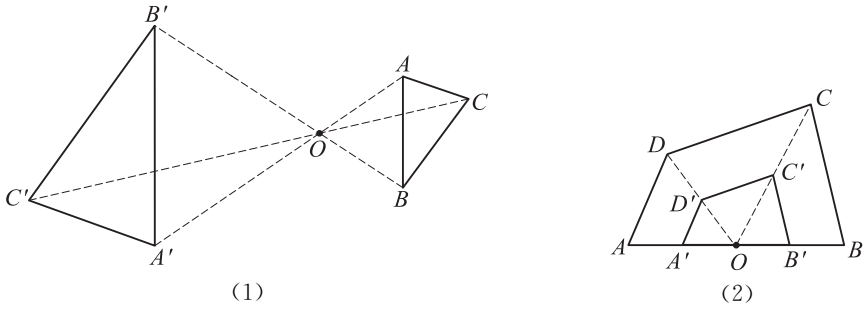
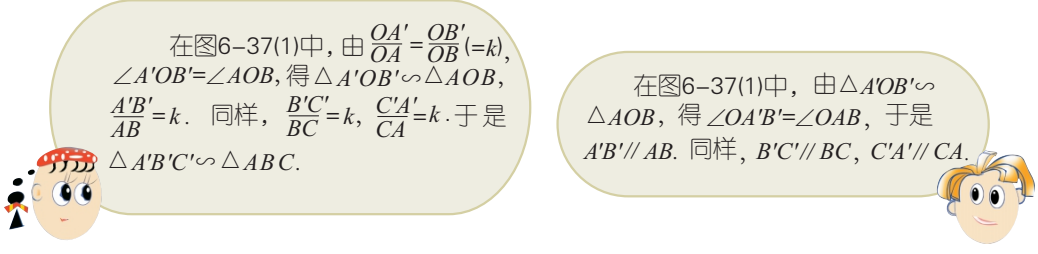


图 6－37

1．在图 6－37(1)中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是位似形，这两个三角形相似吗？它们的对应边有怎样的位置关系？为什么？



2．在图 6－37(2)中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 是位似形，这两个四边形相似吗？它们的对应边有怎样的位置关系？为什么？

两个位似多边形一定相似，并且它们的对应边互相平行(或在同一条直线上)．

利用位似可以把一个图形按所给相似比放大或缩小．

1．在图 6－38 中，以点 O 为位似中心，把 $\triangle ABC$ 按相似比 2∶1 放大(即所画图形与原图形的相似比为 2∶1)．

2. 在图 6－39 中，以点 O 为位似中心，把四边形 $ABCD$ 按相似比 1∶2 缩小.

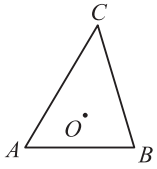


图 6－38

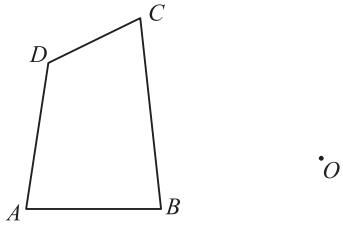


图 6－39

如图 6－40，在平面直角坐标系中，$\triangle OAB$ 的顶点坐标分别为 $O(0,0)$、$A(5,4)$、$B(3,0)$，分别将点 A、B 的横坐标、纵坐标都乘 2，得相应的点 A'、B' 的坐标.

(1) 画 $\triangle OA'B'$；

(2) $\triangle OA'B'$ 与 $\triangle OAB$ 是位似形吗？为什么？

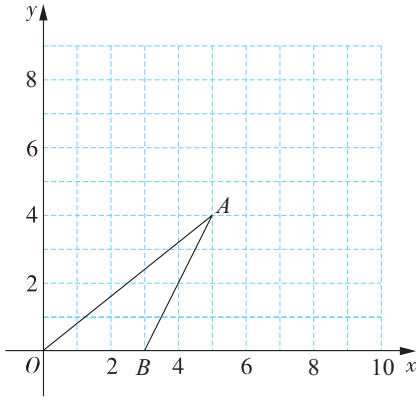


图 6－40

在平面直角坐标系中，

(1) 取横坐标、纵坐标都是整数的 4 个点，画出以这 4 个点为顶点的四边形 $ABCD$；

(2) 以坐标原点为位似中心，把四边形 $ABCD$ 按相似比 2∶1放大，得四边形 $A'B'C'D'$；

(3) 四边形 $A'B'C'D'$ 的顶点坐标与四边形 $ABCD$ 的顶点坐标有怎样的数量关系？

阅读

特殊—一般—特殊

我们知道，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，如果

(1) $\angle A=\angle A'$，$\frac{AB}{A'B'}=k$，$\angle B=\angle B'$，

(2) $\angle A=\angle A'$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=k$，

(3) $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=k$，

那么当$k=1$时，$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$；当$k\neq 1$时，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

可见，全等形是特殊的相似形.

位似形不仅相似，而且具有“对应边互相平行(或在同一条直线上)，对应顶点所在直线相交于一点”的特殊位置关系. 可见，位似形是特殊的相似形.

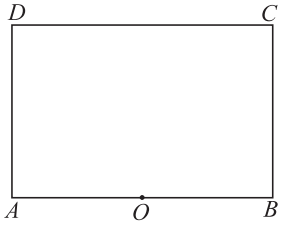
对全等形、相似形、位似形的研究，我们经历了“由特殊到一般，再由一般到特殊”的认识过程. 利用“特殊”与“一般”的关系，常常可以探索、发现、证实结论. 你能举例说明吗?

6.6 习题

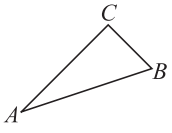
1. 根据下列要求画图：

(1) 如图①，以AB的中点O为位似中心，把矩形$ABCD$按相似比1∶2缩小；

(2) 如图②，以点B为位似中心，把$\triangle ABC$按相似比2∶1放大.



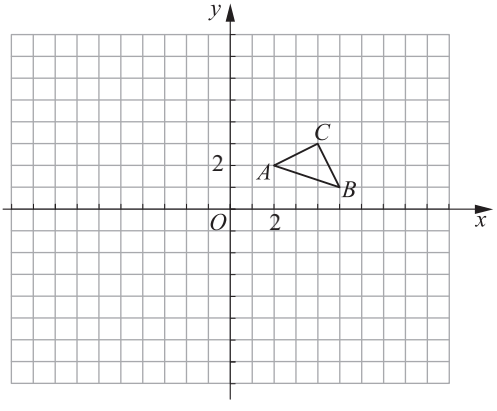
①



②

(第1题)

2. 如图，在平面直角坐标系中，△ABC 的顶点坐标分别为A(2，2)、B(5，1)、C(4，3)．以坐标原点为位似中心，在第一、三象限分别画出与△ABC 位似的三角形，使相似比为 2∶1，并分别写出所画三角形的顶点坐标．



（第 2 题）

6.7 用相似三角形解决问题

光在空气中传播时，遇到不透明的物体，在这个物体后面光不能到达的区域便产生影．

如图 6－41，在太阳光的照射下，树木、路灯、路标都产生了影．通常，我们把太阳光看成平行光．在平行光的照射下，物体所产生的影称为**平行投影**(parallel projection)．

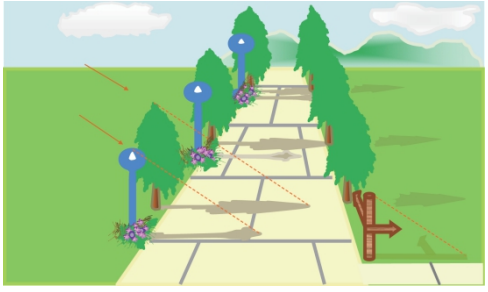


图 6－41

数学实验室

在学校操场上分别竖立长度不同的甲、乙、丙三根木杆，在同一时刻分别测量这三根木杆在阳光下的影长，并将有关数据填入下表：

木杆	木杆长度	杆影长度	$\frac{\text{木杆长度}}{\text{杆影长度}}$
甲			
乙			
丙			

通过观察、测量，你发现了什么？请与同学交流．

在平行光的照射下，在同一时刻，不同物体的物高与影长成比例．

尝试与交流

1. 在图 6－42 中，甲木杆 AB 在阳光下的影长为 BC. 试在图中画出同一时刻乙、丙两根木杆在阳光下的影长.

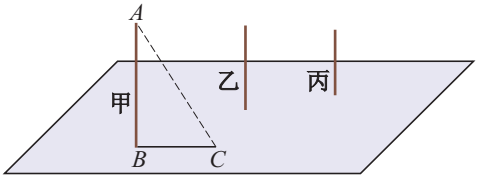


图 6－42

2. 古埃及国王曾请一位学者测量金字塔的高度. 当这位学者确认在阳光下他的影长等于他的身高时(如图 6－43(1))，要求他的助手同时测出金字塔的影长 DB 以及金字塔底部正方形的边长，这样他就知道了金字塔的高度.

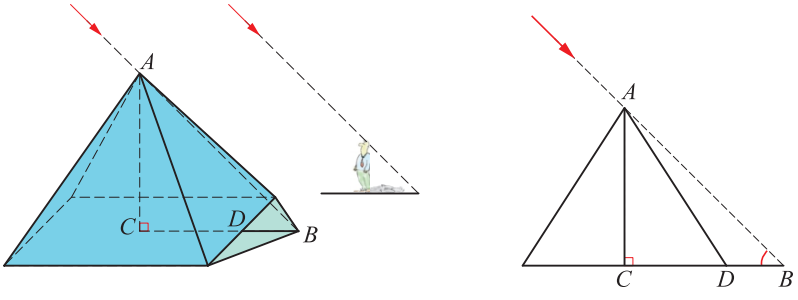


图 6－43

如图 6－43(2)，AC 是金字塔的高，DB 是金字塔的影长. 如果此时测得影长 DB 为 32 m，金字塔底部正方形的边长为 230 m，你能帮助这位学者计算这座金字塔的高度吗?

你能用这种方法测量出学校附近某一物体的高度吗?

练习

1. 在阳光下，身高为 1.68 m 的小强在地面上的影长为 2 m. 在同一时刻，测得旗杆在地面上的影长为 18 m. 求旗杆的高度(精确到 0.1 m).
2. 在阳光下，高为 6 m 的旗杆在地面上的影长为 4 m. 在同一时刻，测得附近一座建筑物的影长为 36 m. 求这座建筑物的高度.

夜晚，当人在路灯下行走时，会看到一个有趣的现象：在灯光照射范围内，离开路灯越远，影子就越长(如图 6－44).

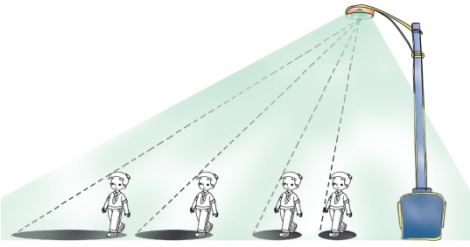


图 6－44

通常，路灯、台灯、手电筒……的光可以看成是从一个点发出的．在点光源的照射下，物体所产生的影称为**中心投影**(central projection).

一般地，在点光源的照射下，同一个物体在不同的位置，它的物高与影长不成比例.

尝试与交流

1. 三根旗杆的底部在同一条直线上，其中两根在同一灯光下的影长如图 6－45. 请在图中画出光源的位置，并画出另一根旗杆在该灯光下的影长(不写画法)．

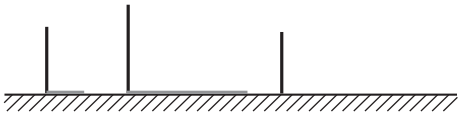


图 6－45

2. 如图 6－46，马路两侧有两根灯杆 AB、CD. 当小明站在点 N 处时，在灯 C 的照射下小明的影长正好为 NB，在灯 A 的照射下小明的影长为 NE. 测得 $BD=24\,\text{m}$，$NB=6\,\text{m}$，$NE=2\,\text{m}$，判断这两根灯杆的高度是否相同，并说明理由．

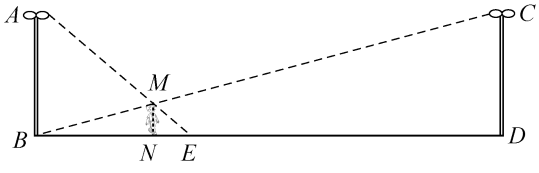


图 6－46

例　如图 6－47，河对岸有一灯杆 AB，在灯光下，小丽在点 D 处测得自己的影长 $DF=3$ m，沿 BD 方向前进到点 F 处测得自己的影长 $FG=4$ m. 设小丽的身高为 1.6 m，求灯杆 AB 的高度.

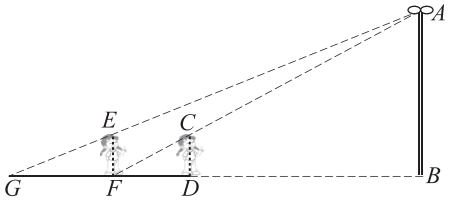


图 6－47

分析：由△ABF∽△CDF，且 CD、DF 是已知量，可以得到 AB 与 $BF(BD)$之间的一个关系式；由△ABG∽△EFG，且 EF、FG 是已知量，可以得到 AB 与 $BG(BD)$之间的又一个关系式. 这样，根据这两个关系式可以求得 BD 和 AB.

解：在 Rt△ABF 和 Rt△CDF 中，

∠AFB = ∠CFD，

于是 △ABF ∽ △CDF.

所以 $\frac{AB}{CD}=\frac{BF}{DF}$，即

$$\frac{AB}{1.6}=\frac{3+BD}{3}. \quad ①$$

类似的，△ABG ∽ △EFG.

所以 $\frac{AB}{EF}=\frac{BG}{FG}$，即

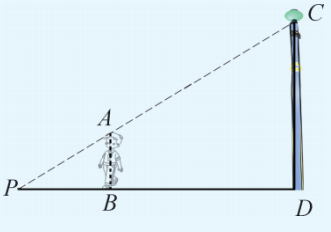
$$\frac{AB}{1.6}=\frac{7+BD}{4}. \quad ②$$

由①、②，得 $\frac{3+BD}{3}=\frac{7+BD}{4}$，$BD=9$.

将 $BD=9$ 代入①，得 $\frac{AB}{1.6}=\frac{3+9}{3}$，$AB=6.4$.

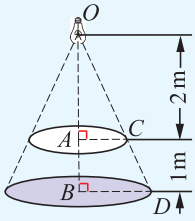
答：灯杆 AB 高 6.4 m.

1. 如图，某学生身高 $AB=1.70$ m，在灯光下，他从灯杆底部点 D 处沿直线前进 4 m 到达点 B 时，测得他的影长 $PB=2$ m. 求灯杆 CD 的高度.



（第 1 题）

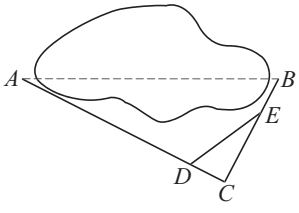
2. 如图，圆桌正上方的灯泡 O(看作一个点)发出的光线照射到桌面后，在地面上形成影．设桌面的半径 $AC=0.8$ m，桌面与地面的距离 $AB=1$ m，灯泡与桌面的距离 $OA=2$ m，求地面上形成的影的面积．



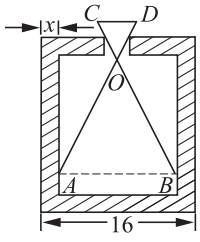
(第 2 题)

6.7 习题

1. 如图，A、B 两地分别在湖的两侧，点 D、E 分别在 AC、BC 上．设 $CD=20$ m，$CE=40$ m，$AD=100$ m，$BE=20$ m，$DE=45$ m，求 AB.



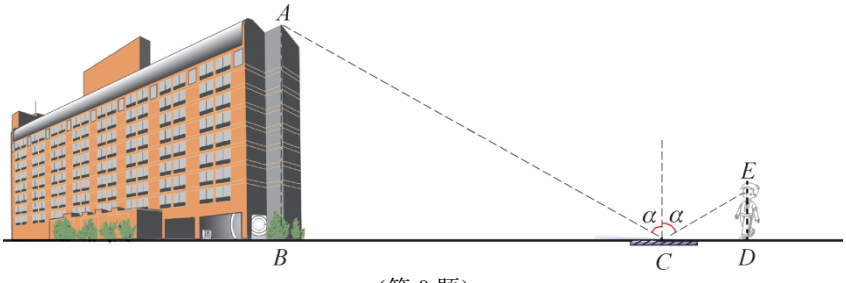
(第 1 题)



(第 2 题)

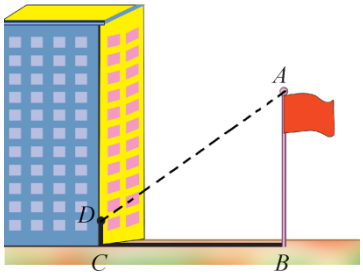
2. 如图，零件的外径为 16 cm，用卡钳($AD=BC$，且 $OA:OD=OB:OC=3:1$)测得 $CD=5$ cm，求零件的壁厚 x.

3. 小军想出了一个测量建筑物高度的方法：在地面上点 C 处平放一面镜子，并在镜子上做一个标记，然后向后退去，直至站在点 D 处恰好看到建筑物 AB 的顶端 A 在镜子中的像与镜子上的标记重合(如图)．设小军的眼睛距地面 1.65 m，BC、CD 的长分别为 60 m、3 m，求这座建筑物的高度.

