教育部审定
2013

义务教育教科书

数学

SHU XUE

九年级 上册

江苏凤凰科学技术出版社

义务教育教科书

数学

SHU XUE

九年级 上册

杨裕前　董林伟　主编

江苏凤凰科学技术出版社
南　京

义务教育教科书
数学　九年级上册

主　　编　杨裕前　董林伟
责任编辑　许礼光　闵正年　沈　琼
责任校对　仲　敏

出　　版　江苏凤凰科学技术出版社
出版社地址　南京市湖南路1号A楼，邮编：210009
重　　印　江苏凤凰出版传媒股份有限公司
发　　行　江苏凤凰出版传媒股份有限公司
照　　排　江苏凤凰制版有限公司
印　　刷　江苏凤凰新华印务集团有限公司

开　　本　787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张　9.75
版　　次　2006年6月第1版　2014年6月第3版
印　　次　2021年5月第16次印刷

标准书号　ISBN 978-7-5537-2974-9
定　　价　9.65元

如发现印、装质量问题，请与凤凰传媒联系，电话：400-828-1132

致 同 学

亲爱的伙伴：

祝贺你升入九年级！

两年来我们在数学王国里探索，翻过了一座座“山峰”，当你蓦然回首时，会发现自己“长高”了．这册课本将陪伴你继续攀登，进一步领略数学王国里的多姿多彩．

“一元二次方程”是又一个刻画现实世界数量关系的数学模型，你将在学习一元二次方程各种解法的过程中，进一步体会转化的思想，并尝试应用一元二次方程的知识解决一些实际问题．

红日、车轮、硬币……圆象征着完美、和谐，“对称图形——圆”将引导你运用圆的对称性探索圆的一些性质，运用图形运动和推理的方法证实圆的有关性质．

“数据的集中趋势和离散程度”将介绍平均数、中位数、众数和方差，并引导你根据具体问题，选用这些统计量来描述、分析数据．

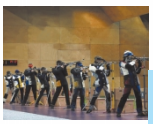
袋子中装有红球、白球、黑球各 1 个，这些球除颜色外都相同．搅匀后从中摸出 1 个球，摸到红球、白球、黑球的可能性相同吗？学习了“等可能条件下的概率”以后，你将会计算这样的一类事件发生的概率．

“实践与探索”、“观察与思考”、“操作与思考”、“尝试与交流”、“思考与探索”、“拓展与延伸”等，本册课本设计的这些栏目，不仅有助于你学懂知识、学会技能，而且能引导你体会数学的本质，感悟基本数学思想．

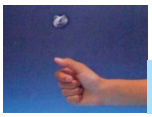
目　录

第 1 章　一元二次方程

第 2 章　对称图形——圆

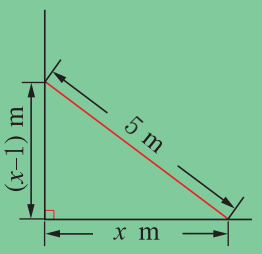


第 3 章　数据的集中趋势和离散程度



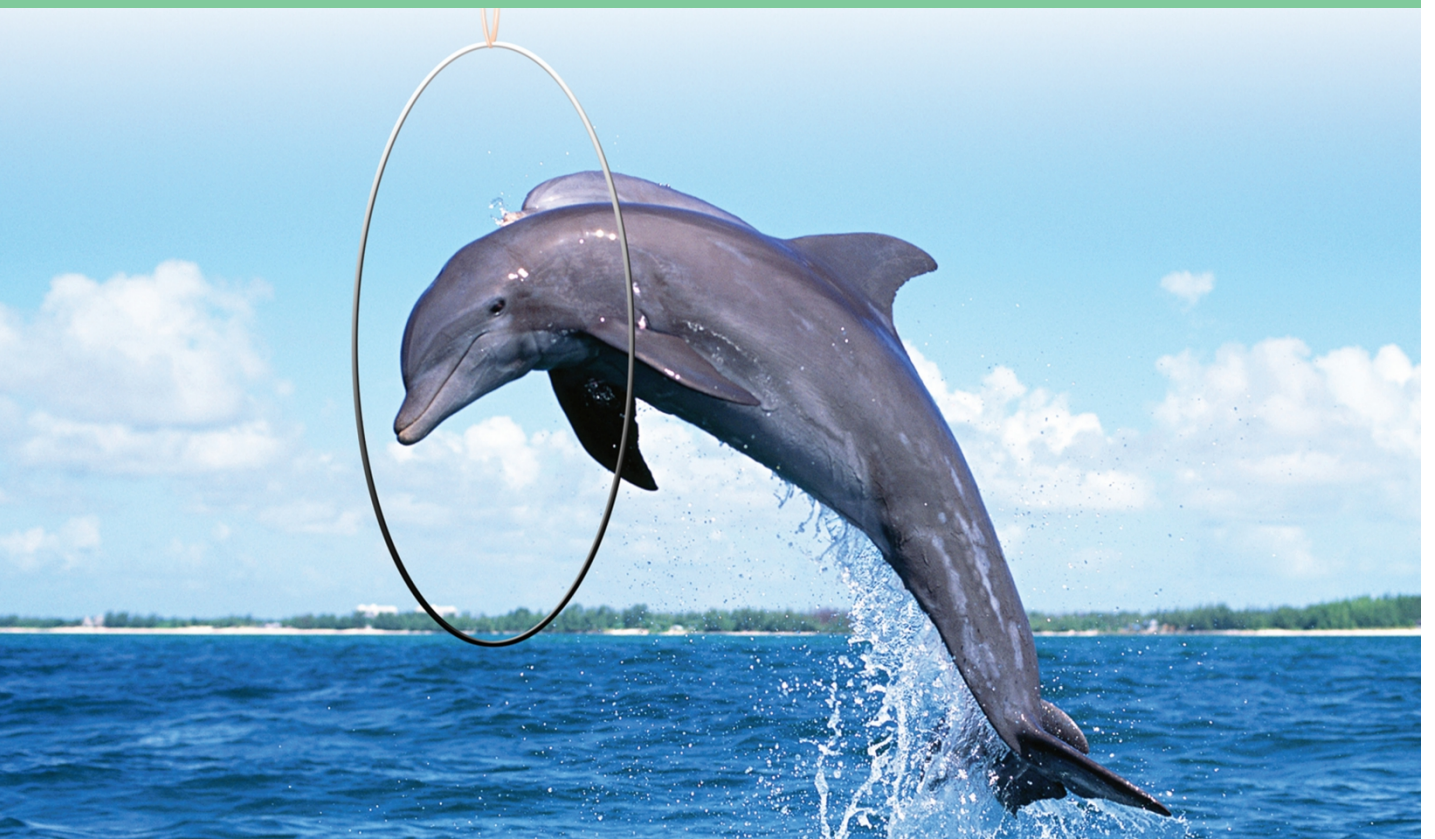
第 4 章　等可能条件下的概率

第1章　一元二次方程

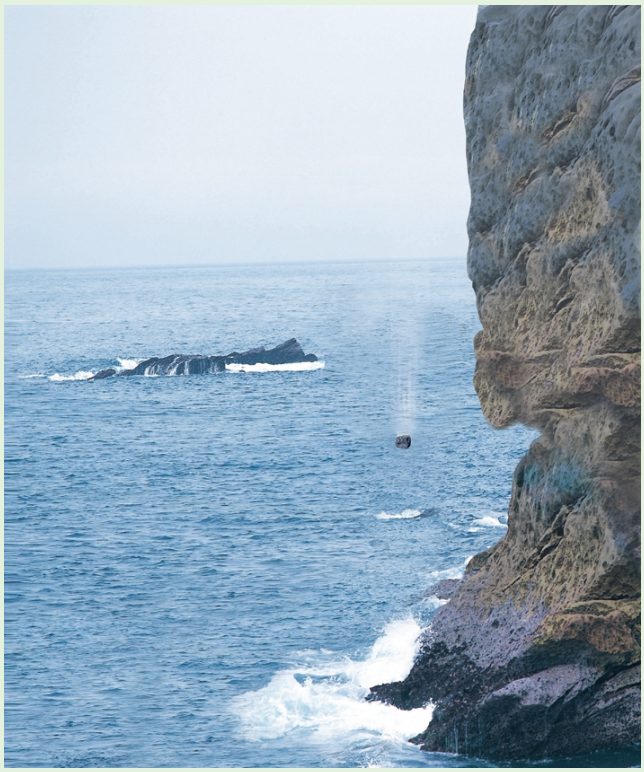


$x^2+(x-1)^2=5^2$

从“一次”到“二次”，建立了新的数学模型；
从“二次”到“一次”，用转化思想解决问题．



一块石头从离海面 45 m 高的绝壁上落下，试估计这块石头经过多少时间落到海面．



设石头在下落过程中离海面的高度 h 与下落的时间 t 有如下的关系：

$$h=-5t^2+45\ .$$

1. 填表：

t/s	0	0.5	1	1.5	2	2.5	…
h/m							…

2. 石头经过多少时间落到海面？

本章将学习一元二次方程的概念、解法和应用．

1.1　一元二次方程

正方形桌面的面积是 2 m^2．设正方形桌面的边长是 x m，可以用方程

$$x^2=2$$

来描述该桌面的边长与面积之间的数量关系．

如图 1－1，矩形花圃一面靠墙，另外三面所围的栅栏的总长度是 19 m，花圃的面积是 24 m^2．设花圃的宽是 x m，则花圃的长是 $(19-2x)$ m，可以用方程

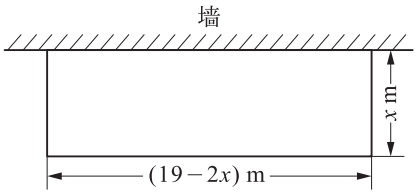


图 1－1

$$x(19-2x)=24$$

来描述该花圃的宽与面积之间的数量关系．

某校图书馆的藏书在两年内从 5 万册增加到 9.8 万册．设图书馆的藏书平均每年增长的百分率是 x，则图书馆的藏书一年后为 $5(1+x)$ 万册，两年后为 $[5(1+x)](1+x)$ 万册，可以用方程

$$5(1+x)^2=9.8$$

来描述该图书馆藏书年平均增长的百分率与藏书量之间的数量关系．

思考与探索

如图 1－2，长 5 m 的梯子斜靠在墙上，梯子的底端到墙面的距离比梯子的顶端到地面的距离多 1 m．设梯子的底端到墙面的距离是 x m，怎样用方程来描述其中的数量关系？

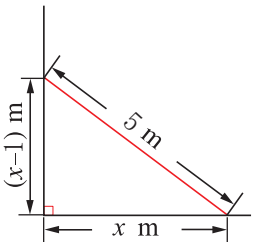


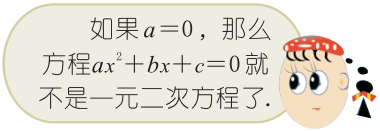
图 1－2

尝试与交流

方程 $x^2=2$、$x(19-2x)=24$、$5(1+x)^2=9.8$、$x^2+(x-1)^2=25$ 有哪些共同的特征？

方程 $x^2=2$、$x(19-2x)=24$、$5(1+x)^2=9.8$、$x^2+(x-1)^2=25$，它们都只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2．像这样的方程叫做**一元二次方程**(quadratic equation with one unknown)．

关于 x 的一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0$（a、b、c 是常数，$a\neq 0$）．其中，ax^2、bx、c 分别叫做二次项、一次项和常数项，a、b 分别叫做二次项系数、一次项系数．



例如，方程 $x(19-2x)=24$ 可以整理成 $-2x^2+19x-24=0$，它的二次项系数、一次项系数和常数项分别为 -2、19、-24．

练习

1. 用方程描述下列问题中的数量关系：

(1) 一张面积是 240 cm^2 的长方形彩纸，长比宽多 8 cm．设它的宽为 x cm，可得方程_____．

(2) 一枚圆形古钱币的中间是一个边长为 1 cm的正方形孔．已知正方形面积是圆面积的 $\frac{1}{9}$．设圆的半径为 x cm，可得方程_____．

（第 1 题）

2. 把下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项．

(1) $x^2-x=2$；　　(2) $4x+1=x^2$；

(3) $2x^2=-3x+1$；　　(4) $x(x+3)=-2$．

1.1 习题

1. 用方程描述下列问题中的数量关系：

(1) 一个正方体的表面积是 150 cm^2. 设这个正方体的棱长为 x cm，可得方程_____.

(2) 一个长方形操场的面积是 7 200 m^2，长是宽的 2 倍. 设这个操场的宽为 x m，可得方程_____.

(3) 两个连续奇数的积为 323，设其中的一个奇数为 x，可得方程_____.

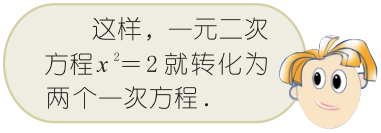
(4) 某工厂经过两年时间将某种产品的产量从每年 14 400 台提高到 16 900 台. 设平均每年增长的百分率为 x，可得方程_____.

2. 你能找到第 1(1)题所列方程的解吗？试一试.

1.2 一元二次方程的解法

我们已经会解一元一次方程，如何解一元二次方程？

对于一元二次方程 $x^2=2$，根据平方根的意义，x 是 2 的平方根，即 $x=\pm\sqrt{2}$.



于是，我们知道一元二次方程 $x^2=2$ 有两个根，它们分别记为

$$x_1=\sqrt{2},\ x_2=-\sqrt{2}.$$

这种直接通过求平方根来解一元二次方程的方法叫做**直接开平方法**.

例 1 解下列方程：

(1) $x^2-4=0$；　　(2) $4x^2-1=0$.

解：(1) 移项，得

$$x^2=4.$$

因为 x 是 4 的平方根，

所以

$$x=\pm 2,$$

即

$$x_1=2,\ x_2=-2.$$

(2) 移项，得

$$4x^2=1.$$

两边都除以 4，得

$$x^2=\frac{1}{4}.$$

因为 x 是 $\frac{1}{4}$ 的平方根，

所以

$$x=\pm\frac{1}{2},$$

即

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{1}{2}.$$

例 2　解方程：$(x+1)^2=2$.

分析：只要把$(x+1)$看成是一个整体，就可以用直接开平方法求解.

解：因为$(x+1)$是 2 的平方根，

所以

$$x+1=\pm\sqrt{2},$$

即

$$x_1=-1+\sqrt{2},\ x_2=-1-\sqrt{2}.$$

形如$(x+h)^2=k$(h、k 为常数，$k\geqslant 0$)的一元二次方程，可以用直接开平方法求解.

方程$(x+1)^2=0$，$(x+1)^2=-1$有解吗？如果有，你能求出它们的解吗？

1. 解下列方程：

(1) $x^2=16$；　　(2) $x^2-0.81=0$；

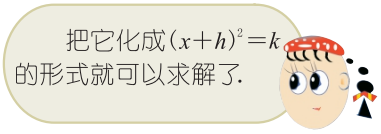
(3) $y^2-144=0$；　　(4) $9x^2=4$.

2. 解下列方程：

(1) $(x-1)^2=4$；　　(2) $(x+2)^2=3$；

(3) $(x-4)^2-25=0$；　　(4) $(2x+3)^2-5=0$.