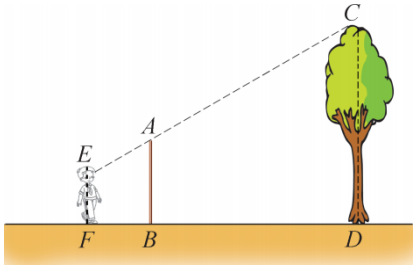


(第 3 题)

4. 如图，在阳光下，旗杆 AB 在地面上的影长 BC 为 20 m；在建筑物墙面上的影长 CD 为 4 m．同一时刻，测得直立于地面长 1 m 的木杆的影长为 0.8 m．求旗杆 AB 的高度．



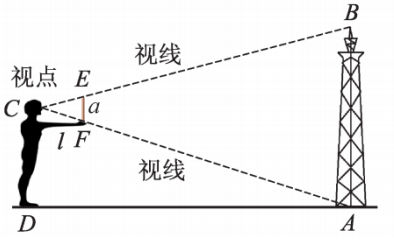
（第 4 题）



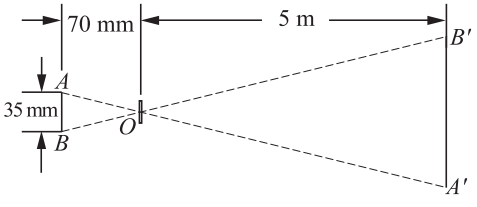
（第 5 题）

5. 如图，竖立在点 B 处的标杆 AB 高 2.5 m，站立在点 F 处的观察者从点 E 处看到标杆顶 A、树顶 C 在一条直线上．设 $BD = 10$ m，$FB = 3$ m，$EF = 1.7$ m，求树高 CD（精确到 0.1 m）．

6. 小明把手臂水平向前伸直，手持小尺竖直，瞄准小尺的两端 E、F，不断调整站立的位置，使在点 D 处时恰好能看到铁塔的顶部 B 和底部 A（如图）．设小明的手臂长 $l = 50$ cm，小尺长 $a = 20$ cm，点 D 到铁塔底部的距离 $AD = 40$ m，求铁塔的高度．



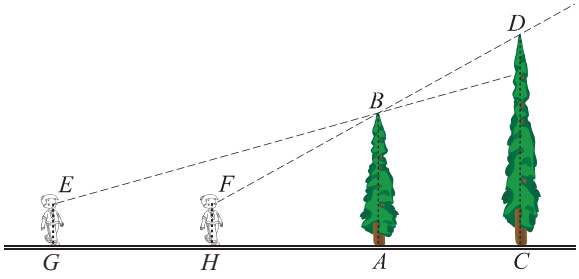
（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图是一个照相机成像的示意图．如果底片 AB 宽为 35 mm，焦距是 70 mm，那么拍摄 5 m 外的景物 $A'B'$ 至少有多宽？如果焦距是 50 mm 呢？

8. 如图，点 G 与树 AB、CD 的根部点 A、点 C 在一条直线上，小强从点 G 出发沿 GC 方向前进到点 H 时，恰好看不到树顶 D. 已知小强的眼睛离地面 1.6 m，$AB=6$ m，$CD=9$ m，$AC=6$ m，求 AH 的长.



（第 8 题）

数学活动

测量两地间的距离

要测量不能到达的两个目标 A、B 间的距离，一种测量方法如下：

(1) 选择两个观测点 C、D，测出它们之间的距离，并按一定的比例尺将它们画在纸上；

(2) 在点 C 处测出$\angle ACD$ 和$\angle BCD$ 的度数，在点 D 处测出$\angle ADC$ 和$\angle BDC$ 的度数；

(3) 在纸上分别画出 $\angle ACD$、$\angle BCD$、$\angle ADC$ 和$\angle BDC$，从而确定点 A、B 在纸上的位置(如图 6－48).

这样，量出 A、B 两点间的图上距离，就可以根据比例尺求出 A、B 两地间的实际距离.

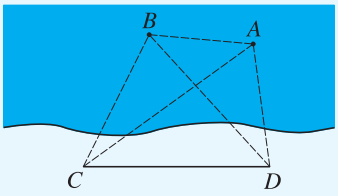


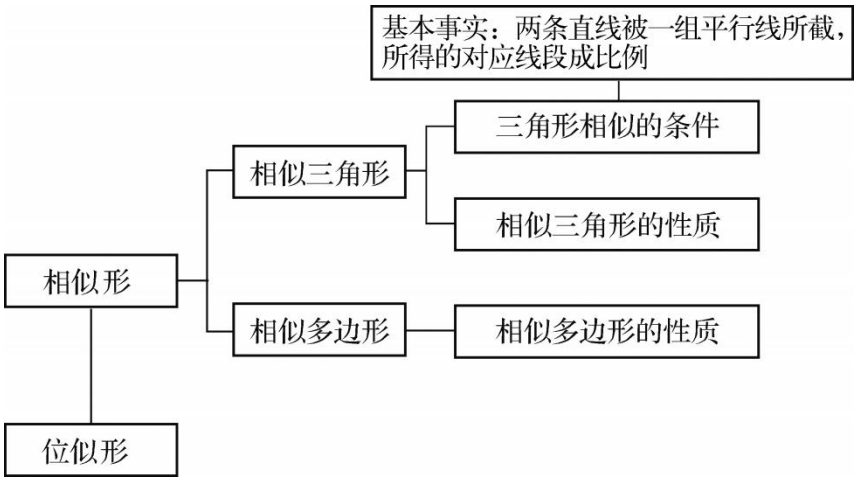
图 6－48

若测得 $CD=600$ m，$\angle ACD=45°$，$\angle BCD=75°$，$\angle ADC=80°$，$\angle BDC=54°$. 用 1∶3 000 的比例尺在纸上分别画出点 C、D 和点 A、B，则 A、B 两地间的实际距离为多少？

试在校园内或郊外选择相距 100 m 左右的两个目标 A、B(AB 的长度可直接测量)，用上述方法测量出 A、B 两地间的距离，再直接量出 AB 的长，加以检验.

小结与思考

1. 本章知识结构



2. 本章中，我们从基本事实出发，通过推理得到“平行于三角形一边的直线与其他两边相交，所截得的三角形与原三角形相似”的结论，并运用这个结论探索三角形相似的条件，进而研究相似三角形的性质．

3. 本章中，我们通过操作、实践，了解黄金分割及其在生产、生活中的一些应用；通过对具体实例的观察，了解中心投影和平行投影．把一些实际问题抽象成相似三角形问题，然后用相似形的知识解决这些问题，体现了数学的价值．

4. 全等形是具有特殊数量关系的相似形，位似形是具有特殊位置关系的相似形．对全等形、相似形、位似形的研究，我们经历了“由特殊到一般，再由一般到特殊”的认识过程．利用“特殊”与“一般”的关系，常常可以探索、发现、证实结论．你能举例说明吗？

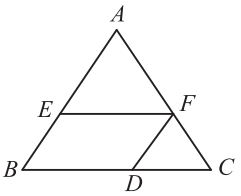
5. 我们已经学习了图形的平移、旋转、对称、位似等变化，请举出一些应用实例，体会从图形运动变化的角度研究图形的方法．

复习题

复习巩固

1. 在 A 市建设规划图上，城区南北长为 240 cm，A 市城区南北的实际长为 18 km，试写出该规划图的比例尺．

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E、F 分别在 BC、AB、AC 上，且 $EF \parallel BC$，$FD \parallel AB$．设 $AE = 3.6$，$BE = 2.4$，$CD = 2.8$，求 BD 的长．



（第 2 题）

3. 满足下列条件的两个三角形是否相似？为什么？

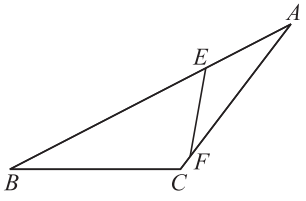
(1) $\triangle ABC$ 的两个角分别是 $60°$、$80°$，$\triangle A'B'C'$ 的两个角分别是 $80°$、$40°$；

(2) $\triangle ABC$ 的两边长分别为 8 cm、12 cm，夹角为 $60°$，$\triangle A'B'C'$ 的两边长分别为 15 cm、10 cm，夹角为 $60°$；

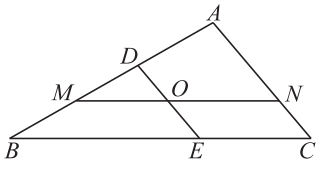
(3) $\triangle ABC$ 的三边长分别为 4 cm、6 cm、8 cm，$\triangle A'B'C'$ 的三边长分别为 24 cm、18 cm、12 cm.

4. 要制作两个相似的三角形框架，其中一个三角形框架的三边长分别为 4、6、8，另一个三角形框架的一边长为 2. 求另一个三角形框架的其他两边的长.

5. 如图，要使 $\triangle AFE \backsim \triangle ABC$，需要添加什么条件？



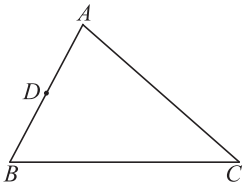
（第 5 题）



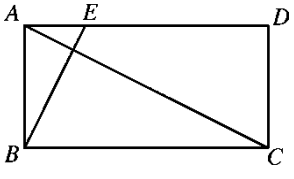
（第 6 题）

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D、M 在 AB 上，点 E、N 分别在 BC、AC 上，且 $DE \parallel AC$，$MN \parallel BC$，DE 交 MN 于点 O. 图中与 $\triangle ABC$ 相似的三角形有多少个？把它们表示出来，并说明理由.

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 6$，$AC = 8$，D 是 AB 的中点. 试在 AC 上确定点 E 的位置，使 $\triangle ADE$ 与原三角形相似，并求 AE 的长.



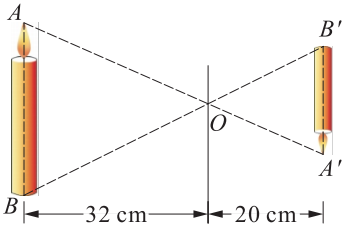
（第 7 题）



（第 8 题）

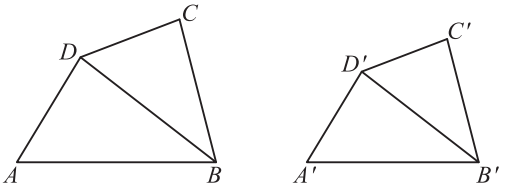
8. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB : BC = 1 : 2$，点 E 在 AD 上，且 $ED = 3AE$. 判断 $\triangle ABC$ 与 $\triangle EAB$ 是否相似，并说明理由.

9. 如图，燃烧的蜡烛 AB 经小孔 O 在屏幕上成像 $A'B'$．设 $AB=30$ cm，小孔 O 到 AB、$A'B'$ 的距离分别为 32 cm、20 cm，求像 $A'B'$ 的长．



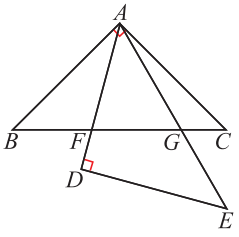
（第 9 题）

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 和四边形 $A'B'C'D'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$．判断△$BCD$ 与△$B'C'D'$ 是否相似，并说明理由．

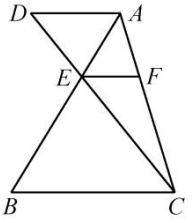


（第 10 题）

11. 如图，△ABC 与△DEA 是两个全等的等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle D=90°$，BC 分别交 AD、AE 于点 F、G．图中有哪几对相似三角形？把它们表示出来，并说明理由．



（第 11 题）

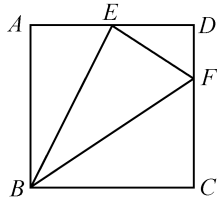


（第 12 题）

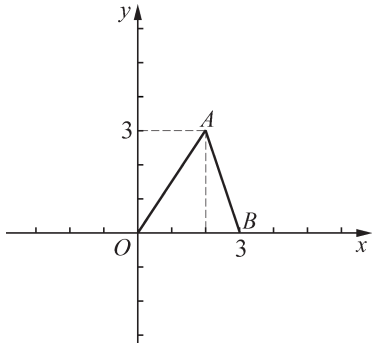
12. 如图，在△ABC 中，点 E 在 AB 上，$AE:EB=1:2$，$EF/\!/BC$，交 AC 于点 F，$AD/\!/BC$，交 CE 的延长线于点 D．设△AEF 的面积为 3，求△CEF 和△CAD 的面积．

灵活运用

13. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是 AD 的中点，F 是 CD 上一点，且 $CF=3FD$. 图中有哪几对相似三角形？把它们表示出来，并说明理由.



（第 13 题）



（第 14 题）

14. 如图，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为(2，3)，点 B 的坐标为(3，0).

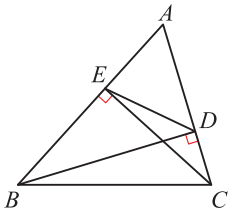
(1) 把△AOB 沿 x 轴向左平移 1 个单位长度得到△$A_1O_1B_1$，写出点 A_1、O_1、B_1 的坐标；

(2) 把△AOB 绕原点旋转 180° 得到△A_2OB_2，写出点 A_2、B_2 的坐标；

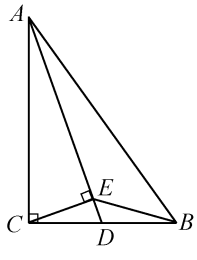
(3) 把△AOB沿 x 轴翻折得到△A_3OB，写出点 A_3 的坐标；

(4) 以点 O 为位似中心，在第一象限内把△AOB 按相似比2∶1放大，得到△A_4OB_4，写出点 A_4、B_4 的坐标.

15. 如图，BD、CE 是△ABC 的高. △ADE 与△ABC 相似吗？为什么？



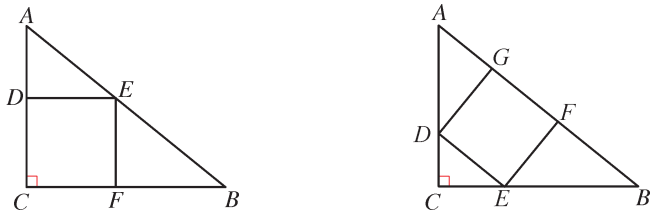
（第 15 题）



（第 16 题）

16. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，D 是 BC 的中点，$CE\perp AD$，垂足为 E. 判断 $\angle BED$ 与 $\angle ABC$ 是否相等，并说明理由.

17. 一块直角三角形木板，它的一条直角边 AC 长 1.5 m，面积为 1.5 m^2. 甲、乙两人分别按图①、②把它加工成一个正方形桌面. 请说明哪个正方形面积较大.

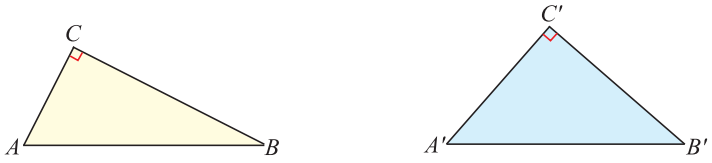


①　　②

（第 17 题）

探索研究

18. 如图，有两个分别涂有黄色和蓝色的△ABC 和△$A'B'C'$，其中 $\angle C=\angle C'=90°$，且两个三角形不相似. 问：能否分别用一条直线分割这两个三角形，使△ABC 所分割成的两个黄色三角形与△$A'B'C'$所分割成的两个蓝色三角形分别相似？如果能，请设计分割方案；如果不能，请说明理由.



①　　②

（第 18 题）

19. 如图，AD 是△ABC 的中线，点 E 在 AC 上，BE 交 AD 于点 F. 某数学兴趣小组在研究这个图形时得到如下结论：

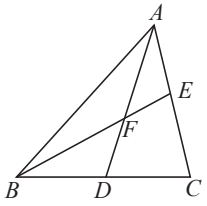
（1）当 $\frac{AF}{AD}=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{AE}{AC}=\frac{1}{3}$；

（2）当 $\frac{AF}{AD}=\frac{1}{3}$ 时，$\frac{AE}{AC}=\frac{1}{5}$；

（3）当 $\frac{AF}{AD}=\frac{1}{4}$ 时，$\frac{AE}{AC}=\frac{1}{7}$；

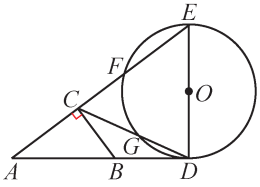
⋮

猜想：当 $\frac{AF}{AD}=\frac{1}{n+1}$ 时，$\frac{AE}{AC}=$？并说明理由.



（第 19 题）

20. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$AB=5$，$BC=3$，点D在AB的延长线上，且$BD=3$，过点D作$DE\perp AD$，交AC的延长线于点E，以DE为直径的$\odot O$交AE于点F.



（第20题）

（1）求$\odot O$的半径及圆心O到弦EF的距离；

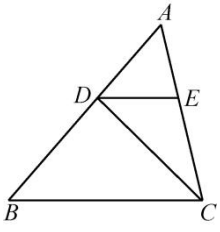
（2）设CD交$\odot O$于点G，试说明G是CD的中点.

21. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=4$，D是AB上的一点（不与点A、B重合），$DE\parallel BC$，交AC于点E. 设$\triangle ABC$的面积为S，$\triangle DEC$的面积为S'.

（1）当D是AB的中点时，求$\dfrac{S'}{S}$的值；

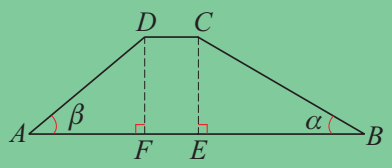
（2）设$AD=x$，$\dfrac{S'}{S}=y$，求y与x的函数表达式，并写出自变量x的取值范围；

（3）根据y的取值范围，探索S'与S之间的大小关系，并说明理由.



（第21题）

第7章　锐角三角函数



$$\tan\beta = \frac{DF}{AF}$$

气球有多高，坝底有多宽……
锐角三角函数可以解决这样的问题 .

1. 测量学校旗杆的高度．

与同学合作，利用卷尺测量出同一时刻你与旗杆在太阳光下的影长，根据你的身高，确定旗杆的高度．

2. 借助测量工具(如卷尺、测角仪等)，请你再设计一种能确定旗杆高度的方案．

本章将利用相似的直角三角形，探索并认识锐角三角函数，并利用锐角三角函数解直角三角形，以及解决一些简单的实际问题．

7.1　正　切

某体育馆为了方便观众，设计了不同坡度的台阶．

观察与思考

1．在图 7－1 中，哪个台阶更陡？

图 7－1

2．在图 7－2 中，哪个台阶最陡？你是如何判断的？

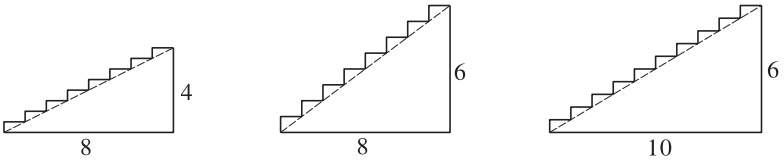


图 7－2

3．比较图 7－3 中的两个台阶，你有什么发现？

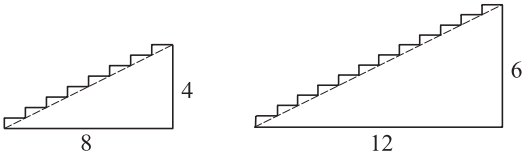


图 7－3

如图 7－4，一般地，如果锐角 A 的大小确定，我们可以作出 Rt$\triangle AB_1C_1$、Rt$\triangle AB_2C_2$、Rt$\triangle AB_3C_3$……

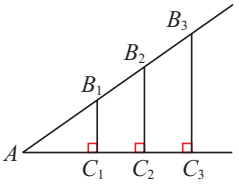


图 7－4

那么有

$\mathrm{Rt}\triangle AB_1C_1 \backsim \mathrm{Rt}\triangle AB_2C_2 \backsim \mathrm{Rt}\triangle AB_3C_3 \backsim \cdots\cdots$

根据相似三角形性质，得

$$\frac{B_1C_1}{AC_1}=\frac{B_2C_2}{AC_2}=\frac{B_3C_3}{AC_3}=\cdots\cdots$$

也就是说，如果直角三角形的一个锐角的大小确定，那么这个锐角的对边与邻边的比值也确定．

如图 7－5，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$．

我们把$\angle A$ 的对边 a 与邻边 b 的比叫做$\angle A$ 的**正切**(tangent)，记作 $\tan A$，即

$$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{a}{b}.$$

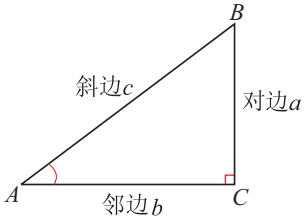


图 7－5

例 1 如图 7－6，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=4$，$AB=5$．求 $\tan A$．

解： 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

根据勾股定理，得

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3,$$

$$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{4}.$$

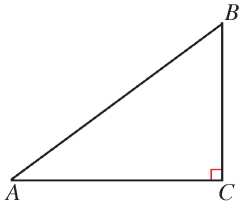


图 7－6

例 2 如图 7－7，在等边三角形 ABC 中，$CD\perp AB$，垂足为 D．求 $\tan A$．

解： 由题意知，$AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}AC$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，

根据勾股定理，得

$$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{2^2-1^2}\cdot AD=\sqrt{3}AD,$$

$$\tan A=\frac{CD}{AD}=\sqrt{3}.$$

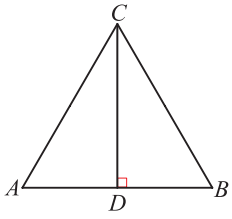


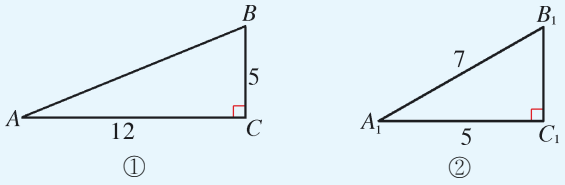
图 7－7

思考与探索

由例 2 知道，$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$．求 $\tan 30^\circ$的值．

练习

1. 求图中各直角三角形锐角的正切值．



（第 1 题）

2. 求 45°角的正切值．

观察与思考

如图 7－8，当一个点从原点 O 出发，沿着 65°线移动到点 P 时，这个点沿水平方向前进了 1 个单位长度，沿垂直方向上升了约 2.14 个单位长度．于是，可知 tan 65°的近似值为 2.14．

用同样的方法，写出下表中各角正切的近似值．

θ	$\tan\theta$
10°	
20°	
30°	
45°	
55°	
65°	2.14

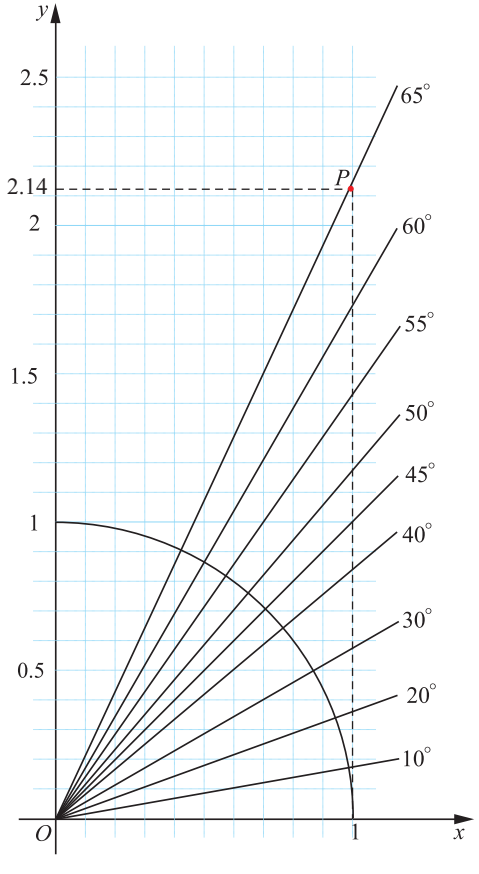


图 7－8

随着锐角 θ 的值增大，$\tan\theta$ 的值怎样变化？

例 3 用计算器求下列各值(精确到 0.01)：

(1) $\tan 65°$；　　(2) $\tan 22°18'$.

解：(1) 依次按键 [tan] [6] [5] [)] [=]，

显示结果为2.144 506 921，即 $\tan 65° \approx 2.14$；

(2) 依次按键 [tan] [2] [2] [°′″] [1] [8] [°′″] [)] [=]，

显示结果为0.410 129 889 5，即 $\tan 22°18' \approx 0.41$.

例 4 在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 40°$，$AC = 10$. 求 BC 的长(精确到 0.01).

解：由题意知，$\tan A = \dfrac{BC}{AC}$，

则 $BC = AC \cdot \tan A = 10 \times \tan 40°$，

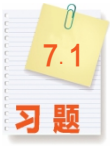
用计算器计算，得 $BC \approx 8.39$.

1. 用计算器求下列各值(精确到 0.01)：

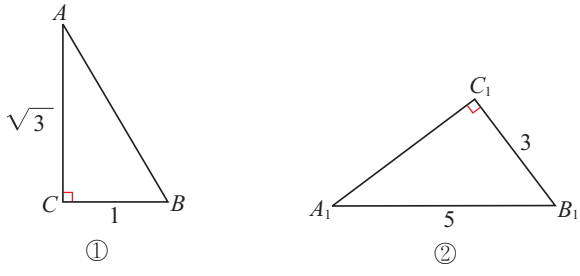
   (1) $\tan 38°$；　　(2) $\tan 51.34°$；

   (3) $\tan 12°6'$.

2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$\angle B = 25°$，$AC = 4$. 求 BC 的长.



1. 求图中各直角三角形锐角的正切值.



(第 1 题)

2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$BC = 4$，$\tan A = \dfrac{2}{3}$. 求 AC 的长.

3. 用计算器求下列各值(精确到 0.01).

   (1) $\tan 15°$；　　(2) $\tan 48°3'$.

4. 在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 30°$，$AC = 34$. 求 BC 的长.

7.2　正弦、余弦

如图 7－9，小明沿着某坡道向上行走了 13 m，他的位置沿垂直方向上升了 5 m.

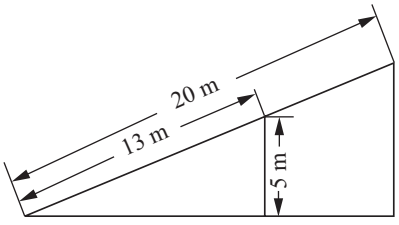


图 7－9

如果小明沿着该坡道行走了 20 m，那么他的位置沿垂直方向上升了多少？行走了 a m 呢？

在上述情形中，小明的位置沿水平方向又分别前进了多少？

根据相似三角形的性质可知，当直角三角形的一个锐角的大小确定时，它的对边与斜边的比值、邻边与斜边的比值也就确定．

如图 7－10，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$.

我们把$\angle A$ 的对边 a 与斜边 c 的比叫做$\angle A$ 的**正弦**(sine)，记作 $\sin A$，即

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}.$$

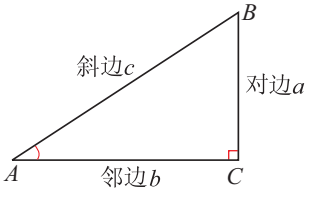


图 7－10

我们把$\angle A$ 的邻边 b 与斜边 c 的比叫做$\angle A$ 的**余弦**(cosine)，记作 $\cos A$，即

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}.$$

在 Rt△ABC 中，$\frac{a}{c}$、$\frac{b}{c}$和$\frac{a}{b}$的值都随$\angle A$ 的大小变化而变化，都随$\angle A$ 的大小确定而唯一确定．$\angle A$ 的正弦、余弦和正切都是$\angle A$ 的**三角函数**(trigonometric function).

例 1 如图 7－11，在等边三角形 ABC 中，求 $\cos B$.

解： 过点 A 作 $AD \perp BC$，垂足为 D.

由题意知，$BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB$.

在 Rt△ABD 中，

$\cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}$.

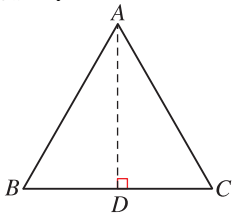


图 7－11

由例 1 可知，$\cos 60° = \frac{1}{2}$，求 $\sin 60°$、$\sin 30°$、$\cos 30°$ 的值.

如图 7－12，当一个点从原点 O 出发，沿着 15°线移动了 1 个单位长度到点 P 时，这个点在垂直方向上升了约 0.26 个单位长度，在水平方向前进了约 0.97 个单位长度，于是，可知 $\sin 15° \approx 0.26$，$\cos 15° \approx 0.97$.

你能写出 $\sin 75°$、$\cos 75°$ 的近似值吗？

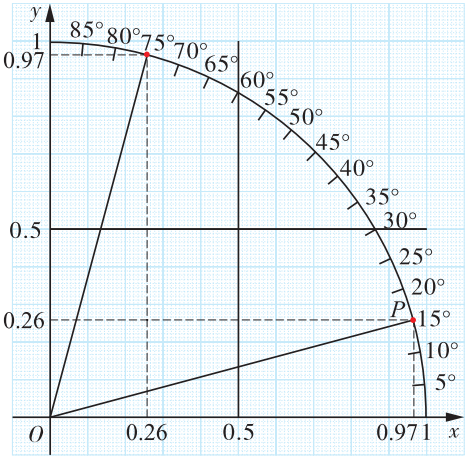


图 7－12

随着锐角 θ 的增大，$\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的值怎样变化？

例 2 用计算器求下列正弦值或余弦值（精确到 0.01）：

（1）$\sin 75°$；　　（2）$\cos 75°$；

（3）$\sin 23°13'20''$.

解：（1）依次按键 sin 7 5) = S⇔D，

显示结果为 0.965 925 826 3，即 $\sin 75° \approx 0.97$；

（2）依次按键 [cos] [7] [5] [)] [=] [S⇔D]，

显示结果为 0.258 819 045 1，即 $\cos 75^\circ \approx 0.26$；

（3）依次按键 [sin] [2] [3] [°′″] [1] [3] [°′″] [2] [0] [°′″] [)] [=]，

显示结果为 0.394 298 367 5，即 $\sin 23^\circ 13' 20'' \approx 0.39$.

练习

1. 如图，$\angle ACB = 90^\circ$，$CD \perp AB$，垂足为 D.

（1）$\sin A = \dfrac{(\quad)}{AC} = \dfrac{BC}{(\quad)}$；

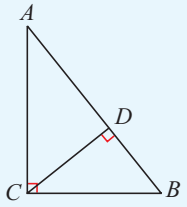
（2）$\sin B = \dfrac{CD}{(\quad)} = \dfrac{(\quad)}{AB}$；

（3）$\cos\angle ACD = \dfrac{CD}{(\quad)}$，

$\cos\angle BCD = \dfrac{(\quad)}{BC}$；

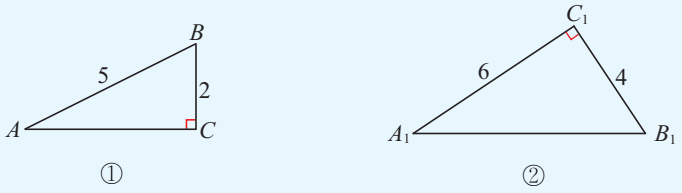
（4）$\tan A = \dfrac{CD}{(\quad)} = \dfrac{(\quad)}{AC}$，

$\tan B = \dfrac{(\quad)}{BD} = \dfrac{AC}{(\quad)}$.



（第 1 题）

2. 求图中各直角三角形锐角的正弦、余弦值.



（第 2 题）

3. 用计算器求下列正弦值或余弦值（精确到 0.01）：

（1）$\sin 36^\circ$；　　（2）$\cos 36^\circ$；

（3）$\sin 12.5^\circ$；　　（4）$\cos 12.5^\circ$.

例 3　如图 7－13，在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90^\circ$，$AC = 12$，$BC = 5$. 求 $\sin A$、$\cos A$、$\sin B$、$\cos B$ 的值.

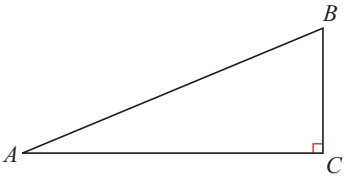


图 7－13

解： 在 Rt△ABC 中，

根据勾股定理，得

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13.$

根据正弦、余弦的定义，得

$\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{5}{13},\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{12}{13},$

$\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{12}{13},\cos B=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{5}{13}.$

例 4 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=15°$，$BC=6$. 求 AB 的长（精确到 0.01）.

解： 由题意知，$\sin A=\dfrac{BC}{AB}$，

则 $AB=\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{6}{\sin 15°}.$

用计算器计算，得 $AB\approx 23.18$.

思考与探索

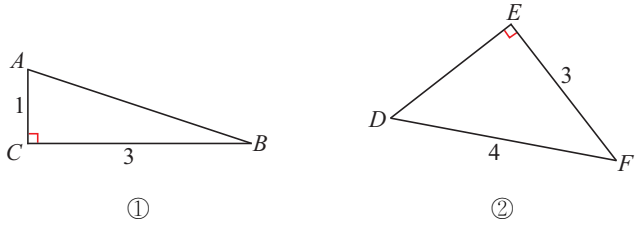
在 Rt△ABC（$\angle C=90°$）中，$\sin A$ 与 $\cos B$、$\cos A$ 与 $\sin B$ 的值有什么关系？

练习

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=8$，$BC=6$. 求 $\sin A$、$\cos A$、$\sin B$、$\cos B$ 的值.
2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=68°$，$AB=4$. 求 BC、AC 的长（精确到 0.01）.

7.2 习题

1. 求图中各直角三角形锐角的正弦、余弦值.



（第 1 题）

2. 用计算器求下列各角的正弦、余弦值(精确到 0.01)：

(1) 15°；　　(2) 72°；

(3) 55°12′；　　(4) 22.5°.

3. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$. 求：

(1) $\cos A$；

(2) 当 $AB=4$ 时，求 BC 的长.

4. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=50°$，$AB=5$. 求 BC、AC 的长.

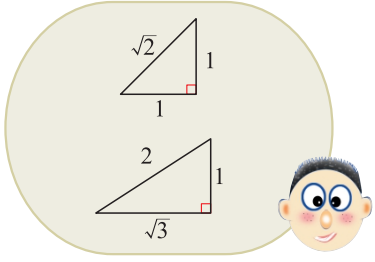
5. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\cos A=\frac{3}{5}$. 求 $\sin A$.

7.3 特殊角的三角函数

请说出 30°、45°、60°角的各三角函数值，并说明理由．

30°、45°、60°角的三角函数值列表如下：

三角函数值 θ / 三角函数	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



例 1 求下列各式的值：

(1) $2\sin 30^\circ - \cos 45^\circ$；

(2) $\sin 60^\circ \cos 60^\circ$；

(3) $\tan 30^\circ + \cos 30^\circ$.

解： (1) $2\sin 30^\circ - \cos 45^\circ = 2\times\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$；

(2) $\sin 60^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$；

(3) $\tan 30^\circ + \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

例 2　求下列等式中的锐角 α：

(1) $2\sin\alpha-\sqrt{2}=0$；　　(2) $\sqrt{3}\tan\alpha-1=0$.

解：(1) 由已知，得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\alpha=45^\circ$；

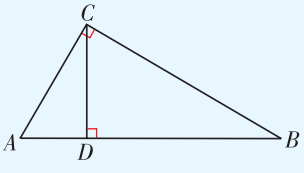
(2) 由已知，得 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\alpha=30^\circ$.