如何解方程 $x^2+6x+4=0$？

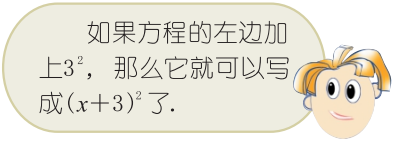


把常数项移到方程的右边，得

$$x^2+6x=-4,$$

即

$$x^2+2\cdot x\cdot 3=-4.$$



在方程的两边都加上一次项系数 6 的一半的平方，即 3^2 后，得

$$x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=-4+3^2.$$

整理，得

$$(x+3)^2=5.$$

解这个方程，得

$$x+3=\pm\sqrt{5}.$$

所以

$$x_1=-3+\sqrt{5},\ x_2=-3-\sqrt{5}.$$

把一个一元二次方程变形为 $(x+h)^2=k$（h、k 为常数）的形式，当 $k\geqslant 0$ 时，就可以用直接开平方法求出方程的解．这种解一元二次方程的方法叫做**配方法**．

例 3 解下列方程：

（1）$x^2-4x+3=0$；　　（2）$x^2+3x-1=0$．

解：（1）移项，得

$$x^2-4x=-3.$$

配方，得

$$x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2=-3+2^2,$$

$$(x-2)^2=1.$$

解这个方程，得

$$x-2=\pm 1.$$

所以

$$x_1=3,\ x_2=1.$$

（2）移项，得

$$x^2+3x=1.$$

配方，得

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=1+\left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}.$$

解这个方程，得

$$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

所以

$$x_1=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2},\ x_2=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

数学实验室

用配方法解一元二次方程 $x^2+2x-24=0$，配方的过程可以用拼图(如图 1－3)直观地表示．

把方程 $x^2+2x-24=0$ 变形为 $x^2+2x=24$，即 $x(x+2)=24$．

配方的过程，可以看成将一个长是 $(x+2)$、宽是 x、面积是 24 的矩形割补成一个正方形．

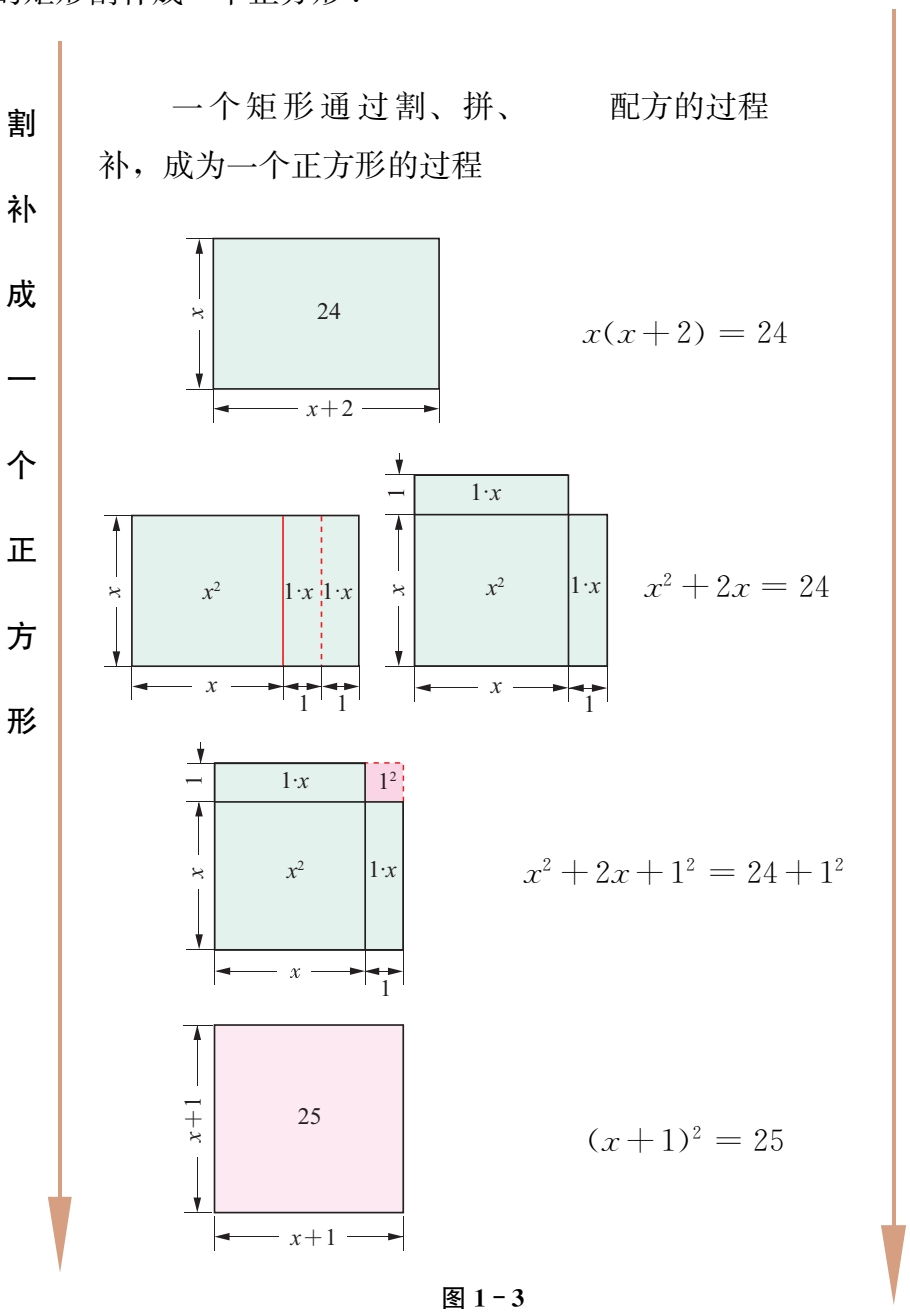


图 1－3

为什么在配方过程中，方程的两边要加上一次项系数一半的平方？

1. 填空：

(1) $x^2-2x+\_\_=(x-\_\_)^2$；

(2) $x^2+8x+\_\_=(x+\_\_)^2$；

(3) $x^2-5x+\_\_=(x-\_\_)^2$；

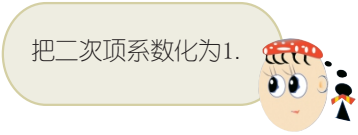
(4) $x^2+\frac{3}{2}x+\_\_=(x+\_\_)^2$.

2. 解下列方程：

(1) $x^2+2x=3$；　　(2) $x^2-6x=4$；

(3) $x^2+10x+20=0$；　　(4) $x^2-x-1=0$.

当一元二次方程的二次项系数不是 1 时，怎样用配方法求解？



例 4　解方程：$2x^2-5x+2=0$.

解： 两边都除以 2，得

$$x^2-\frac{5}{2}x+1=0.$$

移项，得

$$x^2-\frac{5}{2}x=-1.$$

配方，得

$$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=-1+\left(\frac{5}{4}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{16}.$$

解这个方程，得

$$x-\frac{5}{4}=\pm\frac{3}{4}.$$

所以

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=2.$$

例 5　解方程：$-3x^2+4x+1=0$.

解：两边都除以-3，得

$$x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}=0.$$

移项，得

$$x^2-\frac{4}{3}x=\frac{1}{3}.$$

配方，得

$$x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{9}.$$

解这个方程，得

$$x-\frac{2}{3}=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

所以

$$x_1=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3},\ x_2=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

方程 $2x^2+2x+\frac{1}{2}=0$，$2x^2-x+1=0$ 有解吗？如果有，你能求出它们的解吗？

解下列方程：

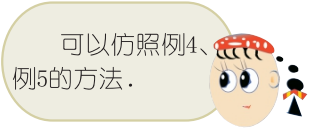
(1) $2x^2-8x+1=0$；　　(2) $\frac{1}{2}x^2+2x-1=0$；

(3) $2x^2+3x=0$；　　(4) $3x^2-1=6x$；

(5) $-x^2-x+\frac{1}{2}=0$；　　(6) $-5x^2+2x+1=0$.

如何解一般形式的一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)\ ?$$



因为 $a \neq 0$，所以方程两边都除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

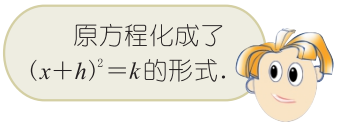
移项，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方，得

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$



因为 $a \neq 0$，所以 $4a^2>0$.

当 $b^2-4ac \geqslant 0$ 时，

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

所以

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

即

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

一般地，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根是由方程的各项系数 a、b、c 确定的，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，它的实数根是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这叫做一元二次方程的求根公式．解一元二次方程时，把各项系数的值直接代入这个公式，若 $b^2-4ac\geqslant 0$，就可以求得方程的根．这种解一元二次方程的方法叫做**公式法**．

在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 中，如果 $b^2-4ac<0$，那么方程有实数根吗？为什么？

例 6　解下列方程：

(1) $x^2+3x+2=0$；　　(2) $2(x^2-2)=7x$.

解：(1) ∵ $a=1$，$b=3$，$c=2$，

$b^2-4ac=3^2-4\times1\times2=1>0$，

$\therefore x=\dfrac{-3\pm\sqrt{1}}{2\times1}=\dfrac{-3\pm1}{2}$.

$\therefore x_1=-1$，$x_2=-2$.

(2) 把方程 $2(x^2-2)=7x$ 化成一般形式，得

$$2x^2-7x-4=0.$$

∵ $a=2$，$b=-7$，$c=-4$，

$b^2-4ac=(-7)^2-4\times2\times(-4)=81>0$，

$\therefore x=\dfrac{7\pm\sqrt{81}}{2\times2}=\dfrac{7\pm9}{4}$.

$\therefore x_1=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=4$.

用公式法解下列方程：

(1) $x^2-3x-4=0$；　　(2) $2x^2+x-1=0$；

(3) $x^2-2x=3$；　　(4) $20x^2=8x+1$；

(5) $x(x-6)=6$；　　(6) $4x(x-1)=1$.

例 7　解下列方程：

(1) $x^2+x-1=0$；　　(2) $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$；

(3) $2x^2-2x+1=0$.

解：(1) ∵ $a=1$，$b=1$，$c=-1$，

$b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-1)=5$，

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2\times1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

(2) ∵ $a=1$，$b=-2\sqrt{3}$，$c=3$，

$b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times3=0$，

$\therefore x=\dfrac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{0}}{2\times1}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

$\therefore x_1=x_2=\sqrt{3}$.

(3) $\because a=2, b=-2, c=1$,

$b^2-4ac=(-2)^2-4\times2\times1=-4<0$,

$\therefore$ 这个方程没有实数根.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的情况如下：

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$.
当 $b^2-4ac>0$ 时，有两个不相等的实数根；
当 $b^2-4ac=0$ 时，有两个相等的实数根；
当 $b^2-4ac<0$ 时，没有实数根.

我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的判别式.

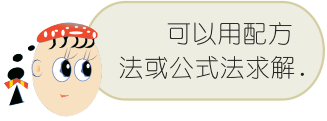
1. 不解方程，判别方程根的情况：

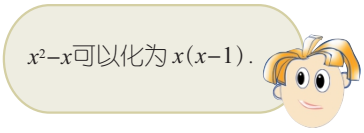
(1) $x^2+3x-1=0$；　　(2) $x^2-6x+5=0$；

(3) $2y^2-3y+4=0$；　　(4) $x^2+5=2\sqrt{5}x$.

2. k 取什么值时，关于 x 的一元二次方程 $x^2-kx+4=0$ 有两个相等的实数根？求此时方程的根.

如何解方程 $x^2-x=0$？





将方程的左边分解因式，得

$$x(x-1)=0.$$

此时 x 和 $x-1$ 两个因式中至少有一个为 0，即

$$x=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

所以

$$x_1=0,\ x_2=1.$$

当一个一元二次方程的一边是 0，另一边能分解为两个一次因式的乘积时，就可以把解这样的一元二次方程转化为解两个一元一次方程，这种解一元二次方程的方法叫做**因式分解法**.

例 8　解下列方程：

(1) $x^2=-4x$；　　(2) $x+3-x(x+3)=0$.

解：(1) 原方程可变形为

$$x^2+4x=0,$$
$$x(x+4)=0.$$
$$x=0 \text{ 或 } x+4=0.$$

所以

$$x_1=0,\ x_2=-4.$$

(2) 原方程可变形为

$$(x+3)(1-x)=0.$$
$$x+3=0 \text{ 或 } 1-x=0.$$

所以

$$x_1=-3,\ x_2=1.$$

例 9　解方程：$(2x-1)^2-x^2=0$.

解：原方程可变形为

$$(2x-1+x)(2x-1-x)=0,$$

即

$$(3x-1)(x-1)=0.$$
$$3x-1=0 \text{ 或 } x-1=0.$$

所以

$$x_1=\frac{1}{3},\ x_2=1.$$

观察与思考

解方程$(x+2)^2=4(x+2)$．小丽、小明的解法如下：

原方程可变形为
$(x+2)^2-4(x+2)=0$，
$(x+2)(x-2)=0$，
$x+2=0$或$x-2=0$．
所以$x_1=-2$，$x_2=2$．

原方程两边
都除以$(x+2)$，
得$x+2=4$．
所以$x=2$．

小丽、小明的解法，哪个正确？

练习

1. 用因式分解法解下列方程：

(1) $x^2-3x=0$；

(2) $3x^2=x$；

(3) $2(x-1)+x(x-1)=0$；

(4) $4x(2x-1)=3(2x-1)$．

2. 用因式分解法解下列方程：

(1) $(x+1)^2-9=0$；

(2) $(x-2)^2-9(x+1)^2=0$；

(3) $(x-1)^2-2(x-1)+1=0$．

1.2 习题

1. 用直接开平方法解下列方程：

(1) $x^2-36=0$；　　(2) $3x^2-\frac{1}{3}=0$；

(3) $(x+4)^2-2=0$；　　(4) $(2x+1)^2-3=0$；

(5) $2(x-1)^2-5=0$；　　(6) $\frac{1}{3}(x+1)^2-1=0$．

2. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2-7x+12=0$；　　(2) $x^2+6x-16=0$；

(3) $x^2-4x=2$；　　(4) $x^2+5x+5=0$；

(5) $x^2-0.2x-0.03=0$；　　(6) $x^2+\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}=0$．

3. 用配方法解下列方程：

(1) $4x^2-20x+21=0$；　　(2) $2x^2-x-1=0$；

(3) $2y^2-y-\frac{1}{2}=0$；　　(4) $\frac{1}{2}t^2+3t=1$；

(5) $-3(x^2+5)=18x$；　　(6) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x-1=0$.

4. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2+4x-5=0$；　　(2) $3x^2-x-2=0$；

(3) $2x^2-5x+1=0$；　　(4) $4x(x-2)=1$；

(5) $-2x^2+2\sqrt{2}x+1=0$；　　(6) $2(x-2)^2=7x-5$.

5. 用因式分解法解下列方程：

(1) $x^2+6x=0$；　　(2) $3x(x-2)=x-2$；

(3) $(x-1)^2-4=0$；　　(4) $9t^2-(t-1)^2=0$；

(5) $25x^2-5x+\frac{1}{4}=0$；　　(6) $(x+1)^2+8(x+1)+16=0$.

6. 解下列方程：

(1) $x^2-5x-6=0$；　　(2) $x^2+12x+27=0$；

(3) $x(x-3)=10$；　　(4) $(2x-1)(x+3)=4$.

7. 不解方程，判别下列方程根的情况：

(1) $x^2-4x-5=0$；　　(2) $3x^2-x+1=0$；

(3) $5x^2+4x-1=0$；　　(4) $2x(2-x)=3$.