练习

1. 求下列各式的值：

(1) $\tan 45^\circ-\sin 30^\circ\cos 60^\circ$；　　(2) $\frac{\cos 45^\circ}{\tan^2 30^\circ}$.

2. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，垂足为 D，$BC=2$，$BD=\sqrt{3}$. 分别求 Rt△ABC、Rt△ACD、Rt△BCD 中的各锐角.



（第 2 题）

7.3 习题

1. 求下列各式的值：

(1) $2\sin 30^\circ+3\cos 60^\circ-4\tan 45^\circ$；

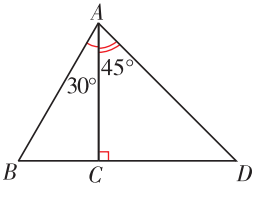
(2) $\cos 30^\circ\sin 45^\circ+\sin 30^\circ\cos 45^\circ$；

(3) $\frac{\cos 60^\circ-1}{\sin 30^\circ-2\tan 45^\circ}$.

2. 求下列等式中的锐角 θ：

(1) $2\cos\theta=1$；　　(2) $2\sin\theta-\sqrt{2}=0$.

3. 如图，AC 是△ABD 的高，$BC=15$，$\angle BAC=30^\circ$，$\angle DAC=45^\circ$. 求 AD.



（第 3 题）

7.4 由三角函数值求锐角

如图 7－14，长 13 m 的笔直滑梯 AB 的高 BC 为 5 m，你能知道该滑梯与地面所成角 A 的大小吗？

在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$AB = 13$，$BC = 5$.

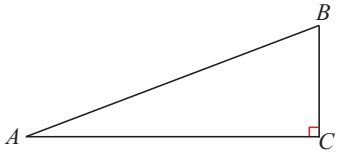


图 7－14

则

$$\sin A = \frac{5}{13}.$$

用计算器可以由一个锐角的三角函数值求得这个角的大小.

依次按键 2nd F sin 5 ÷ 1 3) =，

显示结果为 22.619 864 95，即 $\angle A \approx 22.62°$.

例 1 根据下列三角函数值，求锐角 A（精确到 0.01°）：

（1）$\cos A = \frac{1}{4}$；　　（2）$\tan A = 2$.

解：（1）依次按键 2nd F cos 1 ÷ 4) =，

显示结果为 75.522 487 81，即 $\angle A \approx 75.52°$；

（2）依次按键 2nd F tan 2) =，

显示结果为 63.434 948 82，即 $\angle A \approx 63.43°$.

例 2 在等腰三角形 ABC 中，$AB = AC = 4$，$BC = 6$. 求 $\angle B$（精确到 0.1°）.

解：如图 7－15，过点 A 作 $AD \perp BC$，垂足为 D.

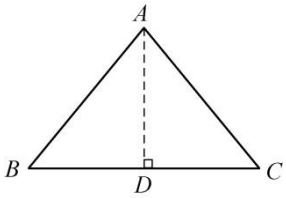


图 7－15

在 Rt△ABD 中，$AB=4$，$BD=\frac{1}{2}BC=3$，

则 $\cos B=\frac{BD}{AB}=\frac{3}{4}$.

用计算器计算，得 $\angle B\approx 41.4°$.

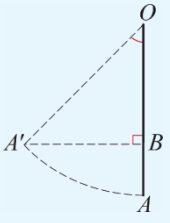
练习

1. 根据下列三角函数值，求锐角 A(精确到 0.01°)：

(1) $\sin A=\frac{1}{4}$；　　(2) $\cos A=0.23$；

(3) $\tan A=10$.

2. 如图，秋千的长 OA 为 3.5 m，当秋千摆动到 OA' 位置时，点 A' 相对于最低点 A 升高了 1 m. 求 $\angle AOA'$（精确到 0.1°).



（第 2 题）

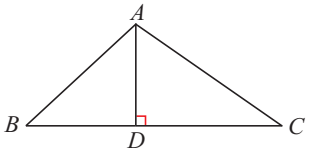
7.4 习题

1. 根据下列三角函数值，求锐角 A(精确到 0.01°)：

(1) $\sin A=0.82$；　　(2) $\cos A=\frac{3}{7}$；

(3) $\tan A=\frac{20}{3}$.

2. 如图，AD 是△ABC 的高，$CD=16$，$BD=12$，$\angle C=35°$. 求 $\angle B$（精确到 1°).



（第 2 题）

7.5 解直角三角形

如图 7－16，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$．$\angle A$、$\angle B$、a、b、c 这 5 个元素之间有怎样的数量关系？

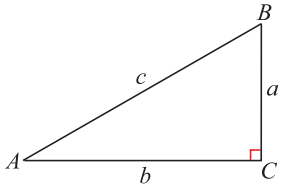


图 7－16

以上 5 个元素之间有以下的数量关系：

（1）三边之间的关系

$$a^2+b^2=c^2\text{（勾股定理）；}$$

（2）锐角之间的关系

$$\angle A+\angle B=90^\circ\text{（直角三角形的两个锐角互余）；}$$

（3）边、角之间的关系

$$\sin A=\frac{a}{c},$$

$$\cos A=\frac{b}{c},$$

$$\tan A=\frac{a}{b}.$$

直角三角形的 2 个锐角和 3 条边共 5 个元素中，需要知道哪几个元素的值，你就能确定其余的未知元素的值．

由直角三角形的边、角中的已知元素，求出所有边、角中的未知元素的过程，叫做解直角三角形．

例 1　在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，$a=5$. 解这个直角三角形.

解： 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，

$\therefore \angle B=90^\circ-\angle A=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.

$\because \sin A=\dfrac{a}{c}$，

$\therefore c=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{5}{\sin 30^\circ}=10$.

$\because \tan B=\dfrac{b}{a}$，

$\therefore b=a\cdot\tan B=5\cdot\tan 60^\circ=5\sqrt{3}$.

例 2　在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$a=104$，$b=20.49$.

(1) 求 c 的值(精确到 0.01)；

(2) 求$\angle A$、$\angle B$ 的大小(精确到 0.01°).

解： (1) 在 Rt△ABC 中，

根据勾股定理，得

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{104^2+20.49^2}$，

用计算器计算，得 $c\approx 106.00$.

(2) 由题意知，$\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{104}{20.49}$，

用计算器计算，得 $\angle A\approx 78.85^\circ$.

$\therefore \angle B=90^\circ-78.85^\circ=11.15^\circ$.

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，根据下列条件解直角三角形（边长精确到 0.1，角度精确到 0.1°）：

(1) $a=9$，$b=6$；

(2) $\angle A=18^\circ$，$c=13$.

例 3　如图 7－17，在△ABC 中，$AC=8$，$\angle B=45^\circ$，$\angle A=30^\circ$. 求 AB.

分析： 因为△ABC 不是直角三角形，因此要设法构造直角三角形.

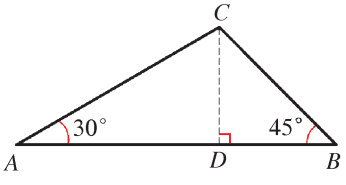


图 7－17

解： 过点 C 作 $CD \perp AB$，垂足为 D.

在 Rt△ADC 中，

$AD = AC \cdot \cos 30^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$，

$CD = AC \cdot \sin 30^\circ = 8 \times \frac{1}{2} = 4$.

在 Rt△BCD 中，

$\because \angle B = 45^\circ$，

$\therefore BD = CD = 4$.

$\therefore AB = AD + DB = 4\sqrt{3} + 4$.

例 4 如图 7－18，⊙O 的半径为 10，求⊙O 的内接正五边形 $ABCDE$ 的边长(精确到 0.1).

解： $\because$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形，

$\therefore \angle AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

过点 O 作 $OH \perp AB$，垂足为 H.

在 Rt△AHO 中，

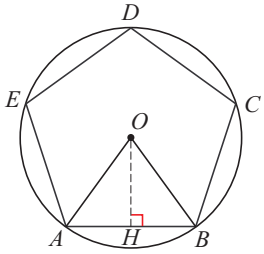


图 7－18

$\because \angle AHO = 90^\circ, \angle AOH = \frac{1}{2}\angle AOB = 36^\circ, OA = 10$，

$\therefore AH = OA \cdot \sin 36^\circ$.

$\therefore$ 正五边形 $ABCDE$ 的边长 $AB = 2AH = 2 \times 10 \times \sin 36^\circ \approx 11.8$.

1. 在▱$ABCD$ 中，$\angle A = 60^\circ$，$AB = 8$，$AD = 6$. 求▱$ABCD$ 的面积.
2. 求半径为 12 的圆的内接正八边形的边长(精确到 0.1).

7.5 习题

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$b=2\sqrt{3}$，$c=4$. 解这个直角三角形.

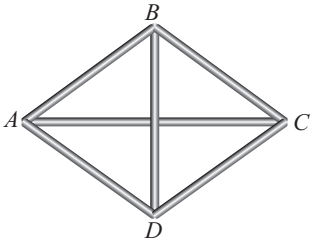
2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$.

(1) 已知 $AB=4$，$\angle B=25^\circ$，求 BC、AC（精确到 0.1）；

(2) 已知 $AB=5$，$BC=4.2$，求 $\angle A$（精确到 0.1°）.

3. 求半径为 20 的圆的内接正三角形的边长和面积(精确到 0.1).

4. 如图，在菱形钢架 $ABCD$ 中，$AB=2$ m，$\angle BAD=72^\circ$，焊接这个钢架约需多长的钢材(精确到0.1 m)?



（第 4 题）

7.6 用锐角三角函数解决问题

锐角三角函数揭示了直角三角形的边与角的关系，在许多实际问题中，我们可以根据其中的数量关系或位置关系找出(或构造出)一个直角三角形，利用锐角三角函数的相关知识解决问题.

问题 1 如图 7－19，水坝的横截面是梯形 $ABCD$，迎水坡 BC 的坡角 α 为 $30°$，背水坡 AD 的坡度 i(即 $\tan\beta$) 为 $1:1.2$，坝顶 $DC=2.5$ m，坝高 4.5 m. 求：

(1) 背水坡 AD 的坡角 β(精确到 $0.1°$)；

(2) 坝底 AB 的长(精确到 0.1 m).

分析： 作梯形 $ABCD$ 的高 CE、DF. 根据题意，在 Rt△AFD 和 Rt△BEC中，可以分别求出 AF 与 BE 的长，从而可求得坝底 AB 的长.

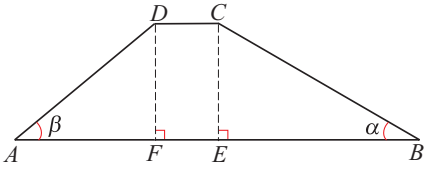


图 7－19

解： 作 $CE\perp AB$，$DF\perp AB$，垂足分别为 E、F.

(1) 背水坡 AD 的坡度 $i=\tan\beta=1:1.2=\frac{5}{6}$.

用计算器计算，得 $\beta\approx 39.8°$.

(2) 在 Rt△BEC 中，

$\alpha=30°$，$\angle BCE=90°-30°=60°$，

$EB=CE\cdot\tan\angle BCE=4.5\times\tan 60°$.

在 Rt△AFD 中，

$\because \frac{DF}{AF}=1:1.2$，

$\therefore AF=1.2DF=1.2\times 4.5=5.4$.

又 $FE=DC=2.5$，

$\therefore AB=AF+FE+EB=5.4+2.5+4.5\times\tan 60°\approx 15.7$.

答： 背水坡 AD 的坡角 β 约为 $39.8°$，坝底 AB 的长约为15.7 m.

拓展与延伸

在问题 1 中，为了提高堤坝的防洪抗洪能力，防汛指挥部决定加固堤坝，要求坝顶 DC 加宽 0.5 m，背水坡 AD 的坡度改为 1∶1.4. 已知堤坝的总长度为 5 km，求该项工程所需的土方(精确到 0.1 m^3).

练习

1. 已知一段公路的坡度为 1∶26，求沿着这条公路每前进 100 m 所上升的高度(精确到 0.1 m).
2. 在坡道两旁种树，要求株距(相邻两树间的水平距离) 为 6 m，测得坡道的坡度为 1∶3.5. 求相邻两树间的坡道距离(精确到 0.1 m).

问题 2　游乐场的大型摩天轮的半径为 20 m，旋转 1 周需要 12 min. 小明从摩天轮的底部(与地面相距 0.3 m)出发开始观光，2 min 后小明离地面多高?

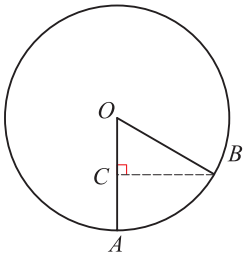


图 7－20

分析： 如图 7－20，用⊙O 表示摩天轮，小明从底部点 A 出发，经过2 min后到达点 B，由题意可求∠BOA 的大小. 如果作BC⊥OA，垂足为 C，在Rt△OCB 中，可以根据 OB 及∠BOA 的大小求得OC，那么就可知道此时小明离地面的高度.

解： 如图 7－20，用⊙O 表示摩天轮，A、B 分别表示小明的出发点和2 min后的到达点. 由题意知，$OB=20$，$\angle BOA=360^\circ\div 6=60^\circ$.

作 BC⊥OA，垂足为 C.

在 Rt△OCB 中，

$$OC = OB \cdot \cos\angle BOC = 20 \times \cos 60^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10,$$

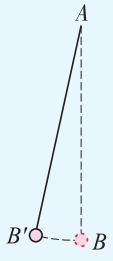
$$AC = AO - CO = 20 - 10 = 10.$$

因为摩天轮底部与地面相距 0.3 m，所以小明离地面的高度应为 10.3 m.

答： 2 min 后小明离地面 10.3 m.

1. 摩天轮转动多长时间后，小明离地面的高度将首次达到15.3 m?
2. 摩天轮转动 1 周，小明在离地面 30.3 m 以上的空中有多长时间?

1. 如图，钟摆的摆长 AB 为 90 cm，当它摆动到 AB' 的位置时，$\angle BAB' = 11^\circ$，这时摆球 B' 相对于最低点 B 升高了多少(精确到 1 cm)?
2. 已知跷跷板长为 4 m，当跷跷板的一端碰到地面时，另一端离地面 1.5 m. 求此时跷跷板与地面的夹角(精确到 0.1°).



(第 1 题)

问题 3 小明在某处利用测角仪观测气球的仰角（从低处观测高处的目标时，视线与水平线所成的锐角）为 27°，然后他沿正对气球方向前进了50 m，此时观测气球的仰角为 40°. 如果测角仪高度为 1 m，那么气球的高度是多少?（精确到 0.1 m）

分析： 如图 7－21，小明分别从点 A、B 处观测气球 C，CD 表示气球与小明观测气球时的水平视线的距离，由题意可知 $\angle CAD$、$\angle CBD$ 分别为 27°和 40°，$AB=50$ m. 要计算 CD，可分别在Rt△ACD 及Rt△BCD中，寻求 CD 与已知量的关系式，再计算 CD.

解： 如图 7－21，点 A、B、C 分别表示小明两次观测点及气球位置. 由题意知，$\angle CAD = 27^\circ$，$\angle CBD = 40^\circ$，$CD \perp AD$，$AB = 50$ m，设 $CD = x$ m.

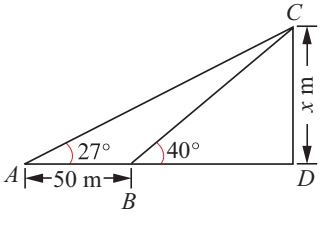


图 7－21

在 Rt△BDC 中，

由 $\tan 40^\circ = \dfrac{CD}{BD}$，得 $BD = \dfrac{x}{\tan 40^\circ}$.

在 Rt△ADC 中，

由 $\tan 27^\circ = \dfrac{CD}{AD}$，得 $AD = \dfrac{x}{\tan 27^\circ}$.

$\because AD - BD = 50$，

$\therefore \dfrac{x}{\tan 27^\circ} - \dfrac{x}{\tan 40^\circ} = 50$.

$\therefore x = \dfrac{50 \cdot \tan 27^\circ \cdot \tan 40^\circ}{\tan 40^\circ - \tan 27^\circ}$.

用计算器计算，得 $x \approx 64.9$.

由于测角仪的高度为 1 m，因此气球的高度约为 65.9 m.

答：气球的高度约为 65.9 m.

思考与探索

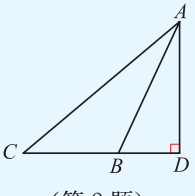
大海中某小岛周围的 10 km 范围内有暗礁．一海轮在该岛的南偏西 55°方向的某处，由西向东行驶了 20 km 后到达该岛的南偏西 25°方向的另一处．如果该海轮继续向东行驶，会有触礁的危险吗？

练习

1. 飞机沿水平直线飞行时，观测正前方停泊在海面上某船只的俯角(从高处观测低处的目标时，视线与水平线所成的锐角）为 15°，面向船只方向继续飞行 10 km 后观测该船只的俯角为 52°．求飞机飞行的高度(精确到1 m).

（第 1 题）

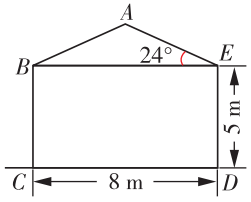
2. 如图，长 4 m 的楼梯 AB 的倾斜角 $\angle ABD$ 为 65°，为了改善楼梯的安全性能，准备重新建造楼梯，使其倾斜角 $\angle ACD$ 为 40°．求调整后的楼梯 AC 的长(精确到 0.1 m).



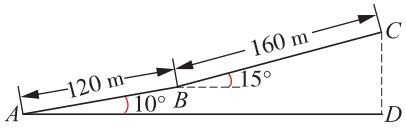
（第 2 题）

7.6 习题

1. 如图，一间屋子的横截面由等腰三角形 ABE 与矩形 $BCDE$ 组成．$CD=8\ \text{m}$，$DE=5\ \text{m}$，$\angle AEB=24°$．求屋顶相对于地面的高度(精确到 0.1 m)．



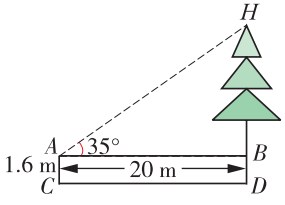
(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，小明从点 A 出发，沿着坡角为 10°的坡道向上走了 120 m 到达点 B，再沿着坡角为 15°的坡道向上走了 160 m 到达点 C．问小明沿垂直方向升高了多少(精确到 0.1 m)?

3. 如图，护林员在离树 20 m 的 A 处观测树顶的仰角为 35°，已知护林员的眼睛离地面 1.6 m．求树的高度(精确到 0.1 m)．

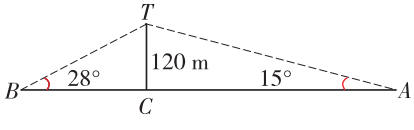


(第 3 题)

4. 飞机的飞行高度为 1 500 m，此时从飞机上看地面控制点的俯角为 $18°24'$．求飞机到控制点的距离(精确到 1 m)．

5. 一艘轮船在 A 处观测灯塔 S 在船的北偏东 38°，轮船向正北航行 15 km 后到达 B 处，这时灯塔 S 恰好在船的正东方向．求灯塔 S 到达 B 处的距离(精确到 0.1 km)．

6. 如图，某塔 TC 高为 120 m，在塔的东、西两侧的点 A、B 分别观测塔顶的仰角为 15°、28°．求 A、B 两点的距离(精确到 0.1 m)．



(第 6 题)

阅读

三角学和它的应用

三角学发展的最初阶段与天文学有着密切的关系．如航海时需要根据天体的位置来准确地确定船只航行的方向．我国古代的天文学很发达，很早就积累了大量测量方面的知识．在公元前 1 世纪左右的数学著作《周髀算经》里，已有关于平面测量术的记载．在我国古代编制历法的典籍中，可以看到，由于节令不同，计算时所采用的表(就是竿子）的影长也不同．这些不同的影长实际构成了一个余切函数表(一个锐角的余切与它的正切互为倒数)．现在我们所采用的三角函数名称正弦、余弦、正切等，也都是沿袭了 16 世纪以来我国古算书上所采用的名称．

三角学的内容早在 18 世纪初就奠定了基础．采用近代形式的叙述，却是在 18 世纪的后半叶．著名的数学家欧拉(1707～1783 年）把三角函数看作线段之比的新观点，使三角学在理论和实际应用方面大大前进了一步．

数学活动

测量建筑物的高度

活动 1　测量底部可以到达的某建筑物的高度．

(1) 准备测量工具．

根据测量底部可以到达的建筑物的高度的需要，准备好测角仪和卷尺(若观测点与被测物之间的水平距离较远可以考虑使用水准仪)．

(2) 确定测量对象．

可以选取学校内的教学楼、办公楼等底部可以到达的建筑物．

(3) 设计测量的方法．

(4) 收集测得的数据，并进行计算．

(5) 填写数学活动记录．

活动 2　参照活动 1 的程序，测量底部不能到达的某建筑物的高度．

小结与思考

1. 如图 7－22，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，其余 5 个元素之间有以下关系：

(1) 三边之间的关系：$a^2+b^2=c^2$；

(2) 锐角之间的关系：$\angle A+\angle B=90^\circ$；

(3) 边、角之间的关系：$\sin A=\dfrac{a}{c}$，

$\cos A=\dfrac{b}{c}$，

$\tan A=\dfrac{a}{b}$.

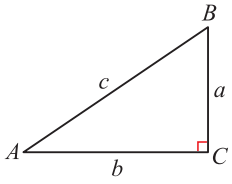


图 7－22

利用以上关系，如果知道这 5 个元素中的 2 个(其中至少有 1 个是边)，那么就可以求出其余的 3 个未知元素．由直角三角形的边、角中的已知元素，求出所有边、角中的未知元素的过程，叫做解直角三角形．

2. 锐角三角函数在生活、生产中有着广泛的应用．如测量、航海、工程技术和物理学中的有关距离、高度、角度的计算，可以转化为解直角三角形的问题加以解决．

3. 锐角变化时，它的三角函数值是如何变化的？

复习题

复习巩固

1. 在△ABC 中，$\angle C=90^\circ$.

(1) 若 $\angle A=45^\circ$，则 $BC:AC:AB=$ _____；

(2) 若 $\angle A=30^\circ$，则 $BC:AC:AB=$ _____.

2. 求下列各式的值：

(1) $\tan^2 60^\circ+4\sin 30^\circ\cos 45^\circ$；　　(2) $\dfrac{\cos 30^\circ}{1+\sin 30^\circ}+\tan 60^\circ$.

3. 用计算器求下列各值(精确到 0.01)：

(1) $\sin 70^\circ$；　　(2) $\cos 24^\circ 12'$；

(3) $\tan 65^\circ$.

4. 根据下列三角函数值，求锐角 α(精确到 0.01°)：

(1) $\sin\alpha=0.365\,7$；　　(2) $\cos\alpha=0.915\,0$；

(3) $\tan\alpha=6$.

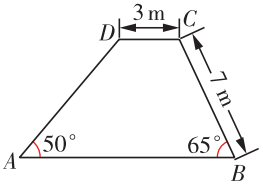
5. 在△ABC 中，$\angle C=90^\circ$.

(1) 已知 $\angle A=30^\circ$，$BC=8$ cm，求 AB 和 AC 的长；

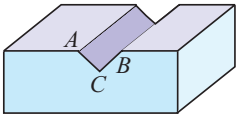
(2) 已知 $\angle A=60^\circ$，$AC=\sqrt{3}$ cm，求 AB 和 BC 的长.

6. 已知等边三角形的边长为 a，求它的面积．

7. 如图，一座堤坝的横截面是梯形 $ABCD$，根据图中给出的数据，求坝高和坝底宽(精确到 0.1 m).



(第 7 题)



(第 8 题)

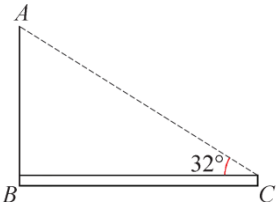
8. 如图，工件上有一个 V 形槽，测得它的上口宽为 30 mm，深为 12 mm. 求 V 形角$\angle ACB$ 的大小(精确到 0.1°).

9. 某商场的自动扶梯长为 8 m，它上升的高度为4.2 m. 求自动扶梯与地面所成锐角的大小(精确到 0.1°).

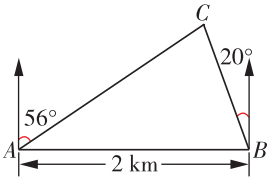
(第 9 题)

10. 秋千吊绳的长度为 3 m. 当秋千摆动时，吊绳向两边摆动的角度均为 30°. 求秋千摆动的最高位置与最低位置的高度差(精确到 0.1 m).

11. 如图，在离楼房 AB 45 m 的 C 处，利用测角仪观测该楼顶部的仰角为 32°. 已知测角仪的高度为 1.2 m，求该楼房的高度(精确到 0.1 m).



(第 11 题)



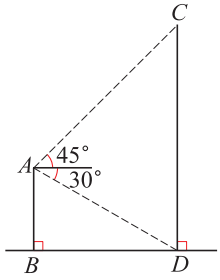
(第 12 题)

12. 如图，在一笔直的海岸线上有 A、B 两个观测站，A 在 B 的正西方向，AB=2 km，从 A 测得船 C 在北偏东 56°的方向，从 B 测得船 C 在北偏西 20°的方向. 求船 C 离海岸线的距离(精确到0.1 km).

灵活运用

13. 已知$\angle A$为锐角，且$\cos A=\frac{5}{13}$. 求$\sin A$、$\tan A$.

14. 如图，平地上一幢建筑物AB与铁塔CD相距60 m，在建筑物的顶部分别观测铁塔底部的俯角为30°、铁塔顶部的仰角为45°. 求铁塔的高度(精确到1 m).



(第14题)

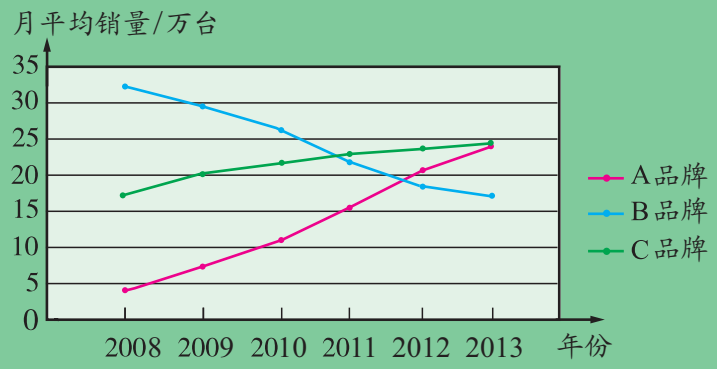
15. 证明：锐角三角形的面积等于两边的长与其夹角的正弦值的乘积的一半.

探索研究

16. 把一根长5 cm的铁丝折成顶角为120°的等腰三角形，求此三角形的各边长(精确到0.1 cm).

17. 探索锐角α的三角函数值之间的关系.

第8章 统计和概率的简单应用



运用统计、概率知识可以帮助我们做出估计、推断、决策.

调查你校九年级学生课外阅读情况：

(1) 制定一个调查方案．

(2) 对调查收集的数据进行整理、描述、分析，获取相关信息，提出合理的建议．

做抛掷一枚质地均匀的骰子的游戏：两人一组，游戏前，每人各选一个数字；每人各掷一次，如果骰子的点数之和与自己所选数字相同，那么得 1 分，先得 10 分者为赢家．

(1) 如果要求两人在“5”或“6”中选一个数字，你认为选“5”或“6”中的哪一个数字获胜的概率较大？为什么？

(2) 为使获胜的概率最大，你认为应选什么数字？说说你的理由．

本章将应用统计、概率知识解决一些简单的实际问题．

8.1　中学生的视力情况调查

通过调查中学生的视力情况，收集有关数据，并对数据进行整理、描述、分析，可以提出保护视力的建议．

你认为可以怎样收集数据？

尝试与交流

5 名学生分别采用如下方式对本地区中学生的视力情况进行调查，并计算视力不良率(视力低于 5.0 为视力不良)：

学生 A 在眼镜店调查了 50 名中学生的视力，并根据调查结果(如图 8－1)，算得这 50 名学生的视力不良率为 96%，由此估计本地区中学生的视力不良率超过 95%.

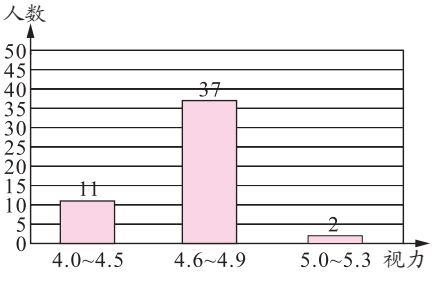


图 8－1

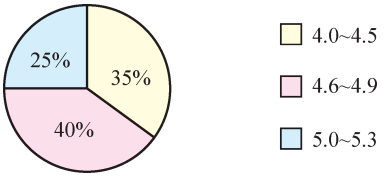


图 8－2

学生 B 在邻居中调查了 20 名中学生的视力，并根据调查结果(如图 8－2)，算得这 20 名学生的视力不良率为 75%，由此估计本地区中学生的视力不良率在 75%左右．

学生 C 调查了所在学校每个年级 10 名学生的视力，并根据调查结果(如图 8－3)，算得这 60 名学生的视力不良率约为 56.7%，由此估计本地区中学生的视力不良率接近 60%.

学生 D 查阅了本地区每个中学医务室检查学生视力的资料，并计算出本地区中学生的视力不良率为 66.1%.

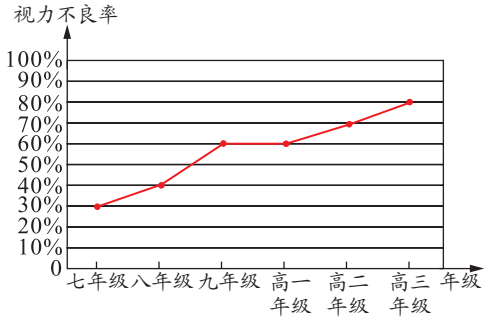
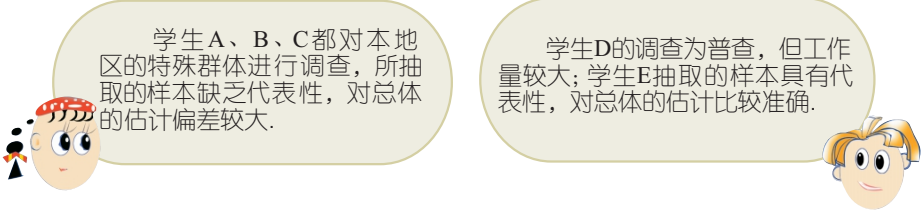


图 8－3

学生 E 随机调查了本地区 10%的中学生的视力，并通过对数据的整理、描述、分析，做出本地区中学生的视力不良率约为 66.2%的估计．

你对这 5 名学生的调查方式有何评价？请与同学交流．



在统计里，我们通常是从总体中抽取样本，并根据样本的某种特性估计总体的相应特性．为了使估计、推断更加准确，抽样时要注意样本的代表性．

要从某校九年级 800 名学生中抽查 50 名学生的视力，怎样抽取才能使样本具有代表性？

我们可以将这 800 名学生依次编号（号码从 1、2、…、800），并将号码写在形状、大小、质地都相同的号签上，放入一个盒子中．抽签时，每次先将号签搅匀再从中随机抽取一个号签（抽出的号签不放回），号签的号码所对应的个体就入选，连续抽取 50 次，便得到一个容量为 50 的样本．

一般地，从个体总数为 N 的总体中抽取容量为 n 的样本（$n < N$），且每次抽取样本时，总体中的每个个体被抽到的可能性相同，这种抽样方法叫做**简单随机抽样**（simple random sampling）．

练习

1. 判断下列抽样调查选取样本的方法是否合适，并说明理由：
   (1) 为了解某地区老年人的健康状况，在该地区医院里调查了 100 名老年病人 1 年内生病的次数；
   (2) 某方便面厂家为了解产品质量情况，在其生产线上每 100 包随机抽取 1 包进行检查；
   (3) 为了解某城市的空气污染情况，调查了该城市某个月的空气污染情况．
2. 某班 50 名学生的身高如下(单位：cm)：

   150，148，159，156，157，163，156，164，156，159，
   169，163，170，162，163，164，155，162，153，155，
   177，165，160，161，166，159，161，157，155，167，
   162，165，159，147，163，172，156，165，157，164，
   152，156，153，164，165，162，167，151，175，162.

   (1) 计算这 50 名学生身高的平均数和方差；
   (2) 用简单随机抽样的方法，抽取样本容量为 20 的两个样本，并分别计算这两个样本的平均数和方差，所得的结果一致吗？与总体的平均数和方差一致吗？

为了解某市七～九年级学生的视力情况，计划采用抽样调查的方法，从该市 2 万名七～九年级学生中抽查 300 名学生的视力，并进行整理分析．考虑到七～九年级学生的视力有较明显的差异，我们采用简单随机抽样的方法从每个年级中各抽查 100 名学生的视力，整理如下：

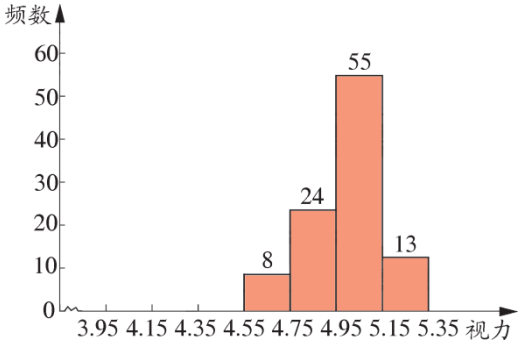
七～九年级各 100 名学生视力统计表

频数 视力 / 年级	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0	5.1	5.2	5.3
七年级	0	0	0	0	0	0	4	4	8	16	25	30	9	4
八年级	0	0	0	0	3	6	5	5	15	8	28	21	6	3
九年级	0	1	2	1	6	5	6	7	12	14	24	15	5	2

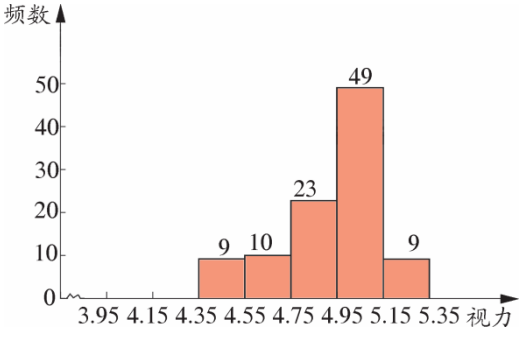
七～九年级各 100 名学生视力频数分布表

视力	七年级		八年级		九年级	
	频数	频率	频数	频率	频数	频率
3.95～4.15	0	0	0	0	1	0.01
4.15～4.35	0	0	0	0	3	0.03
4.35～4.55	0	0	9	0.09	11	0.11
4.55～4.75	8	0.08	10	0.10	13	0.13
4.75～4.95	24	0.24	23	0.23	26	0.26
4.95～5.15	55	0.55	49	0.49	39	0.39
5.15～5.35	13	0.13	9	0.09	7	0.07