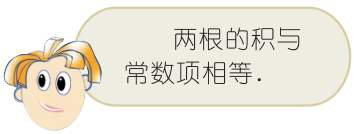
8. 已知 $y_1=x^2-2x+3$，$y_2=3x-1$，x 取什么值时，y_1 与 y_2 相等？

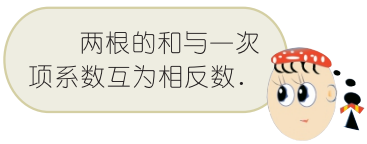
9. k 取什么值时，关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+k-1=0$ 有两个相等的实数根？有两个不相等的实数根？

*1.3 一元二次方程的根与系数的关系

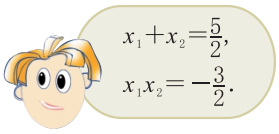
1. 观察下表，你能发现下列一元二次方程的根与系数有什么关系？

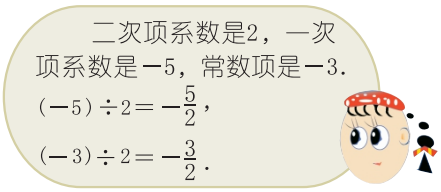
$ax^2+bx+c=0$	x_1	x_2
$x^2-3x+2=0$	1	2
$x^2+3x+2=0$	-1	-2
$x^2-5x+6=0$	2	3
$x^2+5x+6=0$	-2	-3
$x^2-3x=0$	0	3





2. 方程 $2x^2-5x-3=0$ 的两根是 $x_1=3, x_2=-\frac{1}{2}$，这两根的和、两根的积与系数有什么关系？





3. 先求出方程 $3x^2-7x+4=0$ 的解，再验证这个方程的根与系数是否有小明、小丽发现的关系．

一般地，在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 中，如果 $b^2-4ac\geqslant 0$，那么它的两个根分别是

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}、x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

于是可得

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a};$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

一元二次方程的根与系数有如下关系：

方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根是 x_1、x_2，

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

例　求下列方程两根的和与两根的积：

(1) $x^2+2x-5=0$；　　(2) $2x^2+x=1$.

解：(1) 设方程 $x^2+2x-5=0$ 的两根分别是 x_1、x_2.

因为 $a=1$，$b=2$，$c=-5$，

所以 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-2$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=-5$.

(2) 把方程 $2x^2+x=1$ 化成一般形式，得 $2x^2+x-1=0$.

设它的两根分别是 x_1、x_2.

因为 $a=2$，$b=1$，$c=-1$，

所以 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}$.

小明在一本课外读物中读到如下一段文字：

一元二次方程 x^2- ✸ x ✸ $=0$ 的两根是 $2+\sqrt{3}$ 和 $2-\sqrt{3}$.

你能写出这个方程中被墨迹污染的一次项系数和常数项吗？

练习

*1. 求下列方程两根的和与两根的积：

(1) $x^2-4x+1=0$；　　(2) $2x^2-3x=2$；

(3) $3x^2+2x=0$；　　(4) $4x^2=1$.

*2. 下列结论是否正确？

(1) 设 x_1、x_2 是一元二次方程 $x^2+5x+6=0$ 的两个根，则 $x_1+x_2=5$；

(2) 设 x_1、x_2 是一元二次方程 $x^2-3x=1$ 的两个根，则 $x_1\cdot x_2=1$.

1.3 习题

*1. 求下列方程两根的和与两根的积：

(1) $x^2+6x-6=0$；　　(2) $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$；

(3) $x^2+x=1$；　　(4) $5x^2=6x$.

*2. 已知关于 x 的方程 $2x^2+mx+50=0$ 的一个根是 10，求它的另一个根和 m 的值.

*3. 已知关于 x 的方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根分别是 $\sqrt{2}+1$、$\sqrt{2}-1$，求 b、c 的值.

1.4　用一元二次方程解决问题

我们已经知道，生产、生活中的一些实际问题，有时可以用一元二次方程来描述其中数量之间的相等关系，运用一元二次方程的有关知识，常常可以使这些实际问题得到解决．

问题 1　用一根长 22 cm 的铁丝：

(1) 能否围成面积是 30 cm^2 的矩形？

(2) 能否围成面积是 32 cm^2 的矩形？

解： 设这根铁丝围成的矩形的长是 x cm，则矩形的宽是 $(11-x)$ cm．

(1) 根据题意，得

$$x(11-x)=30,$$

即

$$x^2-11x+30=0.$$

解这个方程，得

$$x_1=5, x_2=6.$$

当 $x_1=5$ 时，$11-x_1=6$；

当 $x_2=6$ 时，$11-x_2=5$．

答： 用一根长 22 cm 的铁丝能围成面积是 30 cm^2 的矩形．

(2) 根据题意，得

$$x(11-x)=32,$$

即

$$x^2-11x+32=0.$$

因为 $b^2-4ac=(-11)^2-4\times1\times32=121-128=-7<0$，

所以此方程没有实数根．

答： 用一根长 22 cm 的铁丝不能围成面积是 32 cm^2 的矩形．

问题 2 某商店 6 月份的利润是 2 500 元，要使 8 月份的利润达到 3 600 元，平均每月利润增长的百分率是多少？

分析： 设平均每月利润增长的百分率是 x，则 7 月份的利润是 $2\,500(1+x)$ 元，8 月份的利润是 $[(2\,500(1+x)](1+x)$ 元．

解： 设平均每月利润增长的百分率是 x．

根据题意，得

$$2\,500(1+x)^2=3\,600.$$

解这个方程，得

$$x_1=0.2, x_2=-2.2\text{（不合题意，舍去）}.$$

答： 平均每月利润增长的百分率是 20%．

1. 一块长方形菜地的面积是 150 m^2．如果它的长减少 5 m，那么它就成为正方形菜地．求这个长方形菜地的长和宽．
2. 用一根长 100 cm 的金属丝能否制成面积是 600 cm^2 的矩形框子？能否制成面积是 800 cm^2 的矩形框子？
3. 某种服装原价每件 80 元，经两次降价，现售价每件51.2 元．求该种服装平均每次降价的百分率．

问题 3 某商场销售一批衬衫，平均每天可售出 20 件，每件盈利 40 元．为了扩大销售，增加盈利，商场采取了降价措施．假设在一定范围内，衬衫的单价每降 1 元，商场平均每天可多售出 2 件．如果降价后商场销售这批衬衫每天盈利 1 250 元，那么衬衫的单价降了多少元？

分析： 设衬衫的单价降了 x 元，则商场平均每天可多售出 $2x$ 件衬衫，每件衬衫盈利 $(40-x)$ 元．

解： 设衬衫的单价降了 x 元．

根据题意，得

$$(20+2x)(40-x)=1\,250,$$

即

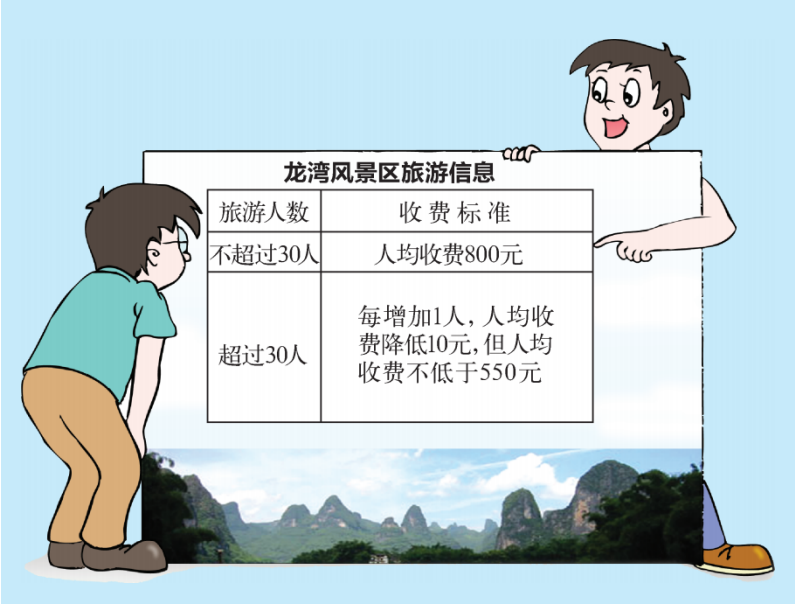
$$x^2-30x+225=0.$$

解这个方程，得

$$x_1=x_2=15.$$

答：衬衫的单价降了 15 元．

问题 4



根据龙湾风景区的旅游信息，某公司组织一批员工到该风景区旅游，支付给旅行社 28 000 元．你能确定参加这次旅游的人数吗？

分析：由 $800\times30=24\ 000<28\ 000$，可知参加这次旅游的人数($x$)大于 30，人均收费降低 $10(x-30)$元，于是可列出方程求解．但考虑到人均收费应不低于 550 元，因而必须检验求得的解是否符合题意．

解：设参加这次旅游共有 x 人，由 $800\times30=24\ 000<28\ 000$，可知 $x>30$，人均收费为 $[800-10(x-30)]$ 元．

根据题意，得

$$x\cdot[800-10(x-30)]=28\ 000.$$

整理，得

$$x^2-110x+2\ 800=0.$$

解这个方程，得

$$x_1=40,x_2=70.$$

当 $x=40$ 时，$800-10(x-30)=800-10(40-30)=700>550$.

当 $x=70$ 时，$800-10(x-30)=800-10(70-30)$

$=400<550$(不合题意，舍去).

答： 参加这次旅游共有 40 人.

练习

1. 在本节问题 4 中，该公司又组织第二批员工到龙湾风景区旅游，并支付给旅行社 29 250 元. 求该公司第二批参加旅游的员工人数.

2. 某商店经销的某种商品，每件成本为 40 元. 经市场调研，售价为 50 元时，可销售 200 件；售价每增加 1 元，销售量将减少 10 件. 如果这种商品全部销售完，那么该商店可盈利 2 000 元. 问：该商店销售了这种商品多少件？每件售价多少元？

问题 5 如图 1－4，海关缉私人员驾艇在 C 处发现正北方向30 km 的 A 处有一艘可疑船只，并测得它正以 60 km/h 的速度向正东方向航行，缉私艇随即以 75 km/h 的速度在 B 处将可疑船只拦截. 缉私艇从 C 处到 B 处需航行多长时间？

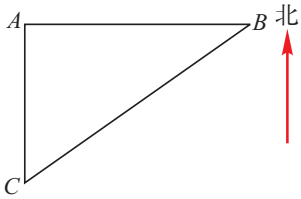


图 1－4

分析： 设缉私艇从 C 处到 B 处需航行 x h，则 $AB=60x$ km，$BC=75x$ km．根据题意，可知△ABC 是直角三角形，利用勾股定理可以列出方程．

解： 设缉私艇从 C 处到 B 处需航行 x h，则 $AB=60x$ km，$BC=75x$ km．

根据题意，得

△ABC 是直角三角形，$AC=30$ km．

于是

$$(60x)^2+30^2=(75x)^2.$$

解这个方程，得

$$x_1=\frac{2}{3},x_2=-\frac{2}{3}\text{（不合题意，舍去）}.$$

答： 缉私艇从 C 处到 B 处需航行 $\frac{2}{3}$ h．

问题 6　如图 1－5，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$ cm，$BC=12$ cm，点 P 从点 A 出发沿 AB 以 1 cm/s的速度向点 B 移动；同时，点 Q 从点 B 出发沿 BC 以 2 cm/s 的速度向点 C 移动．几秒钟后△DPQ 的面积等于 28 cm²？

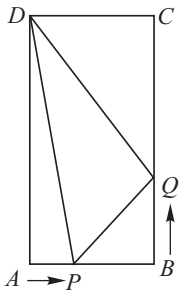


图 1－5

分析： 设 x s 后△DPQ 的面积为 28 cm²，则 AP、PB、BQ、QC 的长度分别可用含 x 的代数式表示，从而 Rt△DAP、Rt△PBQ、Rt△QCD 的面积也都可用含 x 的代数式表示，于是可以列出方程．

解： 设 x s 后△DPQ 的面积等于 28 cm²，则△DAP、△PBQ、△QCD 的面积分别为$\frac{1}{2}\times12x$、$\frac{1}{2}\times2x(6-x)$、$\frac{1}{2}\times6\times(12-2x)$．

根据题意，得

$$6\times12-\frac{1}{2}\times12x-\frac{1}{2}\times2x(6-x)-\frac{1}{2}\times6\times(12-2x)=28,$$

整理，得

$$x^2-6x+8=0.$$

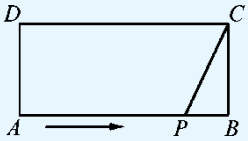
解这个方程，得

$$x_1=2,\ x_2=4.$$

答： 2 s 或 4 s 后△DPQ 的面积等于 28 cm^2.

练习

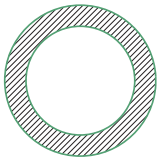
1. 一个直角三角形的两条直角边的和是28 cm，面积是96 cm^2. 求这个直角三角形两条直角边及斜边的长.
2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=7$ cm，$BC=2\sqrt{2}$ cm，点 P 从点 A 出发沿 AB 以 1 cm/s 的速度向点 B 移动. 点 P 出发几秒后，点 P、A 的距离是点 P、C 的距离的 2 倍.



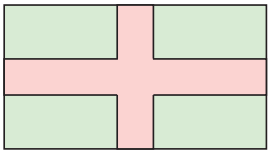
（第 2 题）

1.4 习题

1. 一个两位数的两个数字的和为 9，把这个两位数的个位数字与十位数字互换得到一个新的两位数，它与原两位数的积为 1 458. 求原两位数.
2. 一种药品经过两次降价，药价从每盒 60 元下调至 48.6 元，平均每次降价的百分率是多少？
3. 某农场的粮食产量在两年内从 3 000 t 增加到 3 630 t，平均每年增产的百分率是多少？
4. 如图，一段水管内壁均匀地形成一层厚 3 mm 的矿物沉淀物，导致水管过水的横截面面积减少到原来的$\frac{4}{9}$. 求该水管原来的内径.


（第 4 题）

5. 如图，在长 40 m、宽 22 m 的矩形地面内，修筑两条同样宽且互相垂直的道路，余下的铺上草坪．要使草坪的面积达到 760 m^2，道路的宽应为多少？



（第 5 题）

6. 把一根长 80 cm 的绳子剪成两段，并把每一段绳子围成一个正方形．

(1) 要使这两个正方形的面积的和等于 200 cm^2，应该怎样剪？

(2) 这两个正方形面积的和可能等于 488 cm^2 吗？

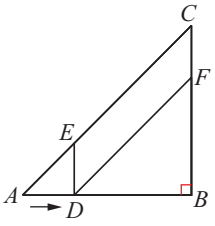
7. 某商店的一种服装，每件成本为 50 元．经市场调研，售价为 60 元时，可销售 800 件；售价每提高 5 元，销售量将减少 100 件．已知商店销售这批服装获利 12 000 元，问这种服装每件售价是多少元？

8. 某体育用品商店销售一批运动鞋，零售价每双 240 元．如果一次购买超过 10 双．那么每多购 1 双，所购运动鞋的单价降低 6 元，但单价不能低于 150 元．一位顾客购买这种运动鞋支付了 3 600 元，这位顾客买了多少双？

9. 一个直角三角形三边的长为连续整数，求这个三角形的斜边长．

10. 建造一个池底为正方形、深度为 2 m 的长方体无盖水池，池壁的造价为每平方米 100 元，池底的造价为每平方米 200 元，总造价为 6 400 元．求该水池池底的边长．

11. 如图，在 Rt△ABC 中，$AB = BC = 12$ cm，点 D 从点 A 出发沿 AB 以 2 cm/s 的速度向点 B 移动，移动过程中始终保持 $DE \parallel BC$，$DF \parallel AC$（点 E、F 分别在 AC、BC 上）．点 D 出发几秒后四边形 $DFCE$ 的面积为 20 cm^2？



（第 11 题）

阅读

各类方程的解法

回顾我们曾学过的各类方程的解法：

解一元一次方程，把它转化为 $x=a$ 的形式（去分母、去括号、移项、合并同类项、将未知数的系数化为 1）.

解二元一次方程组，把它转化为解一元一次方程（用代入法或加减法消元）；类似的，解三元一次方程组，把它转化为解二元一次方程组 .

解一元二次方程，把它转化为解两个一元一次方程（用直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法）.

解分式方程，把它转化为解整式方程（用去分母的方法）. 由于“去分母”可能产生增根，所以解分式方程必须检验 .