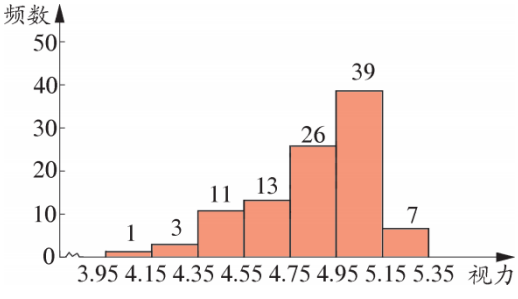
七年级 100 名学生视力频数分布直方图



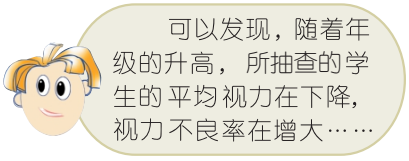
八年级 100 名学生视力频数分布直方图

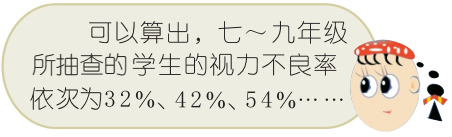


九年级 100 名学生视力频数分布直方图



1. 从上面的视力统计表、视力频数分布表和视力频数分布直方图中，你能获得哪些信息？





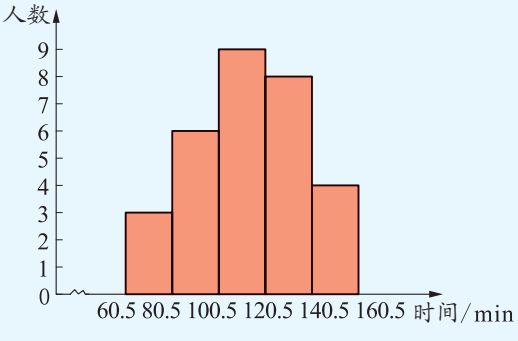
2. 根据获得的信息，你对该市七～九年级学生的视力情况做怎样的分析、推断？

1. 某市环保部门采用简单随机抽样的方法抽查了该市一年内 30 天的空气质量，结果如下：

污染指数(W)	40	60	90	110	120
天数(t)	3	3	9	10	5

其中，$W \leqslant 50$ 时，空气质量为优；$50 < W \leqslant 100$ 时，空气质量为良；$100 < W \leqslant 150$ 时，空气质量为轻微污染．请估计该城市这一年(365 天) 中有多少天空气质量达到良以上．

2. 某研究性学习小组采用简单随机抽样的方法，对本校九年级学生一天中做家庭作业所用时间（单位：min）进行了抽样调查，并把所得数据整理后绘制成频数分布直方图：



（第 2 题）

根据提供的信息回答问题：

(1) 该研究性学习小组抽取的样本容量是多少？

(2) 在所抽查的学生中，一天做家庭作业所用时间超过 120 min的频率是多少？

(3) 调查所得数据的中位数落在什么范围内？

(4) 你对该校九年级学生一天中做家庭作业所用时间做怎样的分析、推断？

8.1 习题

1. 一个总体中有编号为 1、2、3、4、5 的 5 个个体．用简单随机抽样的方法从中抽取 1 个容量为 2 的样本，这样的样本共有多少个？写出所有可能的样本．

2. 在一次中学生知识竞赛中，主办方共拟定了 20 道文学题、15 道历史题、15 道地理题，并规定每名参赛选手要选答 10 道题，其中文学题 4 道、历史题 3 道、地理题 3 道．你认为应如何用简单随机抽样的方法确定这 10 道题？

3. 为检验某种产品的质量，质检员每天需要按时段抽检生产线上的该种产品 30 次，若以 10 min 为一“段”，把 0～24 h 分为 144 个时间段，试用简单随机抽样的方法确定这 30 个时间段（同一个时间段不能被重复抽取）．

4. 某校为了解九年级 480 名学生的数学学习情况，组织了一次检测，并采用简单随机抽样的方法从中抽取了部分学生的检测成绩进行分析，绘制成下表（72 分及以上为“及格”，96 分及以上为“优秀”，36 分以下为“后进”）：

九年级数学检测质量分析抽样统计表

样本容量	平均分	及格率	优秀率	后进率	最高分	最低分	极　差	方　差
	87.5				120	29		334.9

分数段统计									
分数段	0～35.5	35.5～47.5	47.5～59.5	59.5～71.5	71.5～83.5	83.5～95.5	95.5～107.5	107.5～119.5	120
频数	1		3		9		10	6	1
频率		0.04		0.08		0.28		0.12	

（1）填写表中的空格；

（2）估计这 480 名学生本次检测成绩的中位数落在哪个分数段内；

（3）从两个不同角度对本次检测的总体情况做出评价．

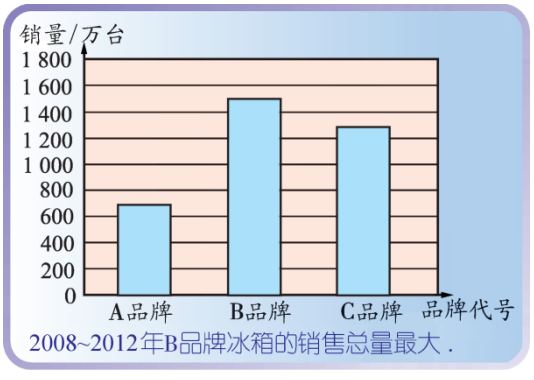
8.2　货比三家

尝试与交流

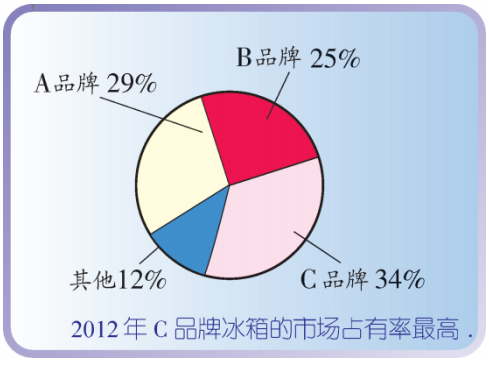
小明家准备购买一台冰箱，下面是小明父母、小明分别收集的 A、B、C 三种品牌冰箱销售的有关数据：

小明父母收集厂家提供的 A、B、C 三种品牌冰箱销售的有关数据及统计图如下：

A 品牌冰箱的销售量逐年上升.



2008~2012年B品牌冰箱的销售总量最大.



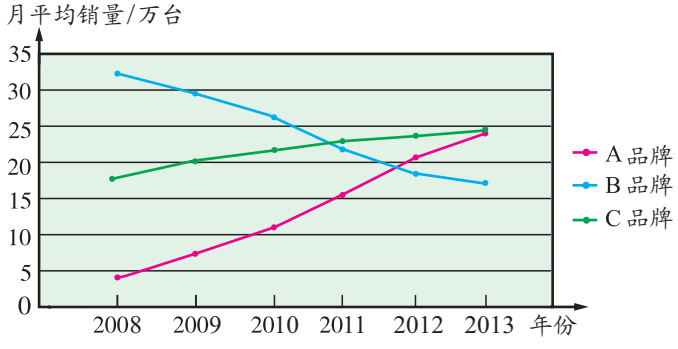
2012 年 C 品牌冰箱的市场占有率最高.

小明通过互联网收集 A、B、C 三种品牌冰箱销售的有关数据，并列出统计表、绘制出折线统计图如下：

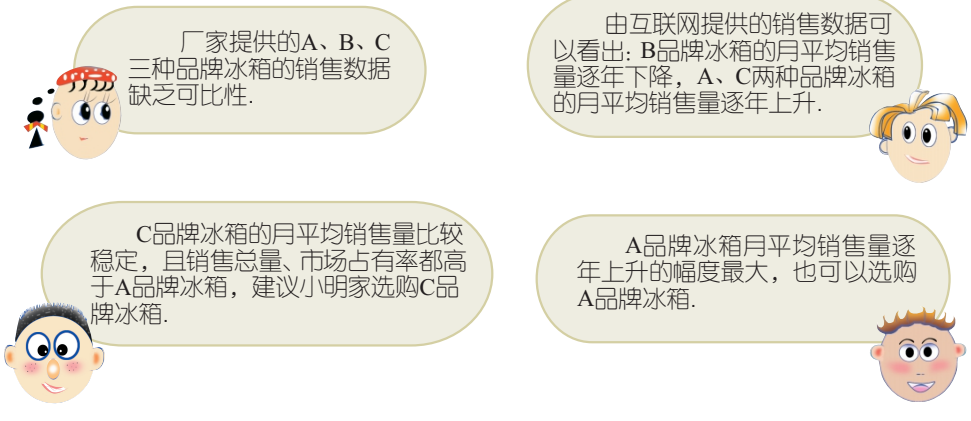
A、B、C 三种品牌冰箱月平均销售量统计表(单位：万台)

	A 品牌	B 品牌	C 品牌
2008 年	4.8	32.42	17.33
2009 年	7.7	29.42	20.33
2010 年	11.25	26.58	22.08
2011 年	15.58	22.17	23.33
2012 年	20.75	18.08	24.08
2013 年	24	17.3	24.33

A、B、C 三种品牌冰箱月平均销售量折线统计图



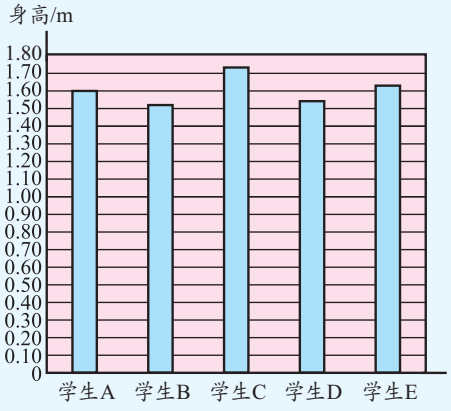
你如何评价这些信息？你建议小明家购买哪种品牌的冰箱？说说你的想法．

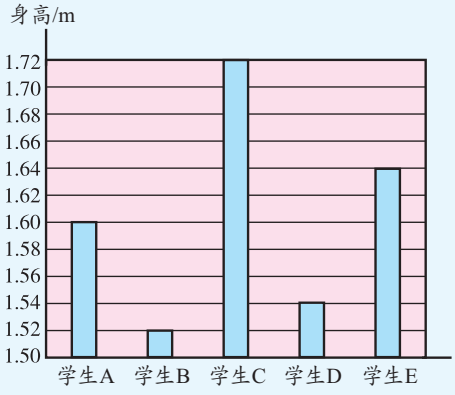


媒体提供的数据很多，从中能够获得许多有用的信息，但有些信

息不一定客观、全面．因此，我们在做出决策时要全面综合考虑各种因素，“货比三家”．

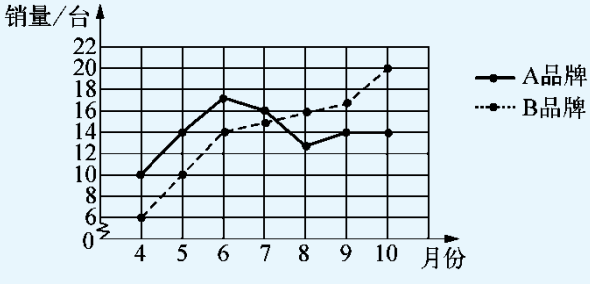
1. 下面是 5 名学生身高的 2 幅统计图，对此你有何评价？





2. 有一则广告称：“有 70% 的人使用本公司的产品．”对这则广告你有什么想法？

3. 某商场统计了 A、B 两种品牌电视机 7 个月的销售情况，并将获得的数据绘制成折线统计图．



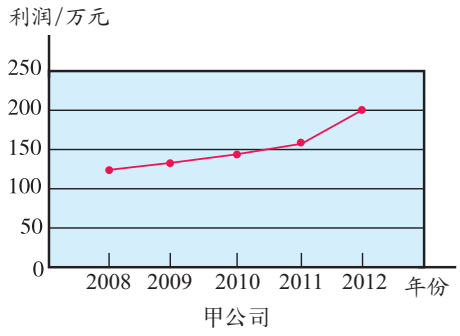
（第 3 题）

(1) 分别求这 7 个月 A、B 两种品牌电视机月销售量的平均数、中位数和方差；

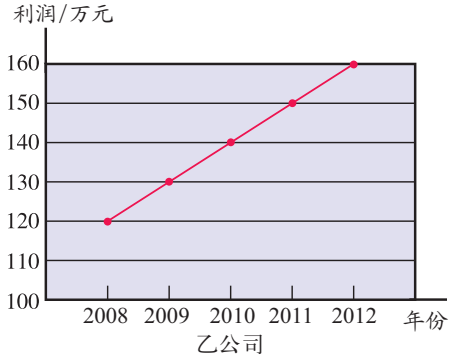
(2) 你对这两种品牌电视机的销售情况做怎样的分析、推断？

8.2 习题

1. 甲、乙两家公司 2008～2012 年的利润统计图如下：



甲公司



乙公司

你认为哪家公司的利润增长较快？为什么？

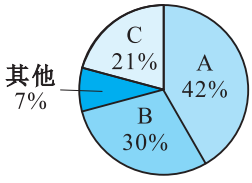
2. 某种产品质量检验的结果如下：

厂家	甲厂	乙厂
被检数	60	6
不合格数	13	1

有人由此认为“乙厂该产品的不合格率较低，更让人放心”．你同意这种说法吗？为什么？

3. 某商场对 A、B、C 三种品牌洗衣机的销售情况进行了调查，并将获得的信息整理如下：

A、B、C 三种品牌洗衣机市场占有率扇形统计图



用户对 A、B、C 三种品牌洗衣机的满意情况统计表

内容	质量			价格			广告		
品牌	A	B	C	A	B	C	A	B	C
满意户数	195	120	118	95	93	94	145	150	95

根据提供的信息，回答问题：

(1) 哪种品牌洗衣机的市场占有率最高？它的主要竞争优势是什么？

(2) 广告对用户选购品牌洗衣机有影响吗？说说你的理由．

8.3　统计分析帮你做预测

思考与探索

我国 1992～2003 年国内生产总值(GDP) 如下：

1992～2003 年中国 GDP 统计表(单位：亿元)

年份	1992	1993	1994	1995	1996	1997
GDP	27 194.5	35 673.2	48 637.5	61 339.9	71 813.6	79 715.0
年份	1998	1999	2000	2001	2002	2003
GDP	85 195.5	90 564.4	100 280.1	110 863.1	121 717.4	137 422.0

数据来源：中国国家统计局

从表中，你能获得哪些信息？

为了解 1992～2003 年我国 GDP 随年份变化而变化的大致发展趋势，我们建立以年份为横坐标、GDP 为纵坐标的平面直角坐标系，并根据统计表中的数值画出对应的点(如图 8－4).

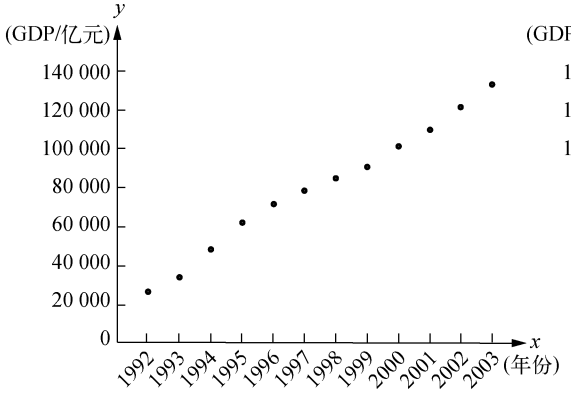


图 8－4

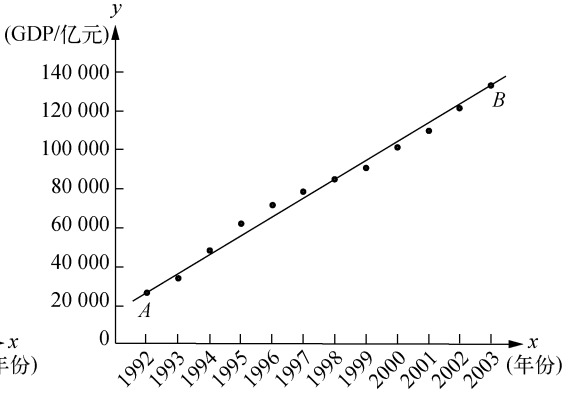


图 8－5

从图 8－4 可以看出，这些点大致分布在一条直线附近.

如果在这些点中恰当地选择两个点，过这两点作一条直线，并尽量使其他的点都在这条直线附近（例如，图 8－5 中的直线 AB)，那么我们就可以用这样的直线近似地表示我国 1992～2003 年 GDP 不断增

长的变化趋势.

设直线 AB 上点的坐标满足函数表达式 $y=kx+b$.

由直线 AB 过点(1992，27 194.5)、(2003，137 422.0)，

可得方程组

$$\begin{cases}1992k+b=27\,194.5,\\2003k+b=137\,422.0.\end{cases}$$

解得 $k\approx 10\,020.7$，$b\approx -19\,934\,039.9$.

于是，1992～2003 年我国 GDP 与年份之间的关系可以近似地用函数表达式 $y=10\,020.7x-19\,934\,039.9$ 表示. 若按照我国 1992～2003 年 GDP 这样的增长趋势，则可以由这个表达式估计 2003 年以后我国的 GDP.

尝试与交流

还可以选用其他的直线来近似地表示我国 1992～2003 年 GDP 不断增长的变化趋势吗?

在日常生活中，类似这样的例子还很多. 例如，学生的身高和体重之间，同一种树的树叶长与宽之间等，都存在着某种关系. 你不妨做一些调查，探索相应的两个量之间的关系.

练习

随机调查了某校 10 名九年级男生的身高和体重，整理如下：

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
体重/kg	49	43	65	46	62	56	60	52	48	69
身高/cm	170	165	177	167	176	172	175	171	168	183

(1) 以体重为横坐标，身高为纵坐标，在平面直角坐标系中画出对应的点，并选用一条适当的直线近似表示这 10 名男生身高与体重之间的变化趋势；

(2) 求这 10 名男生身高与体重之间关系的近似表达式，并由这个表达式估计该校身高 180 cm 的九年级男生的体重情况.