各类方程的解法不尽相同，但是它们有一个共同的基本数学思想——转化，把未知转化为已知 .

用“转化”的数学思想，我们还可以解一些新的方程 . 例如，

一元三次方程 $x^3+x^2-2x=0$，可以通过因式分解把它转化为 $x(x^2+x-2)=0$，解一元一次方程 $x=0$ 和一元二次方程 $x^2+x-2=0$，可得 $x_1=0, x_2=-2, x_3=1$；

无理方程(根号下含有未知数的方程) $\sqrt{x+1}=2$，可以通过方程两边平方把它转化为 $x+1=4$，解得 $x=3$. 通过“方程两边平方”解方程，有可能产生增根，必须对解得的根进行检验 . 例如，把方程 $\sqrt{2x+3}=x$ 两边平方，得 $2x+3=x^2$，解得 $x_1=3, x_2=-1$. 经检验，$x_2=-1$ 不是原方程的根，是增根 .

数学活动

矩形绿地中的花圃设计

在一块长是 32 m、宽是 24 m 的矩形绿地内，要围出一个花圃，使花圃面积是矩形面积的一半．你能给出设计方案吗？

思考：花圃可以有多种设计方案，例如，在绿地中间开辟一个矩形的花圃(如图1－6)，使四周的绿地等宽，绿地的面积与花圃的面积相等．你能计算出绿地的宽吗？

图 1－6

探索：请你再设计两种不同的方案．

交流：你的设计方案有哪些特点？

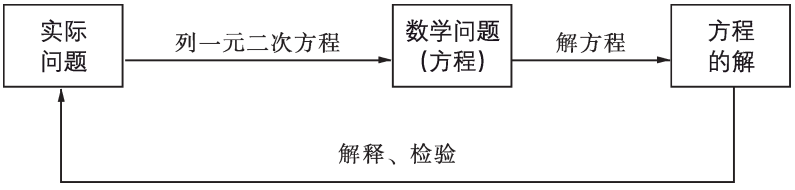
小结与思考

1. 一元二次方程是一元一次方程、二元一次方程组等内容的延伸和发展，是今后学习其他数学知识的基础．

2. 解一元二次方程的基本思路是把它转化为解一元一次方程．转化的实质是“降次”．转化的途径：一是根据平方根的定义，方程两边开平方(直接开平方法、配方法、公式法)；二是通过因式分解，把一元二次方程化成两个一元一次方程(因式分解法)．

一般地，一元二次方程都可以用公式法求解，而根据方程的特点灵活选用方法，可以使求解过程较为简便．

3. 用一元二次方程解决实际问题时，通常要经历以下过程：



用一元二次方程解决实际问题的关键是找出问题中数量之间的相等关系，列出方程．

4. 一元二次方程是揭示现实世界数量关系的一个重要的数学模型．编拟一个用一元二次方程解决的实际问题，并列出方程求解．

复习巩固

1. 解下列方程：

(1) $x^2-4x-45=0$；

(2) $x(x+4)=-3(x+4)$；

(3) $(4y-1)^2-5=0$；

(4) $(x+3)^2=2x+5$；

(5) $(2x+1)(x-3)=-6$；

(6) $x^2-4\sqrt{2}x+8=0$.

2. 当 x 为何值时，代数式 $2x^2-3$ 的值与 x 的值相等？

3. 已知 $x=2$ 时，二次三项式 $x^2-2mx+4$ 的值等于 -4. x 为何值时，这个二次三项式的值是 -1？

4. 已知 $y_1=x^2-9$，$y_2=3-x$. x 为何值时，y_1 与 y_2 相等？

5. 已知关于 x 的方程 $x^2-6x+m^2-3m-5=0$ 的一个根是 -1. 求 m 的值.

6. 已知一个数的平方与 25 的差等于这个数与 5 的和. 求这个数.

7. 印度古算书中有一首用韵文写成的诗："一群猴子分两队，高高兴兴在游戏. 八分之一再平方，蹦蹦跳跳树林里. 其余十二高声喊，充满活跃的空气. 告我总数共多少，两队猴子在一起？"

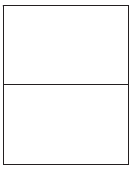
大意是说：一群猴子分成两队，一队猴子数是猴子总数的 $\frac{1}{8}$ 的平方，另一队猴子数是 12，那么这群猴子的总数是多少？

8. 某工厂两年内产值翻了一番，求该工厂产值年平均增长的百分率（精确到 0.1%）.

9. 一个直角三角形的斜边长 $2\sqrt{5}$ cm，两条直角边长的和是 6 cm. 求这两条直角边的长.

10. 学校打算用长 16 m 的篱笆围成一个长方形的生物园饲养小兔，生物园的一面靠墙(如图)，面积是 30 m^2. 求这个生物园的长和宽.

(第 10 题)



(第 11 题)

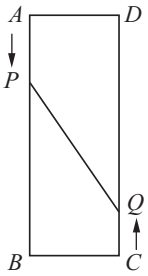
11. 如图，用长 6 m 的铝合金条制成“日”字形窗框，窗框的宽和高各是多少时，窗户的透光面积为 1.5 m^2(铝合金条的宽度不计)?

灵活运用

12. 某剧院举办文艺演出. 经调研，如果票价定为每张 30 元，那么 1 200 张门票可以全部售出；如果票价每增加 1 元，那么售出的门票就减少 30 张. 要使门票收入达到 36 750 元，票价应定为多少元?

13. 一个容器盛满纯药液 63 L，第一次倒出一部分纯药液后，用水加满；第二次又倒出同样多的药液，若此时容器内剩下的纯药液是 28 L，则每次倒出的液体是多少?

14. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 16$ cm，$BC = 6$ cm，点 P 从点 A 出发沿 AB 以 3 cm/s 的速度向点 B 移动，一直到达点 B 为止；同时，点 Q 从点 C 出发沿 CD 以 2 cm/s 的速度向点 D 移动. 经过多长时间 P、Q 两点之间的距离是 10 cm?



(第 14 题)

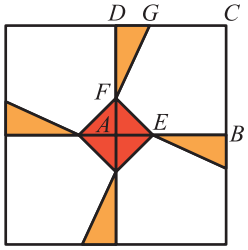
15. 已知 5 个连续整数的和是 m，它们的平方和是 n，且 $n = 2(6m + 5)$. 求这 5 个连续整数.

16. 某农场去年种植南瓜 10 亩，总产量为 20 000 kg. 今年该农场扩大了种植面积，并引进新品种，使总产量增长到 60 000 kg. 已知种植面积的增长率是平均亩产量增长率的 2 倍，求平均亩产量的增长率.

探索研究

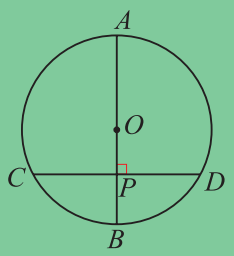
17. 写出一个一元二次方程，使它的两个根分别是 3、−2．

18. 如图，一个边长为 8 m 的正方形花坛由 4 块全等的小正方形组成．在小正方形 $ABCD$ 中，点 G、E、F 分别在 CD、AB、AD 上，且 $DG = 1$ m，$AE = AF$．在△AEF、△DFG、五边形 $EBCGF$ 三个区域上种植不同的花卉，每平方米的种植成本分别是 20 元、20 元、10 元．问点 E 在什么位置时，正方形花坛种植花卉所需的总费用是 715 元？



（第 18 题）

第2章　对称图形——圆



$PC = PD, \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}, \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$

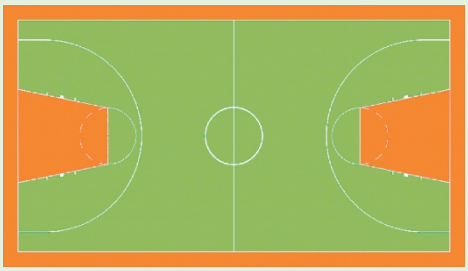
红日、车轮、硬币……圆的形象完美、和谐．圆的对称性蕴含了圆的许多性质．

如图，篮球场地上画有一些圆形、圆弧形的图案．

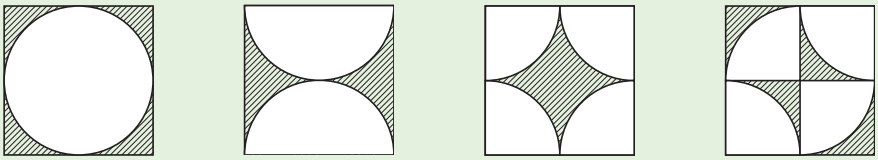
(1) 你知道这些图案的含义吗？

(2) 到学校篮球场上实际测量这些圆或半圆的直径，计算它们的周长和面积．

你还知道体育运动中，哪些项目的场地上画有圆形或圆弧形的图案？请与同学交流．

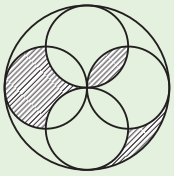


图(1)～图(4)中的正方形的边长都相等，曲线都是圆或圆弧，它们阴影部分的面积都相等吗？



图（1）　图（2）　图（3）　图（4）

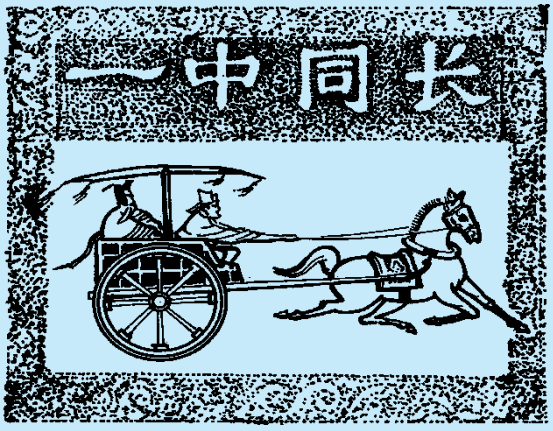
图(5)中 4 个小圆的面积相等，大圆的半径等于小圆的直径．探索图中阴影部分的面积与大圆的面积之间的数量关系，并说明理由．



图（5）

本章将在小学学习的基础上，进一步研究圆的性质，探索点与圆、直线与圆的位置关系．

2.1　圆



战国时期数学家墨子撰写的《墨经》一书中，就有“圆，一中同长也”的记载．你理解这句话的意思吗？

如图 2－1，在平面内把线段 OP 绕着端点 O 旋转 1 周，端点 P 运动所形成的图形叫做**圆**(circle)．其中，点 O 叫做**圆心**(centre of a circle)，线段 OP 叫做**半径**(radius)．

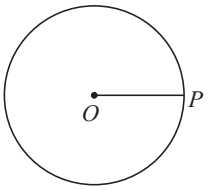


图 2－1

以点 O 为圆心的圆，记作“⊙O”，读作“圆 O”．

在纸上画一个圆、一个点，这个点与圆的位置关系有哪几种？这个点到圆心的距离与圆的半径的大小关系有哪几种？怎样用数量之间的关系来描述点与圆的位置关系？

通过操作、观察可以发现：

圆上的点(如图 2－2 中的点 P)到圆心的距离都等于半径，到圆心的距离等于半径的点都在圆上．也就是说，圆是到定点（圆心）的距离等于定长（半径）的点的集合．

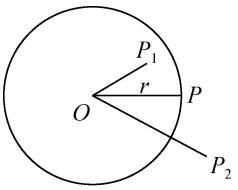


图 2－2

圆内的点(如图 2－2 中的点 P_1)到圆心的距离都小于半径，到圆心的距离小于半径的点都在圆内．也就是说，圆的内部是到圆心的距离小于半径的点的集合．

圆外的点(如图 2－2 中的点 P_2)到圆心的距离都大于半径，到圆心的距离大于半径的点都在圆外．也就是说，圆的外部是到圆心的距离大于半径的点的集合．

如果⊙O 的半径为 r，点 P 到圆心 O 的距离为 d，那么

点 P 在圆内⇔$d < r$；

点 P 在圆上⇔$d = r$；

点 P 在圆外⇔$d > r$．

符号“⇔”读作“等价于”，它表示从左端可以推出右端，从右端也可以推出左端．

如图 2－3，线段 $PQ = 2$ cm．

(1) 画出下列图形：

到点 P 的距离等于 1 cm 的点的集合；

到点 Q 的距离等于 1.5 cm 的点的集合．

图 2－3

(2) 在所画图中，到点 P 的距离等于 1 cm，且到点 Q 的距离等于 1.5 cm 的点有几个？在图中将它们表示出来．

(3) 在所画图中，到点 P 的距离小于或等于 1 cm，且到点 Q 的距离大于或等于 1.5 cm 的点的集合是怎样的图形？在图中将它表示出来．

1. 已知⊙O 的半径为 4 cm．如果点 P 到圆心 O 的距离为 4.5 cm，那么点 P 与⊙O 有怎样的位置关系？如果点 P 到圆心 O 的距离为 4 cm、3 cm 呢？
2. 用图形表示到点 A 的距离小于或等于2 cm的点的集合．
3. 已知矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O．点 A、B、C、D 是否在以点 O 为圆心的同一个圆上？为什么？

连接圆上任意两点的线段叫做**弦**(chord)．经过圆心的弦叫做**直径**(diameter)．如图 2－4，CD 是⊙O 的弦，AB 是⊙O 的直径．

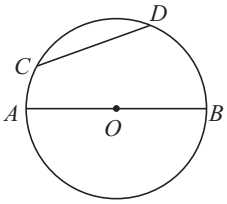


图 2－4

圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称**弧**(arc)，用符号“⌒”表示．如图 2－4，以 C、D 为端点的弧，记作$\overset{\frown}{CD}$，读作“弧 CD”．

圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条弧，每条弧都叫做半圆．大于半圆的弧叫做**优弧**(major arc)，小于半圆的弧叫做**劣弧**(minor arc)．如图 2－5，$\overset{\frown}{BAC}$是优弧，$\overset{\frown}{BC}$是劣弧．

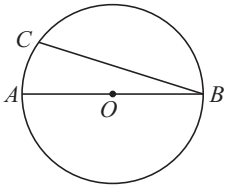


图 2－5

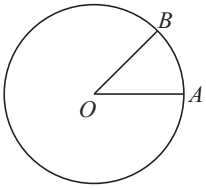


图 2－6

顶点在圆心的角叫做**圆心角**(central angle)．如图 2－6，$\angle AOB$ 是圆心角．

圆心相同，半径不相等的两个圆叫做**同心圆**(concentric circles)．能够互相重合的两个圆叫做**等圆**(equal circle)．能够互相重合的弧叫做**等弧**(equal arc)．

同圆或等圆的半径相等．

例 如图 2－7，点 A、B 和点 C、D 分别在以点 O 为圆心的两个同心圆上，且 $\angle AOB=\angle COD$．$\angle C$ 与 $\angle D$ 相等吗？为什么？

解： $\angle C$ 与 $\angle D$ 相等．

$\because \angle AOB=\angle COD$，

$\therefore \angle BOC=\angle AOD$．

又 $\because OB=OA, OC=OD$（同圆的半径相等），

$\therefore \triangle BOC\cong\triangle AOD$．

$\therefore \angle C=\angle D$．

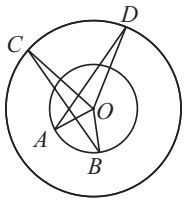


图 2－7

如图 2－8，AB 是⊙O 的直径，C 是 BA 延长线上一点，点 D 在⊙O 上，且 $CD=OA$，CD 的延长线交⊙O 于点 E．若 $\angle C=20°$，求 $\angle BOE$ 的度数.

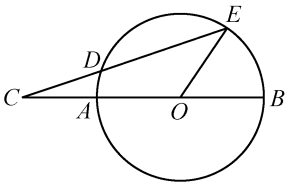
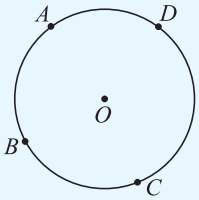
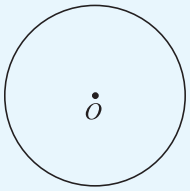


图 2－8

1. 如图，点 A、B、C、D 在⊙O 上．在图中画出以这 4 点中的 2 点为端点的弦，这样的弦共有几条？是哪几条？



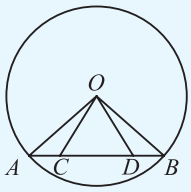
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 在图中，画出⊙O 的两条直径，依次连接这两条直径的端点，得到一个四边形．判断这个四边形的形状，并说明理由．

3. 如图，AB 是⊙O 的弦，点 C、D 在 AB 上，且 $AC=BD$．判断△OCD 的形状，并说明理由．



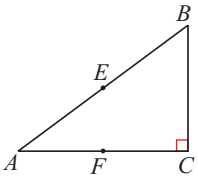
（第 3 题）

2.1 习题

1. 已知⊙O 的半径为 3 cm，A 是线段 OP 的中点．根据下列条件，判断点 A 与⊙O 的位置关系：

（1）$OP=4$ cm；（2）$OP=6$ cm；（3）$OP=8$ cm．

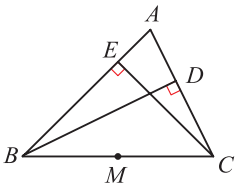
2. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=3$，E、F 分别是 AB、AC 的中点．以点 B 为圆心，BC 为半径画圆，判断点 A、C、E、F 与⊙B 的位置关系，并说明理由．



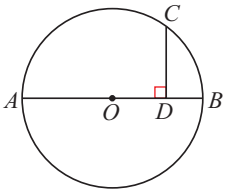
（第 2 题）

3. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=5$，$AD=12$，以点 A 为圆心画圆，使点 B 在⊙A 内，点 C 在⊙A 外．求⊙A 的半径 r 的取值范围．

4. 如图，BD、CE 是△ABC 的高，M 是 BC 的中点．点 B、C、D、E 是否在以点 M 为圆心的同一个圆上？为什么？



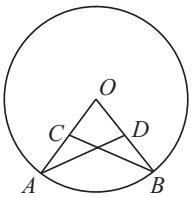
（第 4 题）



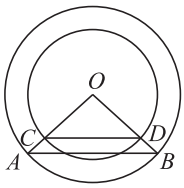
（第 5 题）

5. 如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 在⊙O 上，且 $CD\perp AB$，垂足为 D，$CD=4$，$OD=3$．求 AB 的长．

6. 如图，OA、OB 是⊙O 的半径，C、D 分别是 OA、OB 的中点．AD 与 BC 相等吗？为什么？



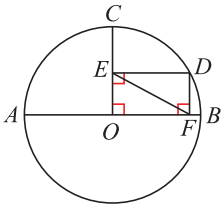
（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，在以点 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的半径 OA、OB 分别交小圆于点 C、D．AB 与 CD 有怎样的位置关系？为什么？

8. 如图，⊙O 的直径 $AB=4$，半径 $OC\perp AB$，点 D 在 $\overset{\frown}{BC}$ 上，$DE\perp OC$，$DF\perp AB$，垂足分别为 E、F．求 EF 的长．



（第 8 题）

2.2　圆的对称性

轮子绕固定轴心旋转，不论转到什么位置，都与初始位置重合．

一个圆绕圆心旋转任何角度后，都能与原来的图形重合．

圆是中心对称图形，圆心是它的对称中心．

1. 在两张透明纸片上，分别画半径相等的⊙O 和⊙O'．

2. 在⊙O 和⊙O' 中，分别画相等的圆心角∠AOB 和∠$A'O'B'$，连接 AB、$A'B'$（如图 2－9）．

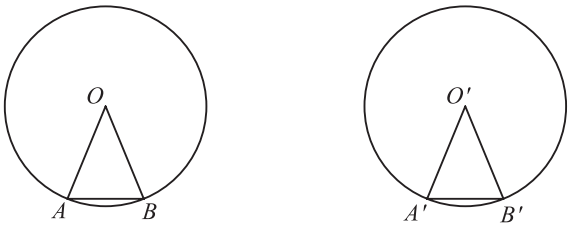


图 2－9

在所画图中还有哪些相等的线段、相等的弧？

我们可以运用图形运动的方法证实小丽、小明的猜想：

将图 2－9 中的两张纸片叠合在一起，使点 O 与点 O' 重合（如图 2－10(1)），再将⊙O' 绕点 O 旋转，使射线 $O'A'$ 与射线

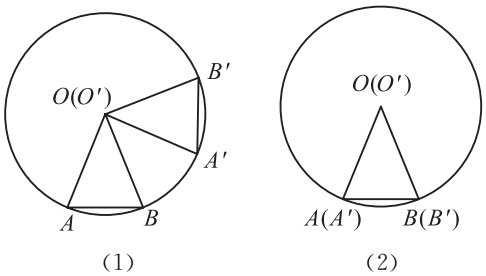


图 2－10

OA 重合．因为 $\angle A'O'B' = \angle AOB$，所以射线 $O'B'$ 与射线 OB 重合．又因为 $O'A' = OA$，$O'B' = OB$，所以点 A' 与点 A 重合，点 B' 与点 B 重合（如图 2－10(2)）．这样，$\overset{\frown}{A'B'}$ 与 $\overset{\frown}{AB}$ 重合，$A'B'$ 与 AB 重合，即 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$，$AB = A'B'$．

上面的结论，在同圆中也成立．

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等．

在同圆或等圆中，如果圆心角所对的弧相等，那么它们所对的弦相等吗？这两个圆心角相等吗？为什么？

如果圆心角所对的弦相等呢？

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等．

我们知道，将顶点在圆心的周角等分成 360 份，每一份圆心角是 1°的角．因为同圆中相等的圆心角所对的弧相等，所以整个圆也被等分成 360 份．我们把 1°的圆心角所对的弧叫做 1°的弧（如图2-11）．

一般地，$n°$ 的圆心角对着 $n°$ 的弧，$n°$ 的弧对着 $n°$ 的圆心角．

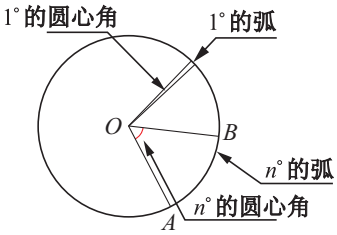


图 2－11

圆心角的度数与它所对的弧的度数相等．

例 1 如图 2－12，AB、AC、BC 是⊙O 的弦，$\angle AOC = \angle BOC$．$\angle ABC$ 与 $\angle BAC$ 相等吗？为什么？

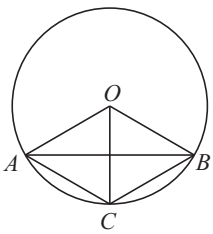


图 2－12

解： $\angle ABC$ 与 $\angle BAC$ 相等．

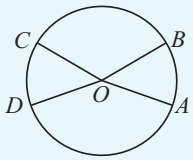
在⊙O 中，

∵ $\angle AOC = \angle BOC$，

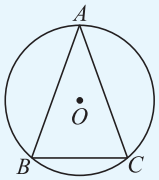
∴ $AC = BC$（在同圆中，相等的圆心角所对的弦相等）.

∴ $\angle ABC = \angle BAC$.

1. 如图，在⊙O 中，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$，$\angle AOB = 50°$. 求$\angle COD$ 的度数 .



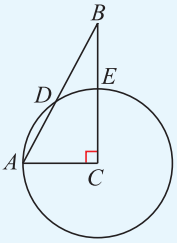
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在⊙O 中，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$，$\angle A = 40°$. 求$\angle ABC$ 的度数 .

3. 如图，在△ABC 中，$\angle C = 90°$，$\angle B = 28°$，以点 C 为圆心，CA 为半径的圆交 AB 于点 D，交 BC 于点 E . 求$\overset{\frown}{AD}$、$\overset{\frown}{DE}$的度数 .

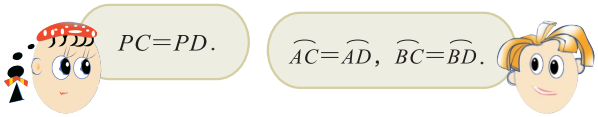


（第 3 题）

在纸上画⊙O，把⊙O 剪下并折叠，使折痕两旁的部分完全重合，你发现了什么？

圆是轴对称图形，过圆心的任意一条直线都是它的对称轴 .

画⊙O 和⊙O 的直径 AB、弦 CD，使 $AB \perp CD$，垂足为 P（如图 2－13）. 在所画图中有哪些相等的线段、相等的弧？



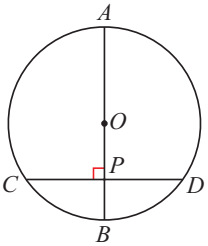


图 2－13

我们可以运用图形运动的方法证实小丽、小明的猜想：

将图 2－13 中的$\overset{\frown}{ADB}$沿直径 AB 翻折．因为圆是轴对称图形，过圆心的任意一条直线都是它的对称轴，所以$\overset{\frown}{ADB}$与$\overset{\frown}{ACB}$重合．又因为$\angle APD=\angle APC=90^\circ$，所以射线 PD 与射线 PC 重合(如图 2－14)，于是点 D 与点 C 重合．

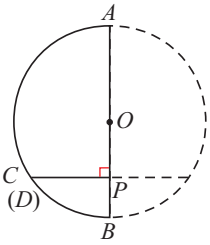


图 2－14

这样，$PC=PD$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$.

以上结论还可以用下面的方法加以证实：

如图 2－15，AB 是⊙O 的直径，CD 是⊙O 的弦，$AB\perp CD$，垂足为 P．

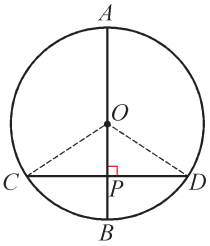


图 2－15

连接 OC、OD．

在△OCD 中，

∵ $OC=OD$，$OP\perp CD$，

∴ $PC=PD$，$\angle BOC=\angle BOD$.

∴ $\angle AOC=\angle AOD$.

∴ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$（同圆中，相等的圆心角所对的弧相等）.

于是，我们得到如下定理：

***垂直于弦的直径平分弦以及弦所对的两条弧．**

例 2 如图 2－16，在以点 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB 交小圆于点 C、D．AC 与 BD 相等吗？为什么？

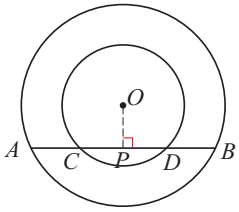


图 2－16

解： AC 与 BD 相等．

过点 O 作 $OP\perp AB$，垂足为 P．

∵ $OP\perp AB$，

∴ $AP=BP$，$CP=DP$（垂直于弦的直径平分弦）.

∴ $AP-CP=BP-DP$，

即 $AC=BD$．

拓展与延伸

如图 2－17，AB、CD 是⊙O 的两条弦，$AB /\!/ CD$．$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{BD}$相等吗？为什么？

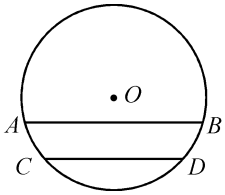
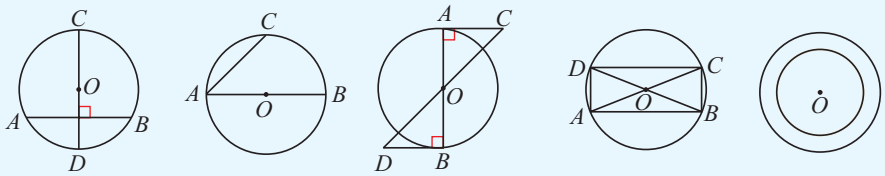


图 2－17

练习

1. 如何确定圆形纸片的圆心？说说你的想法．
2. (1) 下列图形中，哪些是轴对称图形？哪些是中心对称图形？如果是轴对称图形，指出它的对称轴；如果是中心对称图形，指出它的对称中心．



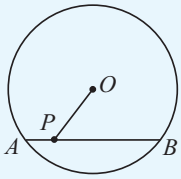
①　②　③　④　⑤

（第 2 题）

(2) 当图①中的弦 AB 为直径(AB 与 CD 互相垂直的条件不变)时，图形具有怎样的对称性？

(3) 当图②中的点 B 在⊙O 上运动到什么位置时，图形成为轴对称图形？

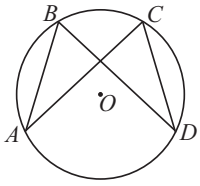
*3. 如图，⊙O 的直径为 10，弦 AB 的长为 8，点 P 在 AB 上运动．求 OP 的取值范围．



（第 3 题）

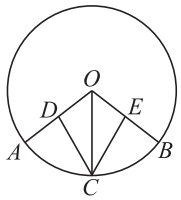
2.2 习题

1. 画一个圆和圆的一些弦，使所画图形分别满足下列条件：
   (1) 是中心对称图形，但不是轴对称图形；
   (2) 是轴对称图形，但不是中心对称图形；
   (3) 既是轴对称图形，又是中心对称图形．
2. 如图，点 A、B、C、D 在⊙O 上，且 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DC}$．$AC$ 与 BD 相等吗？为什么？

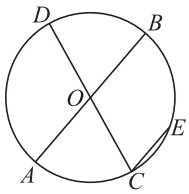


（第 2 题）

3. 如图，OA、OB、OC 是⊙O 的半径，且 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$D$、$E$ 分别是 OA、OB 的中点．CD 与 CE 相等吗？为什么？



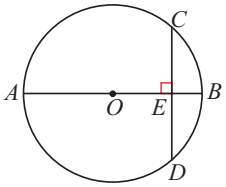
（第 3 题）



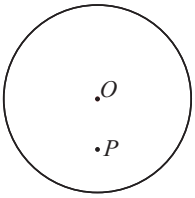
（第 4 题）

4. 如图，AB、CD 是⊙O 的直径，弦 CE // AB，$\overset{\frown}{CE}$ 为 $40°$．求∠AOC 的度数．

*5. 如图，在⊙O 中，直径 $AB=10$，弦 $CD\perp AB$，垂足为 E，$OE=3$．求弦 CD 的长．



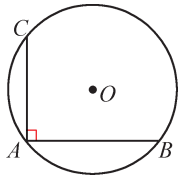
（第 5 题）



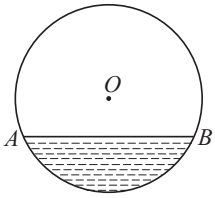
（第 6 题）

*6. 如图，过⊙O 内一点 P 画弦 AB，使 P 是 AB 的中点．

*7. 如图，AB、AC 是⊙O 的两条弦，且 $AB\perp AC$，$AB=8$，$AC=6$．求⊙O 的半径．



（第 7 题）

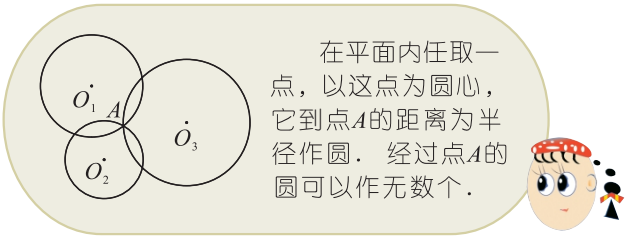


（第 8 题）

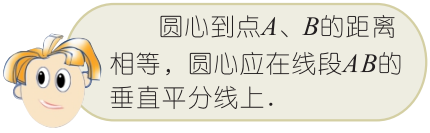
*8. 在直径为 650 mm 的圆柱形油罐内装进一些油后，其横截面如图．若油面宽 $AB=600$ mm，求油的最大深度．