8.3 习题

我国 1949～1999 年间部分年份的人口数据如下：

年份	1949	1954	1959	1964	1969	1974	1979	1984	1989	1994	1999
人口数/百万	542	603	672	705	807	909	975	1 044	1 127	1 199	1 258

数据来源：中国国家统计局

(1) 以年份为横坐标，人口数为纵坐标，在平面直角坐标系中画出对应的点，并选用一条适当的直线近似表示我国 1949～1999 年间部分年份的人口数与年份之间的变化趋势；

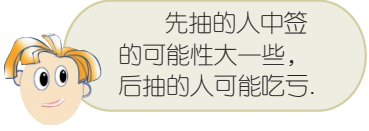
(2) 求我国 1949～1999 年间部分年份的人口数与年份之间关系的近似表达式，并由这个表达式估计我国 2004 年的人口数．

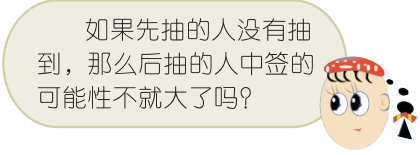
8.4 抽签方法合理吗

生活中，我们有时会用抽签的方法来决定某件事情．

例如，用抽签的方法从 3 名学生中选 1 名出席某场音乐会，我们可以先准备 3 张相同的纸条，并在其中 1 张纸条上画上记号，再把它们放在一个盒子中搅匀，然后让这 3 名学生先后从中各抽取 1 张纸条(抽出的纸条不放回)，抽到纸条上画有记号的学生将出席这场音乐会．

抽签有先有后，先抽的人与后抽的人中签的概率一样吗？





下面，我们运用概率知识解决这个问题．

假设甲、乙、丙 3 名学生抽签的顺序依次为：甲第一，乙第二，丙第三；3 张纸条中，画有记号的纸条记作 A，其余 2 张纸条分别记作 B_1 和 B_2.

用树状图列出所有可能出现的结果：

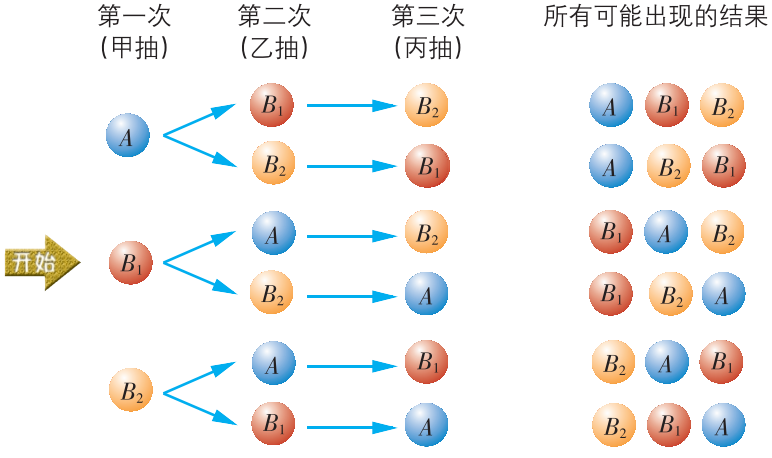


图 8－6

从图 8－6 可以看出，甲、乙、丙依次抽签，一共有 6 种可能出现的结果，并且它们是等可能的．其中，

AB_1B_2 和 AB_2B_1 这两种结果为甲中签，P(甲中签) $=\frac{1}{3}$；

B_1AB_2 和 B_2AB_1 这两种结果为乙中签，P(乙中签) $=\frac{1}{3}$；

B_1B_2A 和 B_2B_1A 这两种结果为丙中签，P(丙中签) $=\frac{1}{3}$.

由此可知，抽签虽然有先有后，但是先抽的人与后抽的人中签的概率是相同的，这样的抽签方法是合理的．

练习

1. 有 A、B、C、D 4 部不同的电影，甲、乙 2 人分别从中任意选择 1 部观看．求甲、乙 2 人选择同 1 部电影的概率．
2. 一只不透明的袋子中装有 2 个红球和 1 个白球，这些球除颜色外都相同．
   (1) 将球搅匀，从中任意摸出 1 个球，记下颜色后放回、搅匀，再从中任意摸出 1 个球，求 2 次都摸到红球的概率；
   (2) 将球搅匀，从中任意摸出 2 个球(相当于第 1 次摸出的球不放回，第 2 次再从余下的球中任意摸出 1 个球)，求摸到 2 个红球的概率．

8.4 习题

1. 用抽签的方法从 3 名学生中选出 2 名参加环保活动．这种方法公平吗？请说明理由．
2. 一只不透明的袋子中装有 2 个白球和 2 个红球，这些球除颜色外都相同，搅匀后甲、乙、丙 3 人依次按顺序从中任意摸出 1 个球(摸出的球不放回)．甲、乙、丙 3 人摸到白球的概率相同吗？为什么？

8.5 概率帮你做估计

数学实验室

一只不透明的袋子中装有若干个白球和红球，这些球除颜色外都相同．做摸球试验：

（1）两人一组，一人从袋中任意摸出 1 个球，另一人记下颜色后将球放回并搅匀，各组连续做 20 次这样的试验；

（2）汇总全班各组数据，并填表：

球的颜色	白色	红色
频数		
频率		

根据试验的结果，你能估计袋子中白球数与红球数的比吗？

思考与探索

假设全班一共做了 400 次这样的摸球试验，摸到白球的频数为 40，且已知袋中有白球 5 个，你能估计袋中红球的个数吗？

由 400 次摸球试验中摸到白球的频数为 40，可知摸到白球的频率为 0.1．当试验次数很大时，用频率作为概率的估计值，可以估计摸到白球的概率为 0.1．

设袋中有红球 x 个，则袋中共有球$(x+5)$ 个，从袋中任意摸出 1 个球是白球的概率为 P（摸到白球）$=\dfrac{5}{x+5}$.

由 $\dfrac{5}{x+5}=0.1$，得 $x=45$.

这样，我们可以估计袋中有红球 45 个.

拓展与延伸

鱼塘内养了若干条青鱼，怎样估计鱼塘内青鱼的条数呢？这个问题与“数学实验室”中的摸球游戏有怎样的联系？

把鱼塘内的青鱼看成“红球”．

往鱼塘内投放若干条白鱼，把白鱼看成“白球”．

我们可以先往鱼塘内投放若干条白鱼，然后进行多次捕捞(每次捕捞后都放回，稍后再次捕捞)，记录捕到的青鱼、白鱼的频数，计算捕到白鱼的频率并把它作为捕到白鱼的概率的估计值，这样，我们就可以估算出鱼塘内青鱼的条数．例如：

设鱼塘内有青鱼 N 条，往鱼塘内投放白鱼 60 条，由多次捕捞、记数(每次捕捞后都放回，稍后再次捕捞)，算得捕到白鱼的频率为$\frac{1}{24}$，并把它作为捕到白鱼的概率的估计值，则由 $P(\text{捕到白鱼})=\frac{60}{N+60}=\frac{1}{24}$，得 $N=1\,380$. 这样，我们可以估计该鱼塘内有青鱼 1 380 条．

我们也可以先从鱼塘内捕捞一些青鱼(如 60 条)，并给每条青鱼做上记号(把这些青鱼看成“白鱼”)，用上面的方法同样可以估计出该鱼塘内青鱼的条数．

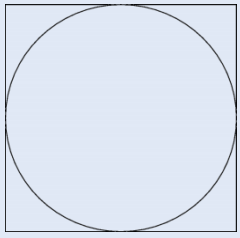
在科学研究中，生物学家常常用上述方法估计某个种群的数量．例如，某地区野鹿的只数，某山区某种鸟的数量，等等．

1. 一只不透明的袋子中共装有红球、黄球和蓝球 360 个，这些球除颜色外都相同．小明每次从中任意摸出 1 个球，记下颜色后将球放回并搅匀，通过多次重复试验，算得摸到红球、黄球和蓝球的频率分别是 25%、35%和 40%. 试估计这只袋子中 3 种颜色的球的数目．
2. 为估计鱼塘中鱼的数量，先从鱼塘中捕捞 30 条鱼做上标记，然后放回鱼塘．经过一段时间，待有标记的鱼完全混合于鱼群后，再从中多次捕捞，并算得平均每 200 条鱼中带有标记的鱼有 5 条．试估计该鱼塘中鱼的数量．

读一读

估计圆周率 π 的值

圆周率 π 是无理数，它的值为 3.141 592 653 589 793 238 462 643 383…. 圆周率 π 在数学和其他学科中有着重要作用，从古到今世界各国数学家都曾孜孜不倦地寻求过 π 值的计算方法. 下面我们通过试验，应用统计与概率知识来估计它的值.



在桌面上放一张画有 30 cm×30 cm 的正方形及其内切圆的白纸(如图)，随机地将一把大米撒到白纸上，计算落在圆内的米粒数 m、落在正方形内的米粒数 n 和相应的频率 $\frac{m}{n}$. 每人做 3 次，汇总全班结果.

在“等可能条件下的概率”一章中，我们通过“阅读”知道：设试验结果落在某区域 S 中每一点的机会均等，如果把“试验结果落在 S 中的一个小区域 M 中”记为事件 A，那么 $P(A)=\frac{M\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}$. 于是，“米粒落在圆内”这个事件(记为事件 A)发生的概率 $P(A)=\frac{\pi\times15^2}{30\times30}=\frac{\pi}{4}$.

我们还知道，当试验次数很大时，事件发生的频率可以作为这个事件发生的概率的估计值. 这样，我们可以用 $\frac{m}{n}$ 来估计 $\frac{\pi}{4}$，从而求得圆周率 π 的估计值.

同学们不妨自己做一做这样的试验.

8.5 习题

1. 某种绿豆在相同条件下的发芽试验结果如下：

每批粒数 n	2	5	10	50	100	500	1 000	1 500
发芽的频数 m	2	4	9	44	92	463	928	1 396
发芽的频率 $\frac{m}{n}$	1	0.8	0.9	0.88	0.92	0.926	0.928	0.931

一般地，在相同条件下，5 000 粒该种绿豆大约有多少粒不能发芽？

2. 生物学家估计某一地区的野鹿只数时，常采用“捉放捉”的方法，即先捕捉野鹿 n 只，分别给它们做上记号，然后放归；一段时间后，重新捕捉一些野鹿作为样本．如果多次这样捕捉到的野鹿中平均每 m 只有 a 只带有记号，试估计该地区野鹿的只数(用含 m、n、a 的代数式表示).

3. 一只不透明的袋子中装有若干个白球和红球，这些球除颜色外都相同．某课外学习小组做摸球试验：将球搅匀后从中任意摸出 1 个球，记下颜色后放回、搅匀，不断重复这个过程，获得数据如下：

摸球的次数 n	200	300	400	1 000	1 600	2 000
摸到白球的频数 m	116	192	232	590	968	1 202
摸到白球的频率 $\frac{m}{n}$						

(1) 填写表中的空格；

(2) 当摸球次数很大时，摸到白球的概率的估计值是多少？

(3) 若已知袋中有白球 24 个，试估计袋中红球的个数．

8.6 收取多少保险费才合理

奖券中奖的概率为 0.01．虽然我们不能断定，在 100 张奖券中必有 1 张中奖，但是我们可以说，当购买的奖券数很大时，在 100 张一组的奖券中，平均会有 100×0.01 张，即 1 张中奖．

类似地，一名篮球运动员罚球命中的概率是 0.8，我们可以说，当罚球次数很大时，在 10 次一组的罚球中，该运动员平均会有 10×0.8 次，即 8 次投中．

……

一般地，如果随机事件 A 发生的概率是 $P(A)$，那么在相同条件下重复 n 次试验，事件 A 发生的次数的平均值为 $n\times P(A)$.

假设某航班平均每次约有 100 名乘客，飞机失事的概率 $p=0.000\,05$. 一家保险公司要为乘客保险，承诺飞机一旦失事，将向每名乘客赔偿人民币 40 万元．平均来说，保险公司应该如何收取保险费呢？

设该保险公司向每名乘客收取保险费 x 元，则在 n 次飞行中共收取保险费 $100nx$ 元．

由在 n 次飞行中，飞机平均失事 np 次，平均赔偿 $400\,000\times100\times np$ 元，保险公司必须保证收入不小于支出，可得

$$100nx\geqslant 40\,000\,000np,$$

即

$$100nx\geqslant 40\,000\,000\times n\times 0.000\,05.$$
$$100nx\geqslant 2\,000n.$$
$$x\geqslant 20.$$

所以该保险公司向每名乘客收取的保险费应不低于 20 元．

在实践中，飞机失事的概率现已远远低于 0.000 05，保险公司向每名乘客收取 20 元保险费，平均来说，对保险公司是非常有利的．

要想更加准确地讨论保险业中遇到的类似问题，还需要更进一步学习概率知识．由此不难看出，概率论也是保险业健康发展的重要理论基础．

练习

1. 某奖券的中奖率是 1%，买 100 张奖券，一定会中奖吗？
2. 一批电子产品的抽样合格率为 75%，当购买该电子产品足够多时，平均来说，购买多少个这样的电子产品，可能会出现 1 个次品？
3. 如果事件 A 发生的概率是 $\frac{5}{100}$，那么下列推断，哪几个是正确的？
   (1) 做 100 次这种试验，事件 A 必发生 5 次；
   (2) 大量重复做这种试验，事件 A 平均每 100 次发生 5 次；
   (3) 做 100 次这种试验，事件 A 不可能发生 6 次.

8.6 习题

1. 某车间生产的零件不合格的概率为 $\frac{1}{1\,000}$. 如果每天从他们生产的零件中任取 10 个做检验，那么在大量重复检验中，平均来说，多少天会查到 1 个次品？
2. 某商场为吸引顾客，设立了一个可以自由转动的转盘，并规定：每购买 100 元商品可以获得一次转动转盘的机会；如果转盘停止转动时，指针正好落在红、绿、黄区域，那么顾客可以分别获得 80 元、30 元、10 元购物券，否则不获奖；如果不愿转转盘，那么可以直接获得 10 元购物券．设转盘停止转动时，指针正好落在红、绿、黄区域的概率依次为 0.1、0.15、0.25.
   (1) 当转盘转动次数很大时，平均来说，每转动转盘 1 次所获购物券的金额是多少？
   (2) 小明在家也做了一个同样的试验，转动转盘 10 次后共得购物券 90 元．据此，小明认为，还是直接领取 10 元购物券合算．你同意他的说法吗？
3. 某航空公司的保险合同上有这样一个条款：飞机一旦失事，将向每名乘客赔偿人民币 50 万元，但保险公司需向每名乘客收取保险费 20 元．如果该航空公司航班平均每次约有 120 名乘客，那么平均来说，当飞机失事的概率不超过多少时，才能保证保险公司的收入不小于支出？

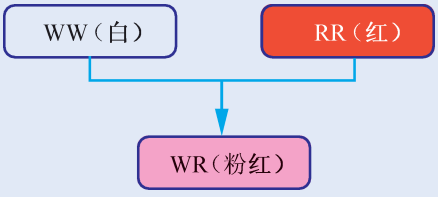
阅读

概率帮你解释实验数据

由第一代开白花的纯种豌豆和开红花的纯种豌豆彼此授粉，杂交所得到的种子进行培育便得到开粉红花的第二代杂种豌豆；再由第二代杂种豌豆彼此授粉，杂交所得到的种子进行培育便得到第三代豌豆．在这第三代豌豆中，有开白花的，也有开粉红花、红花的．

据史料记载，在种植的 564 株第三代豌豆中，开白花的有 141 株，开粉红花的有 291 株，开红花的有 132 株．人们不难看出，实验所得出的 3 个数字之比近似等于 1∶2∶1．怎样解释这一现象呢？

假设第一代开白花的纯种豌豆的基因是 WW，第一代开红花的纯种豌豆的基因是 RR，则第二代杂种豌豆的基因是 WR.



再由第二代杂种豌豆彼此授粉会出现如下可能的结果：

	W	R
W	WW（白）	WR（粉红）
R	RW（粉红）	RR（红）

这 4 种结果是等可能的．

因此，P(开白花) $=\frac{1}{4}$，P(开粉红花) $=\frac{2}{4}$，P(开红花) $=\frac{1}{4}$.

所以在第三代豌豆中，开白花的株数∶开粉红花的株数∶开红花的株数 $=\frac{1}{4}:\frac{2}{4}:\frac{1}{4}=1:2:1$.