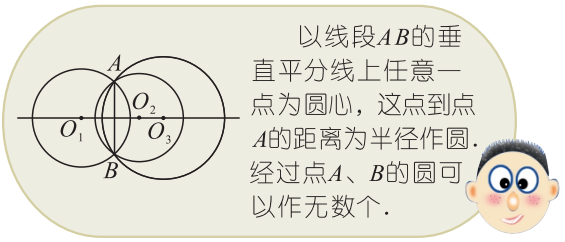
2.3　确定圆的条件

1. 怎样作一个圆，使它经过已知点 A？这样的圆可以作多少个？

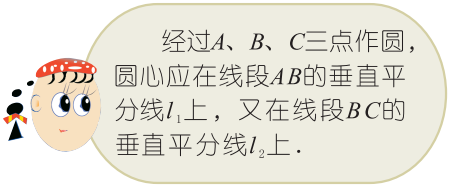


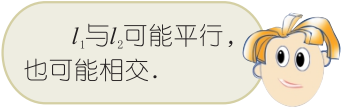
2. 怎样作一个圆，使它经过已知点 A、B？这样的圆可以作多少个？





3. 能否作一个圆，使它经过 A、B、C 三点？如果能，这样的圆可以作多少个？





如图 2－18，当 A、B、C 三点在一条直线上时，线段 AB、BC 的垂直平分线 l_1、l_2 相互平行，它们没有交点，不能作出经过 A、B、C 三点的圆．

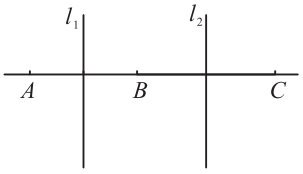


图 2－18

如图 2－19，当 A、B、C 三点不在一条直线上时，l_1 与 l_2 相交．

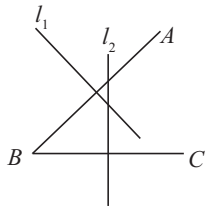


图 2－19

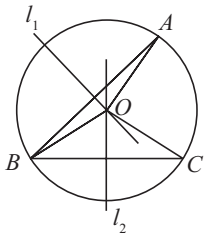


图 2－20

设 l_1 与 l_2 的交点为 O(如图 2－20)，因为 $OA=OB=OC$，所以以点 O 为圆心，OA 为半径的圆经过 A、B、C 三点．又因为 l_1 与 l_2 相交，只有一个交点，所以经过 A、B、C 三点的圆有且只有一个．

不在同一条直线上的三点确定一个圆．

三角形的三个顶点确定一个圆，这个圆叫做**三角形的外接圆**(circumcircle of triangle)．外接圆的圆心叫做**三角形的外心**(circumcenter of triangle)，这个三角形叫做圆的内接三角形．如图 2－21，⊙O 是△ABC 的外接圆，△ABC 是⊙O 的内接三角形．

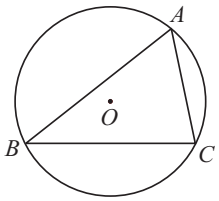
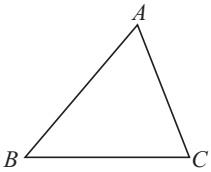


图 2－21

怎样用直尺和圆规作三角形的外接圆？

已知△ABC．根据下列作法，用直尺和圆规作△ABC 的外接圆．

作　法	图　形
1. 分别作边 AB、BC 的垂直平分线 l_1、l_2，l_1 与 l_2 的交点为 O． 2. 以点 O 为圆心，OA 为半径作圆．⊙O 就是所求作的圆．	

练习

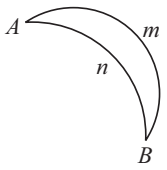
1. 如图，已知$\overset{\frown}{AB}$. 试确定$\overset{\frown}{AB}$所在圆的圆心．

（第 1 题）

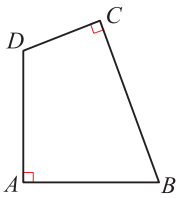
2. 通过作图我们知道，当△ABC 是锐角三角形时，外心 O 在三角形的内部．当△ABC 是直角三角形、钝角三角形时，外心 O 在什么位置？分别作出它们的外接圆，验证你的猜想．

2.3 习题

1. 如图，在围成新月形的两条弧（$\overset{\frown}{AmB}$和$\overset{\frown}{AnB}$）中，哪一条弧的半径较大？分别作出它们所在的圆，验证你的猜想．



（第 1 题）



（第 3 题）

2. 已知 $AB=4$ cm，作半径为 3 cm 的圆，使它经过 A、B 两点，这样的圆能作多少个？如果半径为 2 cm 呢？
3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C=90^\circ$．经过 A、B、D 三点作⊙O，点 C 在⊙O 上吗？试说明理由．

2.4 圆周角

观察与思考

图 2－22 中的$\angle BA_1C$、$\angle BA_2C$、$\angle BA_3C$ 有什么共同特征？

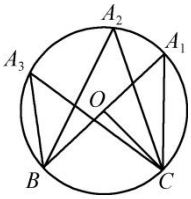


图 2－22

顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角叫做**圆周角**（angle in a circular segment）．如图 2－22，$\angle BA_1C$、$\angle BA_2C$、$\angle BA_3C$ 都是⊙O 中$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角．

操作与思考

1．在图 2－23 中，$OB\perp OC$，画$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角$\angle BAC$．$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角可以画多少个？你所画的圆周角为多少度？试说明理由．

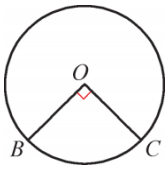
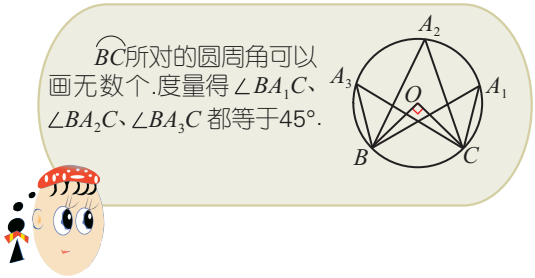
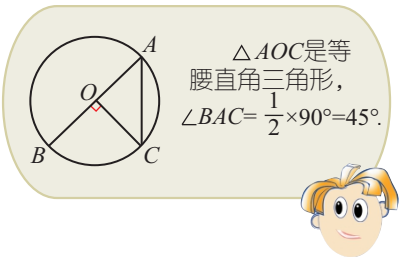


图 2－23





2．在图 2－24 中，$\angle BOC=60°$，画$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角$\angle BAC$．你所画的圆周角为多少度？为什么？你还有什么发现？

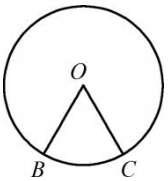
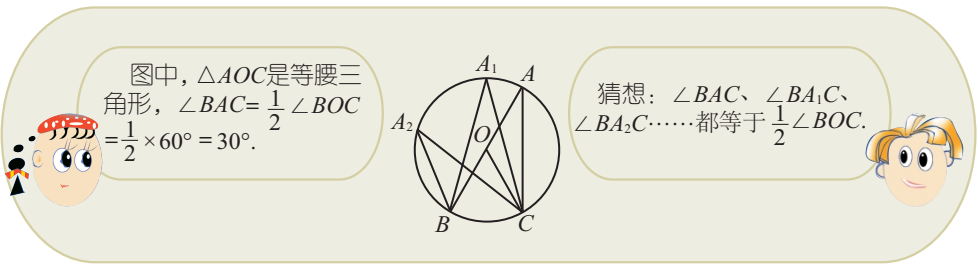
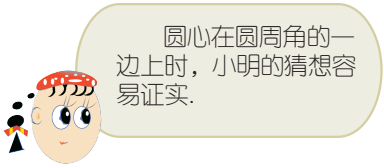
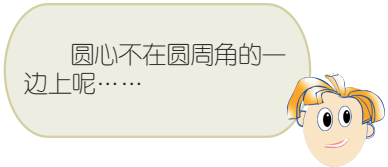


图 2－24



小明的猜想是否成立？怎样证实呢？





小明的猜想可以证实如下：

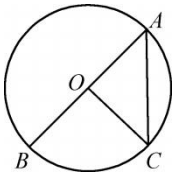
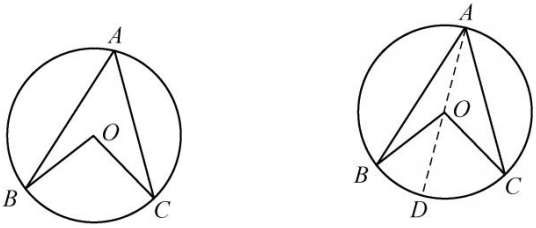


图 2－25

(1) 先研究圆心在圆周角的一边上的情形.

如图 2－25，由 $OC=OA$，可得 $\angle OCA=\angle OAC$，于是 $\angle BOC=\angle OCA+\angle OAC=2\angle OAC$，即 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

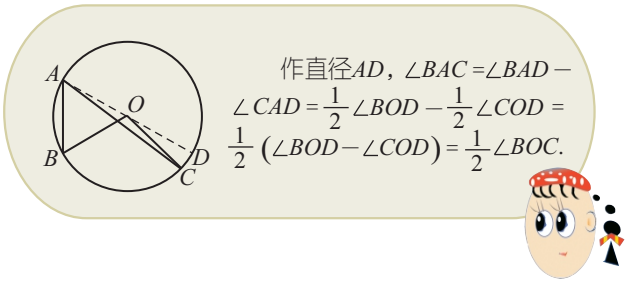
(2) 对于圆心在圆周角内部的情形(如图 2－26(1))，只要作直径 AD(如图 2－26(2))，圆周角 $\angle BAC$ 就分成了两个圆周角 $\angle BAD$、$\angle CAD$，且圆心 O 在它们的边 AD 上，由(1)可知：$\angle BAC=\angle BAD+\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BOD+\frac{1}{2}\angle COD=\frac{1}{2}(\angle BOD+\angle COD)=\frac{1}{2}\angle BOC$.



(1)　　(2)

图 2－26

(3) 对于圆心在圆周角外部的情形，你能证明 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$ 吗？



于是，我们得到如下定理：

圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半，同弧或等弧所对的圆周角相等．

因为圆心角的度数与它所对的弧的度数相等，所以我们也可以说，圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半．

例 1 如图 2－27，⊙O 的弦 AB、DC 的延长线相交于点 E，$\angle AOD = 150°$，$\overset{\frown}{BC}$ 为 $70°$．求$\angle ABD$、$\angle AED$ 的度数．

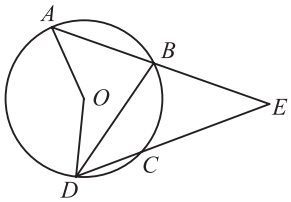


图 2－27

解： 在⊙O 中，

∵ $\angle AOD = 150°$，

∴ $\angle ABD = 75°$（圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半）．

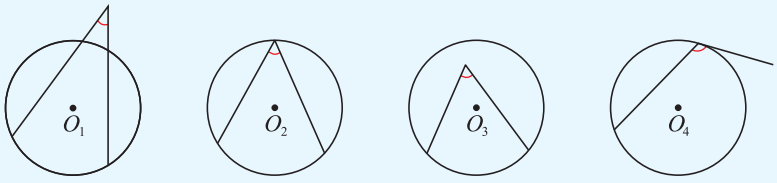
∵ $\overset{\frown}{BC}$为 $70°$，

∴ $\angle BDC = 35°$（圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半）．

又∵ $\angle ABD = \angle AED + \angle BDC$，

∴ $\angle AED = \angle ABD - \angle BDC = 75° - 35° = 40°$．

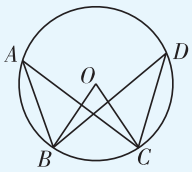
1. 下列各图中的角是否是圆周角？为什么？



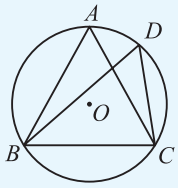
①　②　③　④

（第 1 题）

2. 如图，点 A、B、C、D 在⊙O 上，$\angle BAC=35^\circ$．求$\angle BDC$、$\angle BOC$ 的度数．



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，点 A、B、C、D 在⊙O 上，$\angle ACB=\angle BDC=60^\circ$，$BC=3$．求△$ABC$ 的周长．

1. 在图 2－28 中，BC 是⊙O 的直径，圆周角$\angle BAC$ 为多少度？为什么？

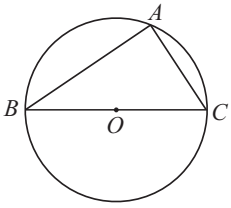
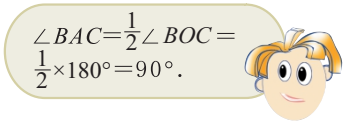


图 2－28



2. 在图 2－29 中，圆周角 $\angle BAC=90^\circ$．若连接 BC，则 BC 过圆心 O 吗？为什么？

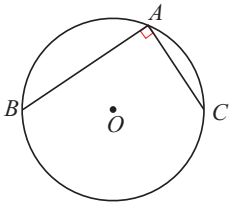
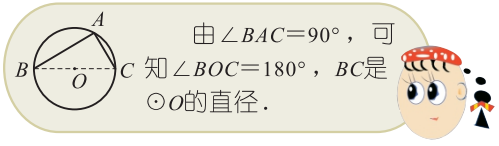


图 2－29



直径所对的圆周角是直角，90°的圆周角所对的弦是直径．

例 2 如图 2－30，AB 是⊙O 的直径，弦 CD 交 AB 于点 E，$\angle ACD = 60°$，$\angle ADC = 50°$．求 $\angle CEB$ 的度数．

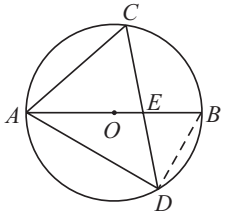


图 2－30

解： 连接 DB．

∵ AB 是⊙O 的直径，

∴ $\angle ADB = 90°$（直径所对的圆周角是直角）．

∵ $\angle ADC = 50°$，

∴ $\angle EDB = \angle ADB - \angle ADC = 90° - 50° = 40°$．

又∵ $\angle ABD = \angle ACD = 60°$（同弧所对的圆周角相等），

∴ $\angle CEB = \angle ABD + \angle EDB = 60° + 40° = 100°$．

例 3 如图 2－31，BC 是⊙O 的直径，点 A 在⊙O 上，$AD \perp BC$，垂足为 D，$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AB}$，$BE$ 分别交 AD、AC 于点 F、G．判断△FAG 的形状，并说明理由．

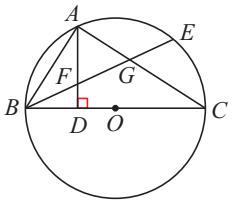


图 2－31

解： △FAG 是等腰三角形．

∵ BC 是⊙O 的直径，

∴ $\angle BAC = 90°$（直径所对的圆周角是直角）．

∴ $\angle ABE + \angle AGB = 90°$．

∵ $AD \perp BC$，

∴ $\angle ACB + \angle DAC = 90°$．

又∵ $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AB}$，

∴ $\angle ABE = \angle ACB$（等弧所对的圆周角相等）．

∴ $\angle AGB = \angle DAC$．

∴ △FAG 是等腰三角形．

拓展与延伸

在例 3 中，若点 E 与点 A 在直径 BC 的两侧，BE、AC 的延长线交于点 G，AD 的延长线交 BE 于点 F，其余条件不变(如图2－32)，例 3 中的结论还成立吗？

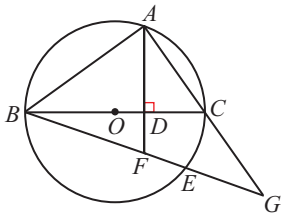
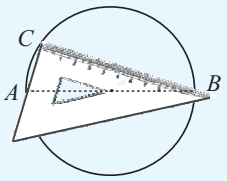


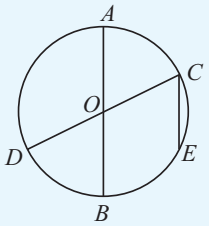
图 2－32

练习

1. 利用三角尺可以确认图中的弦 AB 是圆的直径，为什么？你能用这种方法确定一个圆形工件的圆心吗？



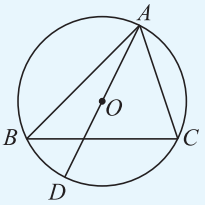
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，AB、CD 是 ⊙O 的直径，弦 $CE /\!/ AB$．$\overset{\frown}{BD}$与$\overset{\frown}{BE}$相等吗？为什么？

3. 如图，⊙O 是△ABC 的外接圆，直径 $AD = 4$，$\angle ABC = \angle DAC$．求 AC 的长．



（第 3 题）

一个四边形的 4 个顶点都在同一个圆上，这个四边形叫做**圆的内接四边形**(quadrilateral in a circle)，这个圆叫做四边形的外接圆．如图 2－33，四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，⊙O 是四边形$ABCD$ 的外接圆．

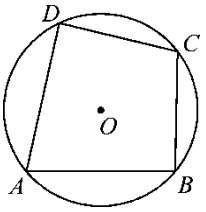


图 2－33

1. 如图 2－34，在⊙O 的内接四边形 $ABCD$ 中，BD 是⊙O 的直径．$\angle A$ 与 $\angle C$、$\angle ABC$ 与 $\angle ADC$ 有怎样的数量关系？

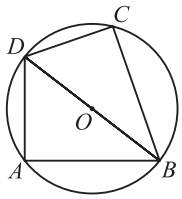


图 2－34

2. 如图 2－35，若圆心 O 不在⊙O 的内接四边形 $ABCD$ 的对角线上，小明、小丽发现的结论是否仍然成立？

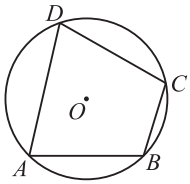
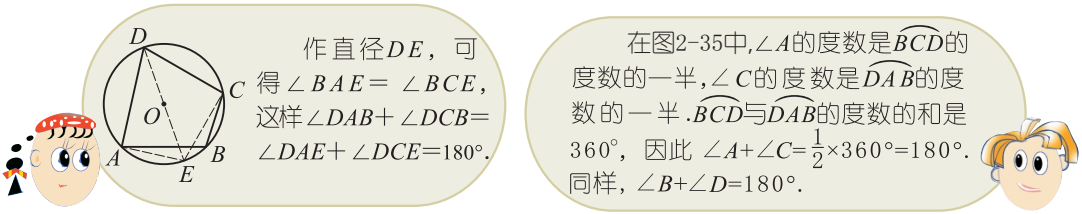


图 2－35



于是，我们得到如下定理：

圆内接四边形的对角互补．

例 4 如图 2－36，在⊙O 的内接四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle C=110°$．若点 E 在$\overset{\frown}{AD}$上，求$\angle E$ 的度数．

解： 连接 BD．

∵ 四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，

∴ $\angle BAD+\angle C=180°$（圆内接四边形的对角互补）．

∴ $\angle BAD=180°-\angle C=180°-110°=70°$．

在△ABD 中，

∵ $AB=AD$，$\angle BAD=70°$，

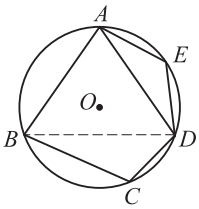


图 2－36

$\therefore \angle ABD = \angle ADB = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 70^\circ) = 55^\circ$.

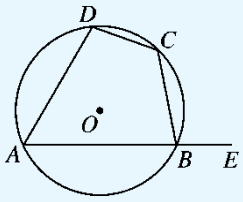
又∵ 四边形 $ABDE$ 是⊙O 的内接四边形，

∴ $\angle ABD + \angle E = 180^\circ$（圆内接四边形的对角互补）.

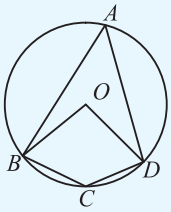
∴ $\angle E = 180^\circ - \angle ABD = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$.

练习

1. 圆的内接平行四边形是矩形吗？为什么？
2. 如图，四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，$\angle CBE$ 是它的一个外角．若 $\angle D = 100^\circ$，求 $\angle CBE$ 的度数．



（第 2 题）

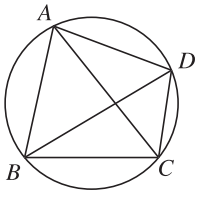


（第 3 题）

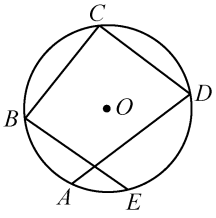
3. 如图，四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，$\angle C = 130^\circ$．求 $\angle BOD$ 的度数．

2.4 习题

1. 如图，点 A、B、C、D 在同一个圆上．图中有几对相等的圆周角？是哪几对？



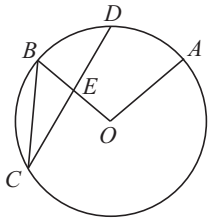
（第 1 题）



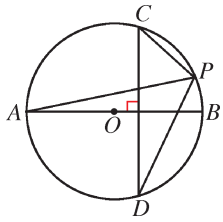
（第 2 题）

2. 如图，点 A、B、C、D、E 在⊙O 上，且 $\overset{\frown}{AE}$ 为 40°．求 $\angle B + \angle D$ 的度数．

3. 如图，点 A、B、C 在⊙O 上，D 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，CD 交 OB 于点E．若 $\angle AOB=100^\circ$，$\angle OBC=55^\circ$，求$\angle OEC$ 的度数．



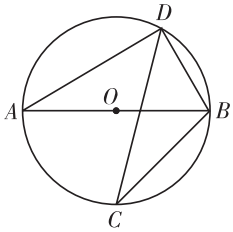
（第 3 题）



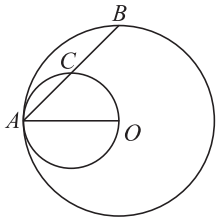
（第 4 题）

*4. 如图，AB 是⊙O 的直径，CD 是⊙O 的弦，$CD\perp AB$，P 是$\overset{\frown}{CD}$上一点（不与点 C、D 重合）．$\angle APC$ 与$\angle APD$ 相等吗？为什么？

5. 如图，AB 是⊙O 的直径，CD 是⊙O 的弦，$\angle DCB=30^\circ$．求$\angle ABD$ 的度数．



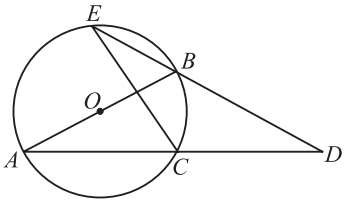
（第 5 题）



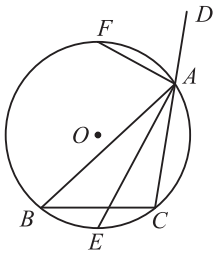
（第 6 题）

*6. 如图，AB 是⊙O 的弦，以 OA 为直径的圆交 AB 于点 C．若 $AB=10$，求 AC 的长．

7. 如图，AB 是⊙O 的直径，D 是弦 AC 的延长线上一点，且 $CD=AC$，DB 的延长线交⊙O 于点 E．CD 与 CE 相等吗？为什么？



（第 7 题）

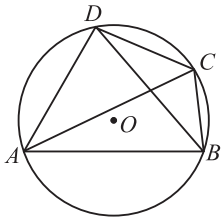


（第 8 题）

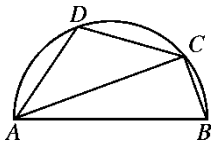
8. 如图，△ABC 是⊙O 的内接三角形，$\angle BAD$ 是△ABC 的一个外角，$\angle BAC$、$\angle BAD$ 的平分线分别交⊙O 于点 E、F．若连接 EF，则 EF 与 BC 有怎样的位置关系？为什么？

9. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的度数之比为 $3:4:6$．求四边形 $ABCD$ 各内角的度数．

10. 如图，在⊙O 的内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60^\circ$，$\angle ACB=70^\circ$．求 $\angle BCD$ 和 $\angle ABD$ 的度数．



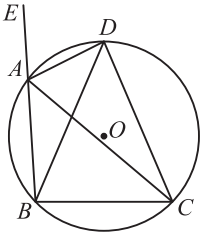
（第 10 题）



（第 11 题）

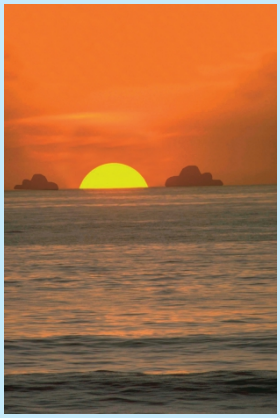
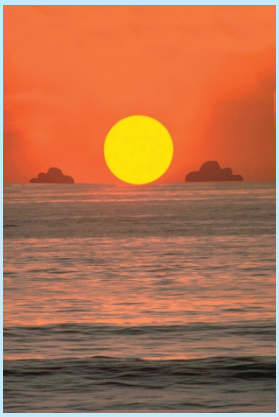
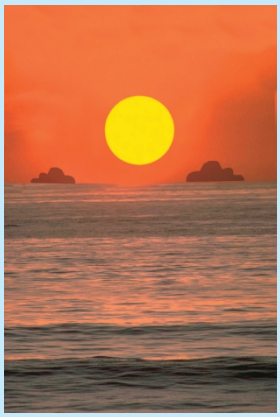
11. 如图，AB 是半圆的直径，C、D 是半圆上的两点，且 $\angle BAC=20^\circ$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$．求四边形 $ABCD$ 各内角的度数．

12. 如图，在⊙O 的内接四边形 $ABCD$ 中，$DB=DC$，$\angle DAE$ 是四边形 $ABCD$ 的一个外角．$\angle DAE$ 与 $\angle DAC$ 相等吗？为什么？



（第 12 题）

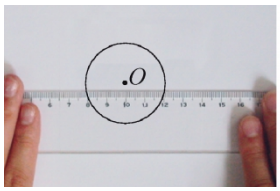
2.5 直线与圆的位置关系

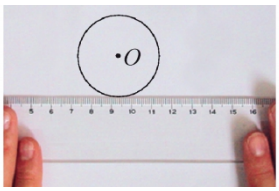




山水相接的地方出现了一道红霞．过了一会儿，那里出现了太阳的小半边脸．慢慢儿，一纵一纵地使劲儿向上升．到了最后，它终于冲破了云霞，完全跳出了海面．

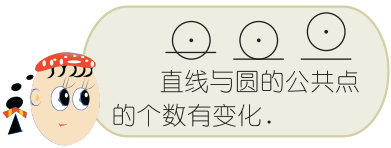
——巴　金

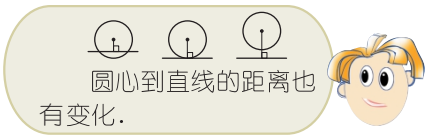
操作与思考





先在纸上画一个圆，再将一把直尺在纸上平移．如果把直尺的边缘看作一条直线，那么在直尺平移的过程中，直线与圆的位置关系怎样变化？这种变化怎样用数量之间的关系来描述？





直线与圆有两个公共点时，叫做直线与圆相交．

直线与圆有唯一公共点时，叫做直线与圆相切，这条直线叫做**圆的切线**(tangent line of a circle)，这个公共点叫做**切点**(tangent point)．

直线与圆没有公共点时，叫做直线与圆相离．

如图 2－37，$OD\perp l$，垂足为 D，⊙O 的半径为 r.

在图 2－37(1)中，直线 l 与⊙O 相交，$OD<r$；

在图 2－37(2)中，直线 l 与⊙O 相切，$OD=r$；

在图 2－37(3)中，直线 l 与⊙O 相离，$OD>r$.

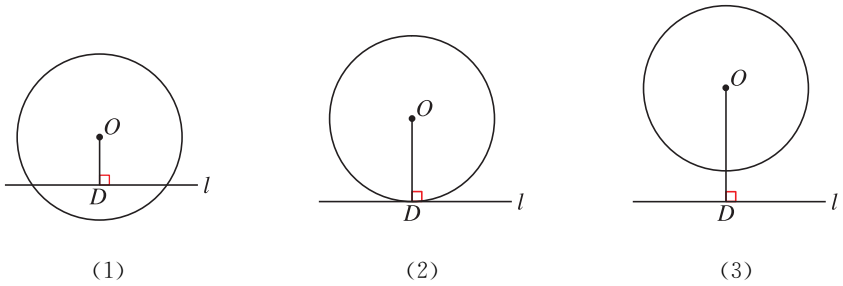


图 2－37

于是，我们得到如下结论：

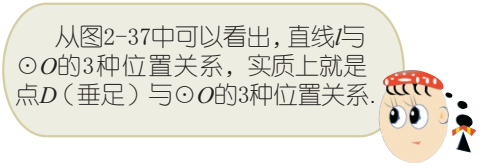
如果⊙O 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d，那么

直线 l 与⊙O 相交⇔$d<r$；

直线 l 与⊙O 相切⇔$d=r$；

直线 l 与⊙O 相离⇔$d>r$.

点与圆有 3 种不同的位置关系，直线与圆也有 3 种不同的位置关系，这两者之间有怎样的联系？



例 1 已知 $\angle BAC=45°$，点 O 在 AC 上，且 $AO=4$，以点 O 为圆心，r 为半径画圆．根据下列 r 的值，判断 AB 所在直线与⊙O 的位置关系：

(1) $r=2$；　(2) $r=2\sqrt{2}$；　(3) $r=3$．

解： 过点 O 作 $OD\perp AB$，垂足为 D(如图 2－38)．

在 Rt△AOD 中，

∵ $\angle A=45°$，

∴ $\angle AOD=\angle A$，$OD=AD$．

又∵ $OD^2+AD^2=AO^2$，$AO=4$，

∴ $2OD^2=16$，$OD=2\sqrt{2}$，

即　圆心 O 到 AB 所在直线的距离 $d=2\sqrt{2}$．

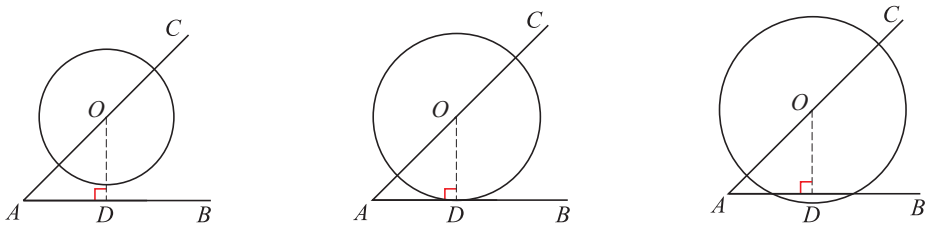


图 2－38

(1) 当 $r=2$ 时，$d>r$，AB 所在直线与⊙O 相离(如图2－38(1))；

(2) 当 $r=2\sqrt{2}$ 时，$d=r$，AB 所在直线与⊙O 相切(如图 2－38(2))；

(3) 当 $r=3$ 时，$d<r$，AB 所在直线与⊙O 相交(如图 2－38(3))．

1. 填表：

直线与圆的位置关系	图　形	公共点个数	直线的名称	公共点名称	圆心到直线的距离 d 与半径 r 的关系
相　交					
相　切					
相　离					

2. 已知⊙O 的直径为 8，圆心 O 到直线 l 的距离为 5．直线 l 与⊙O 有怎样的位置关系？圆心 O 到直线 l 的距离为 4 或 3 呢？

操作与思考

在图 2－39 中，经过⊙O 的半径 OD 的外端点 D，作直线 $l\perp OD$，直线 l 与⊙O 有怎样的位置关系？为什么？

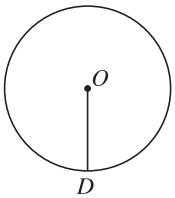
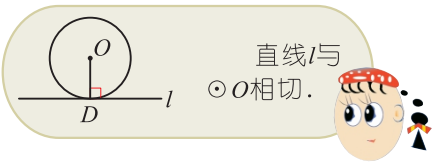