上面的解释其实就是奥地利遗传学家孟德尔(Johann Gregor Mendel，1822～1884 年）于 1865 年发表的论文的基本想法．

想一想，生活中还有类似的现象吗？你能解释这些现象吗？

数学活动

香烟浸出液对种子发芽的影响

吸烟有害人类健康，香烟对植物的生长是否也有害呢？下面我们做一个“香烟浸出液对种子发芽影响”的实验．

实验材料：绿豆若干，清水若干，香烟浸出液 A（2 支香烟浸于 200 mL 清水中），香烟浸出液 B（3 支香烟浸于 200 mL 清水中），香烟浸出液 C（4 支香烟浸于 200 mL 清水中）．

每位学生将绿豆四份(每份 50 粒)分别浸于清水、香烟浸出液 A、香烟浸出液 B、香烟浸出液 C 中，并填表：

发芽数目 溶液 / 日期	清水	香烟浸出液 A	香烟浸出液 B	香烟浸出液 C
第一天				
第二天				

（1）汇总全组实验数据，分别计算第一天和第二天各种不同溶液中种子发芽数的平均数和方差；

（2）汇总全班实验数据，分别计算第一天和第二天各种不同溶液中种子发芽数的平均数和方差；

（3）香烟浸出液浓度对绿豆发芽率有什么影响？如果再重复这个实验，实验数据是否一致？

（4）选取其他种子（如黄豆）再做一次类似实验；

（5）香烟浸出液浓度对种子发芽率有什么影响？怎样解释这种现象？

小结与思考

1．数据是蕴涵信息的．收集、整理、描述、分析数据有助于我们从数据中获取信息，帮助我们做出估计、推断、决策，解决日常生活中的一些问题．你能举例说明吗？

2．在统计里，我们通常是从总体中抽取样本，并对样本数据进行整理、描述、分析，目的是获得样本的某种特性，从而根据样本特性去估计总体的相应特性．

从局部推断整体是统计学的一个基本思想．一方面，因为局部是整体的一部分，所以局部的特性在某种程度上能反映整体的相应特性；另一方面，局部

的特性又不能精确无误地反映整体的相应特性，因此通过抽样（局部）对总体（整体）做出估计、推断，要注意样本的容量及其代表性．

“简单随机抽样”是最常用的一种抽样方法，其特点是抽取样本时总体中的每个个体被抽到的可能性相同．你能结合具体实例说说如何运用“简单随机抽样”的方法从总体中抽取样本吗？

3. 概率就在我们周围，概率可以帮助我们解决一些实际问题．

抽签有先有后，对各人公平吗？中奖率为$\frac{1}{1\,000}$的彩票，买 1 000 张一定中奖吗……通过“统计和概率的简单应用”的学习，我们澄清了日常生活中的一些错误认识．

你还能再举出这样的例子吗？

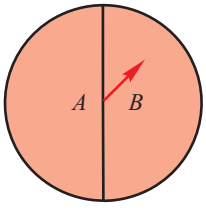
4. 概率可以帮助我们解释现象、做出估计和决策．

(1) 你能利用概率知识解释“为什么篮球不容易连投连中”吗？

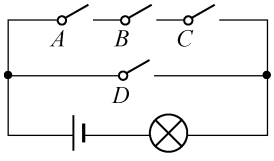
(2) 你能设计一个方案估计某山区某种鸟的数量吗？

复习巩固

1. 某牙膏厂的广告称：“据调查统计，使用本厂牙膏可以使蛀牙率减少 30%.”你怎样看待这则广告？
2. 如果你班 50 名学生中有 2 名学生的生日相同，那么能说明每 50 名学生中有 2 名学生生日相同的概率为 1 吗？如果你班 50 名学生中没有 2 名学生的生日相同，那么能说明每 50 名学生中有 2 名学生生日相同的概率为 0 吗？
3. 如图，转盘被分成 2 个半圆．甲、乙 2 人玩转盘游戏，规则如下：转动转盘 2 次，当转盘停止转动时，如果指针所落半圆内的字母相同，那么甲得 1 分；如果指针所落半圆内的字母不同，那么乙得 1 分；做 10 次这样的游戏，得分高的为赢家．你认为这个游戏规则对双方公平吗？为什么？



（第 3 题）



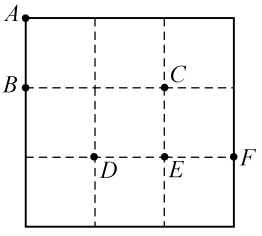
（第 4 题）

4. 如图，电路图上有 A、B、C、D 4 个开关和 1 个小灯泡，闭合开关 D 或同时闭合开关 A、B、C 都可以使小灯泡发亮．

(1) 任意闭合其中的 1 个开关，小灯泡发亮的概率是多少？

(2) 任意闭合其中的 2 个开关，小灯泡发亮的概率是多少？

5. 如图，在 3×3 的正方形网格中，点 A、B、C、D、E、F 都是格点．



（第 5 题）

(1) 从 A、D、E、F 四点中任意取一点，以这点及点 B、C 为顶点画三角形，求所画三角形是等腰三角形的概率；

(2) 从 A、D、E、F 四点中任意取两点，以这两点及点 B、C 为顶点画四边形，求所画四边形是平行四边形的概率．

6. 将 A、B、C、D 四人随机分成甲、乙两组参加乒乓球双打比赛．求下列事件发生的概率：

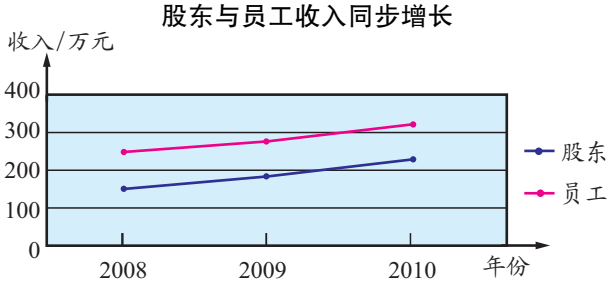
(1) A 在甲组；

(2) A、B 都在甲组．

7. 某公司有股东 5 人，员工 100 人，从 2008 年到 2010 年 3 年间的收入情况如下：

年份	股东总收入/万元	员工总收入/万元
2008	150	250
2009	180	275
2010	225	312

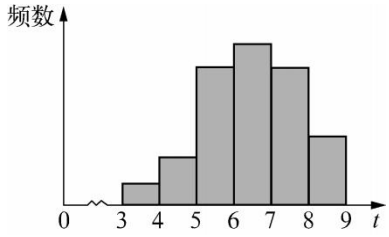
公司股东画出了下面的统计图：



怎样评价这张统计图？谈谈你的想法．

8. 某校课外活动小组采用简单随机抽样的方法，对本校九年级学生一周内平均每天的睡眠时间 t（单位：h）进行了调查，并将所得数据

整理后绘制出频数分布直方图(如图). 设图中从左到右表示不同睡眠时间的频率依次为 0.04、0.08、0.24、0.28、0.24、0.12，睡眠时间 4～5 h 的频数为 4(每组只含最小值，不含最大值).



(第 8 题)

(1) 该课外活动小组抽取的样本容量是多少?

(2) 样本中，睡眠时间在哪个范围内的人数最多? 该范围的人数是多少?

(3) 设该校有九年级学生 900 名，合理的睡眠时间范围为$7\leqslant t<9$，你对该校九年级学生的睡眠时间做怎样的分析、推断?

9. 某年级 140 名学生的体重如下(单位：kg)：

49，48，43，52，62，74，43，51，46，47，51，45，50，46，
52，54，50，58，55，58，48，48，53，49，56，55，56，43，
54，68，47，61，51，44，41，49，53，52，49，52，62，58，
52，54，50，47，66，46，47，44，72，55，43，60，51，41，
48，49，43，52，63，44，41，47，48，49，55，53，58，50，
50，43，60，61，52，50，42，44，46，67，47，66，46，47，
69，48，43，50，50，43，46，47，44，42，55，56，55，56，
43，54，49，56，55，56，65，43，60，51，41，48，43，52，
62，46，52，54，50，58，58，52，49，48，43，50，50，47，
44，42，55，63，60，48，43，50，50，43，49，53，52，49.

(1) 用计算器或计算机计算总体的平均数、方差(精确到 0.01)，并绘制频数分布直方图；

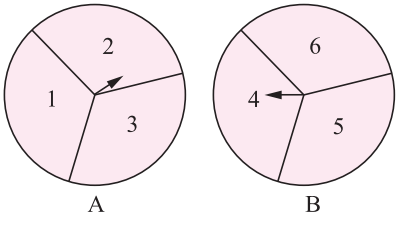
(2) 用简单随机抽样的方法，从上述数据中抽取容量为 10 的两个样本，并分别计算这两个样本的平均数、方差，所得的结果一致

吗？与总体的平均数、方差一致吗？如果抽取容量为 20 的样本呢？

（3）通过以上的抽样和计算，你有什么发现？请与同学交流．

灵活运用

10. 如图，转盘 A、B 中各个扇形的面积都相等，且分别标有数字．小明和小丽玩转盘游戏，规则如下：分别转动转盘 A、B，当转盘停止转动时，将指针所落扇形内的数字相乘，若积为 3 的倍数，小明得 2 分；若积为 5 的倍数，小丽得 3 分；得分高的为赢家．这个游戏规则对双方公平吗？如果公平，请说明理由；如果不公平，请修改规则，使游戏对双方公平．



（第 10 题）

11. 某商场为某品牌冰箱举办有奖促销活动，聘请甲、乙 2 名员工分别设计抽奖方案，要求是：顾客每购买 1 台该品牌冰箱可获得 1 次抽奖机会，其中中大奖的概率为 0.1，中小奖的概率为 0.9．甲员工给出的设计方案是：准备 10 张相同的纸条，并在其中 1 张纸条上画上记号，把它们放在 1 个盒子中，搅匀后从中任意抽取 1 张纸条，抽到纸条上画有记号的顾客中大奖，否则中小奖；乙员工给出的设计方案是：在 1 个盒子中放入 2 个红球和 3 个白球，这些球除颜色外都相同，搅匀后从中任意摸出 2 个球，摸到 2 个红球的顾客中大奖，否则中小奖．

（1）甲、乙 2 名员工的设计方案符合商场的要求吗？为什么？

（2）请举出一些事件，它们发生的概率都是 0.1.

12. 甲、乙、丙 3 名学生各自随机选择到 A、B 2 个书店购书．

（1）求甲、乙 2 名学生在不同书店购书的概率；

（2）求甲、乙、丙 3 名学生在同一书店购书的概率．

探索研究

13. 设 $y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$，求证：当 x 是 a_1、a_2、…、a_n 的平均数时，y 的值最小．

14. 甲、乙、丙 3 人间相互传球．假设他们相互间传球是等可能的，并且由甲开始传球．

(1) 经过 2 次传球后，球仍回到甲手中的概率是多少？经过 3 次传球后呢？

(2) 探索：经过 4 次传球后，球传到甲、乙、丙 3 人手中的概率各是多少？

(3) 猜想：经过 n 次传球后，球传到甲、乙、丙 3 人手中的概率之间的大小关系．

15. 全班分为 4 个小组，以小组为单位，合作测量全班同学的身高和度(tuǒ)长(两臂向左、右方向水平伸直，两手中指指尖之间的距离)．

(1) 测量、记录小组每位成员的身高和度长，并分别计算小组同学的身高、度长的平均数和方差；

(2) 汇总全班每个小组的数据，并分别计算全班同学的身高、度长的平均数和方差；

(3) 你们小组同学的身高、度长的平均数和方差能代表全班同学的身高、度长的平均数和方差吗？

(4) 根据收集的数据，探索身高和度长之间的关系．

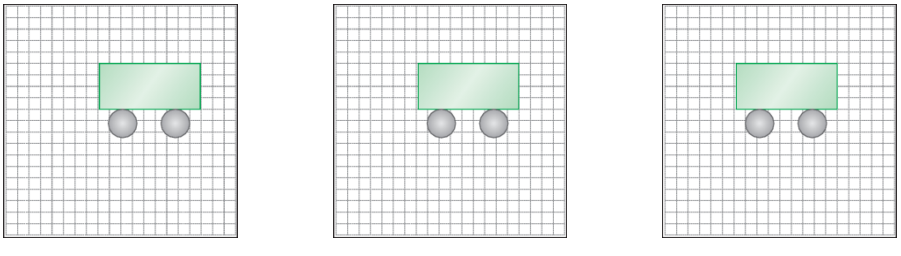
课题学习

制作“动画片”

一个静态物体的两幅画面，按一定时间依次呈现，使人觉得是一个动态的物体，即同一个物体从一个位置移动到另一个位置．依据这一现象可以制作动画片．

最早的动画片都是手画的，需要大量的画师进行创作，现在大量的动画片都是利用数字图像，即利用计算机来创作的．动画片中的人与物“动”起来的效果，则是利用画面上图形的位置变化产生的．

如下图，在 20×20 的方格纸中，小车依次向左平移一格，连续的若干幅画装订在一起，快速翻动，你会发现小车在“向左开动”．



操作与思考

分小组制作动画片：确定一个主题，在大小相同的 20×20 的方格纸上相应地制作一些图画（至少 24 幅），把这些图画装订成一本小画册．快速翻动这本小画册，达到你设计的效果了吗？

推荐“主题”：

1. 一个慢慢升起的气球．

2. 点动成线：画反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 在第一象限内的一支图像．在这支图像上从左到右依次取 24 个点，第一幅画第一个点，后面的每幅画都比前一幅画多画一个点．

1. 交流各组的作品．

2. 如果连续的若干幅画的图形依次按比例缩小或放大，这样制作的动画片会有怎样的效果？

3. 试制作动画片：一艘渐渐远去的小船．

数学活动评价表

活动名称	校园景观设计	活动时间	
参加者			
自我评价	1. 你能根据景观设计要求，求出抛物线形拱桥的函数表达式吗？ 2. 你能根据函数表达式求得施工中各支撑柱的高度吗？你有没有从同学的意见中得到启发？ 3. 你能制作抛物线形拱桥模型吗？能与同学分享你的制作过程吗？ 4. 通过活动，你对生活与数学的联系，数学在解决实际问题中的作用有哪些新的体会？		
同学或小组评价			
老师评语			

数学活动评价表

活动名称	测量两地间的距离		活动时间	
活动形式	以小组为单位		小组成员	
测量数据	第 1 次	第 2 次	第 3 次	平均值
自我评价	1. 在测量过程中遇到了哪些问题？你和小组同学是如何解决的？ 2. 活动中，你和小组同学是如何分工合作的？ 3. 测量中，是否产生过误差？你能分析产生误差的原因吗？ 4. 你能运用图形相似的知识解释课本提供的测量方法的合理性吗？通过活动，你感受到数学与生活的联系吗？			
同学或小组评价				
老师评语				

数学活动评价表

<table>
<tr><td colspan="2">活动名称</td><td colspan="2">测量建筑物的高度</td><td>活动时间</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">活动形式</td><td colspan="2">以小组为单位</td><td>小组成员</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">测量
数据</td><td>第 1 次</td><td>第 2 次</td><td>第 3 次</td><td>平均值</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>自
我
评
价</td><td colspan="5">1. 你和小组同学测量时选择了怎样的建筑物？测得了哪些数据？利用这些数据能计算出建筑物的高度吗？请举例说明.
2. 活动中遇到什么困难？你和小组同学是如何克服的？
3. 测量中是否产生过误差？你能分析产生误差的原因吗？
4. 你在活动中有“创造”吗？愿意将你的创意与同学分享吗？</td></tr>
<tr><td colspan="2">同学或小组评价</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2">老师评语</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

数学活动评价表

<table>
<tr><td colspan="2">活动名称</td><td>香烟浸出液对种子发芽的影响</td><td>活动时间</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">活动形式</td><td>以小组为单位</td><td>小组成员</td><td></td></tr>
<tr><td>自
我
评
价</td><td colspan="4">1. 你和小组同学制定了怎样的实验计划和步骤，得出了怎样的结论？你能对得到的结论做出解释吗？
2. 在实验中，你和小组同学是如何分工合作的？
3. 在“操作实验，收集、整理、描述、分析数据，做出结论”的过程中，你发挥了什么作用？有哪些收获、体会？
4. 通过实验，你对“吸烟有害健康”有进一步的认识吗？愿意成为一名宣传吸烟危害性的志愿者吗？</td></tr>
<tr><td colspan="2">同学或小组评价</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">老师评语</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

后　　记

本套教材是以《义务教育 数学课程标准(2011 年版)》为依据，在广泛听取专家、实验区师生的意见和建议的基础上，对《义务教育课程标准实验教科书数学(苏科版)》(以下简称“实验本”)进行修订而成的，供义务教育 7～9 年级使用．

本套教材每章的开头部分设置：

章头图，章头语，章头问题，本章内容概述．

每章的内容部分设置：

“数学实验室”——通过“做”数学，感悟、理解数学知识；

“数学活动”——运用本章知识解决一些简单的问题；

“阅读”和“读一读”——介绍数学思想方法、拓展课本内容；

“练一练”——按课时编写，供当堂练习用；

“习题”——按节编写，供本节各个课时课后作业用．

每章的末尾部分设置：

“小结与思考”——梳理本章知识的结构、提炼基本思想；

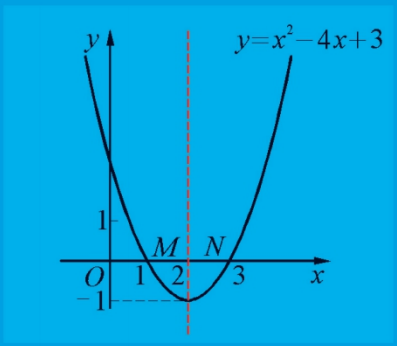
“复习题”(分为复习巩固、灵活应用、探索研究三个层次)——供本章复习时用，其中“灵活应用”、“探索研究”部分的习题可根据实际情况选用．

本套教材的每册课本设置一个“课题学习”——综合运用有关知识解决实际问题．全书使用了卡通人“小明”、“小丽”，并根据课程内容展开的需要，编写了一些卡通语．

“实验本”教材由杨裕前、董林伟任主编，丁伟明、李善良曾任副主编．参与本册(“实验本”)各章编写的有徐延觉、周凯、董林伟、孔凡海．

修订后的本套教材由杨裕前、董林伟任主编．参与本册修订的编写人员有周凯、杨秋萍、徐延觉、董林伟、荆福仁；参与修订讨论的有王永建、周学祁、陈志廉．

史宁中教授、顾泠沅教授、张英伯教授等专家、同行，对本套教材的修订给予了热情的帮助和指导，提出了许多宝贵的意见和建议，在此表示衷心感谢!



数学

SHU XUE

九年级 下册

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5537-0472-2

定价:9.88元

审批号:苏费核(2021年)0753号　　举报电话:12315