图 2－39



如图 2－40，因为圆心 O 到直线 l 的距离 OD 等于⊙O 的半径 r，所以直线 l 与⊙O 相切．

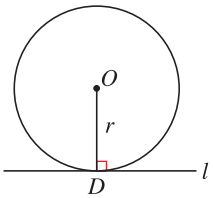


图 2－40

于是，我们得到如下结论：

经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线．

思考与探索

如图 2－41，直线 l 是⊙O 的切线，切点为 D．直线 l 与半径 OD 有怎样的位置关系？为什么？

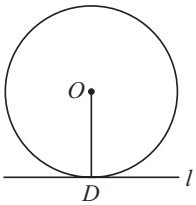
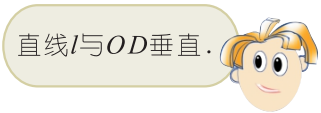


图 2－41



我们可以用反证法证明 $l\perp OD$．

假设直线 l 与 OD 不垂直，过圆心 O 作 $OD'\perp l$，垂足为 D'（如图2－42）．因为直线 l 与⊙O 相切，所以圆心 O 到直线 l 的距离 OD' 等于⊙O 的半径，点 D' 在⊙O 上．这样，直线 l 与⊙O 有两个公共点 D、D'．这与“直线 l 与⊙O 相切”矛盾，所以 $l\perp OD$．

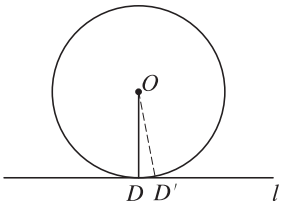


图 2－42

于是，我们得到如下结论：

圆的切线垂直于经过切点的半径．

例 2 如图 2－43，$\triangle ABC$ 是$\odot O$ 的内接三角形，AB 是$\odot O$ 的直径，$\angle CAD=\angle ABC$．判断直线 AD 与$\odot O$ 的位置关系，并说明理由．

解： 直线 AD 与$\odot O$ 相切．

$\because$ AB 是$\odot O$ 的直径，

$\therefore$ $\angle ACB=90^\circ$．

$\therefore$ $\angle ABC+\angle BAC=90^\circ$．

又$\because$ $\angle CAD=\angle ABC$，

$\therefore$ $\angle CAD+\angle BAC=90^\circ$，

即 $AD\perp AB$．

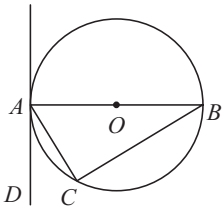


图 2－43

$\therefore$ 直线 AD 与$\odot O$ 相切(经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线)．

例 3 如图 2－44，AB 是$\odot O$ 的直径，弦 AD 平分$\angle BAC$，过点 D 的切线交 AC 于点 E．DE 与 AC 有怎样的位置关系？为什么？

解： DE 与 AC 互相垂直．

连接 OD．

$\because$ $OD=OA$，

$\therefore$ $\angle ODA=\angle OAD$．

又$\because$ $\angle OAD=\angle CAD$，

$\therefore$ $\angle ODA=\angle CAD$．

$\therefore$ $OD\parallel AC$．

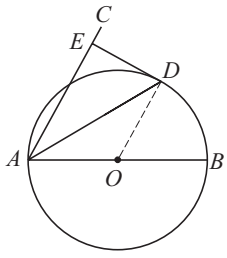


图 2－44

$\because$ DE 是$\odot O$ 的切线，

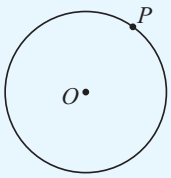
$\therefore$ $DE\perp OD$(圆的切线垂直于经过切点的半径)，

即 $\angle ODE=90^\circ$．

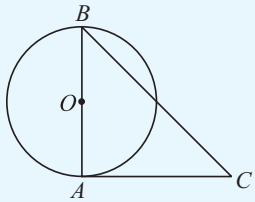
于是，$\angle DEA=90^\circ$，$DE\perp AC$．

练习

1. 如图，点 P 在⊙O 上，过点 P 画⊙O 的切线．



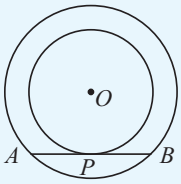
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在△ABC 中，$\angle ABC=45^\circ$，$AB=AC$．直线 AC 与以 AB 为直径的⊙O 有怎样的位置关系？为什么？

*3. 如图，在以点 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB 切小圆于点 P．PA 与 PB 相等吗？为什么？

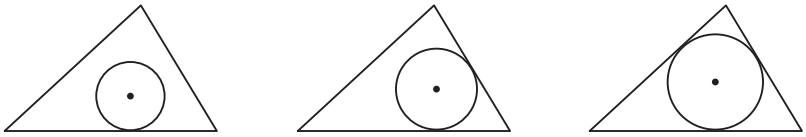


（第 3 题）

尝试与交流

要从一块三角形铁皮余料中剪一个圆，如何使剪得的圆面积最大？

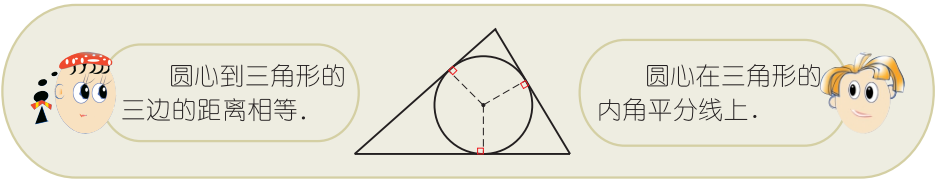
观察图 2－45 可以发现，要使剪得的圆面积最大，这个圆应与三角形的各边都相切．



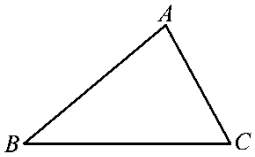
（1）　（2）　（3）

图 2－45

如何作一个圆，使它与已知三角形的各边都相切？



已知△ABC．根据下列作法，用直尺和圆规作⊙O，使它与△ABC的各边都相切．

作　法	图　形
1. 分别作∠ABC、∠ACB的平分线BM、CN，BM与CN的交点为O． 2. 过点O，作OD⊥BC，垂足为D． 3. 以点O为圆心，OD为半径作⊙O．⊙O就是所求作的圆．	

与三角形各边都相切的圆叫做**三角形的内切圆**(inscribed circle of triangle)．内切圆的圆心叫做**三角形的内心**(incenter of triangle)，这个三角形叫做圆的外切三角形．如图 2－46，⊙O是△ABC的内切圆，△ABC是⊙O的外切三角形．

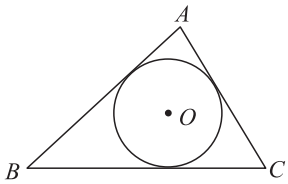


图 2－46

例 4　如图 2－47，⊙O是△ABC的内切圆，切点分别为D、E、F，∠B＝60°，∠C＝70°．求∠EDF的度数．

解：连接OE、OF．

在△ABC中，

∠A＝180°－(∠B＋∠C)

＝180°－(60°＋70°)

＝50°．

∵ ⊙O是△ABC的内切圆，

∴ AB⊥OF，AC⊥OE(圆的切线垂直于经过切点的半径)．

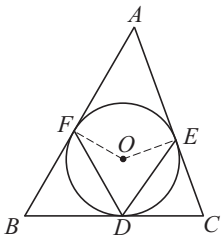


图 2－47

在四边形 $AFOE$ 中，

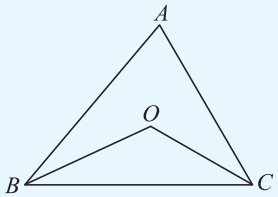
$$\begin{aligned}\angle EOF &= 360^\circ - (\angle A + \angle AFO + \angle AEO)\\ &= 360^\circ - (50^\circ + 90^\circ + 90^\circ)\\ &= 130^\circ,\end{aligned}$$

$$\therefore \angle EDF = \frac{1}{2}\angle EOF = 65^\circ.$$

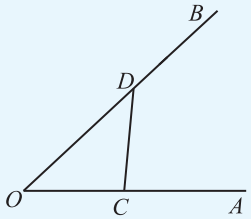
1. 如图，点 O 是△ABC 的内心．根据下列条件，求∠BOC 的度数．

(1) $\angle ABC = 50^\circ$，$\angle ACB = 60^\circ$；

(2) $\angle A = 50^\circ$．



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，点 C、D 分别在射线 OA、OB 上．求作⊙P，使它与 OA、OB、CD 都相切．

如图 2－48，PA、PB 是⊙O 的切线，切点分别为 A、B．PA 与 PB 相等吗？

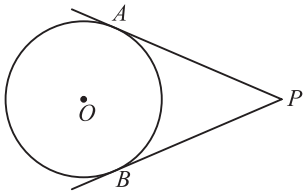
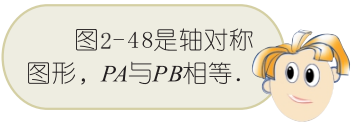


图 2－48



我们可以用下面的方法证实小明、小丽的猜想：

在图 2－48 中，连接 OA、OB、OP（如图 2－49）.

∵ PA、PB 是⊙O 的切线，

∴ $PA \perp OA$，$PB \perp OB$（圆的切线垂直于经过切点的半径），

即 △POA、△POB 是直角三角形.

又∵ $OA = OB$，$OP = OP$，

∴ △POA ≌ △POB.

∴ $PA = PB$.

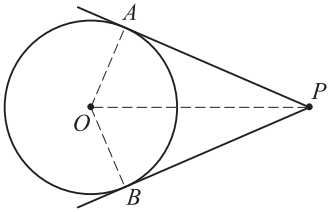


图 2－49

我们也可以运用图形运动的方法证实 $PA = PB$.

在图 2－49 中，由 $OA \perp PA$，$OB \perp PB$，$OA = OB$，可知点 O 在 ∠APB 的平分线上. 于是，把图 2－49 中的 PB 沿直线 OP 翻折，射线 PB 与射线 PA 重合（如图 2－50）. 因为过点 O 有且只有一条直线与 PA（PB）垂直，所以 OB 与 OA 重合，即点 B 与点 A 重合，$PA = PB$.

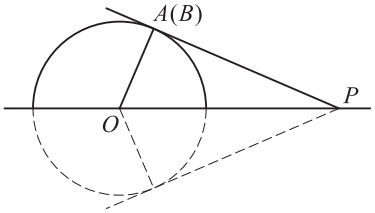


图 2－50

在经过圆外一点的圆的切线上，这点与切点之间的线段的长，叫做这点到圆的**切线长**（length of the tangent）.

于是，我们得到如下定理：

* **过圆外一点所画的圆的两条切线长相等.**

例 5　如图 2－51，在以点 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB、AC 分别与小圆相切于点 D、E．AB 与 AC 相等吗？为什么？

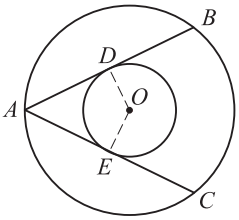


图 2－51

解： AB 与 AC 相等．

连接 OD、OE．

∵ AB、AC 是小圆的两条切线，切点分别为 D、E，

∴ $AD = AE$（过圆外一点所画的圆的两条切线长相等），

$AB \perp OD$，$AC \perp OE$（圆的切线垂直于经过切点的半径）．

又∵ AB、AC 是大圆的弦，$OD \perp AB$，$OE \perp AC$，

∴ $AB = 2AD$，$AC = 2AE$．

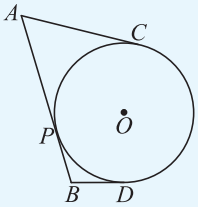
∴ $AB = AC$．

拓展与延伸

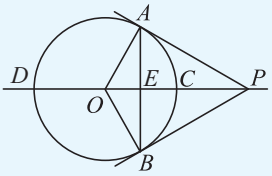
在图 2－51 中，如果连接 DE、BC，那么 DE 与 BC 有怎样的关系？为什么？

练习

*1. 如图，AB、AC、BD 是⊙O 的切线，切点分别为 P、C、D．若 $AB = 5$，$AC = 3$，求 BD 的长．



（第 1 题）



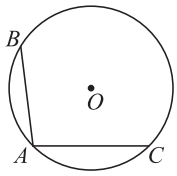
（第 2 题）

*2. 如图，PA、PB 是⊙O 的切线，切点分别为 A、B，直线 OP 交⊙O 于点 C、D，交 AB 于点 E．根据题设条件，你能得到哪些结论？为什么？

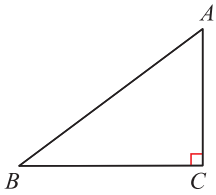
2.5 习题

1. 已知⊙O的直径为10，圆心O到直线l的距离为3．直线l与⊙O有怎样的位置关系？圆心O到直线l的距离为5或8呢？

2. 如图，⊙O的半径为$2\sqrt{2}$，AB、AC是⊙O的两条弦，$AB=2\sqrt{3}$，$AC=4$．如果以点O为圆心作一个与AC相切的圆，那么这个圆的半径是多少？它与AB所在直线有怎样的位置关系？



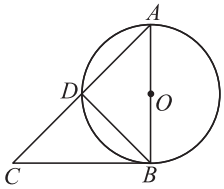
（第2题）



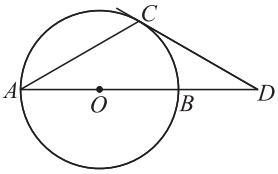
（第3题）

3. 如图，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，以点C为圆心，r为半径画圆．根据下列r的值，判断圆与AB所在直线的位置关系：(1) $r=2$；(2) $r=2.4$；(3) $r=3$．

4. 如图，AB是⊙O的直径，AD是⊙O的弦，过点B的切线交AD的延长线于点C．若$AD=DC$，求$\angle ABD$的度数．



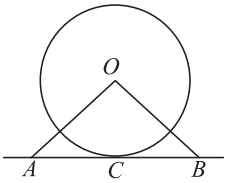
（第4题）



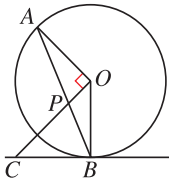
（第5题）

5. 如图，AB是⊙O的直径，AC是⊙O的弦，过点C的切线交AB的延长线于点D．若$\angle D=30°$，求$\angle A$的度数．

6. 如图，直线AB经过⊙O上一点C，且$OA=OB$，$CA=CB$．直线AB与⊙O相切吗？为什么？



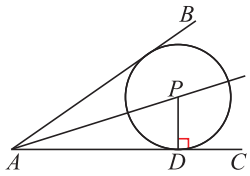
（第6题）



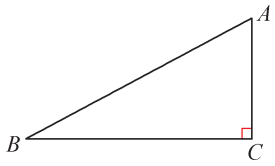
（第7题）

7. 如图，AB是⊙O的弦，点C在过点B的切线上，且$OC\perp OA$，OC交AB于点P．判断△CBP的形状，并说明理由．

8. 如图，P 是$\angle BAC$ 的平分线上一点，$PD\perp AC$，垂足为 D．AB 与以点 P 为圆心，PD 为半径的圆相切吗？为什么？



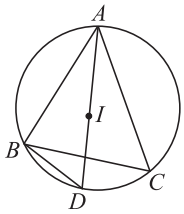
（第 8 题）



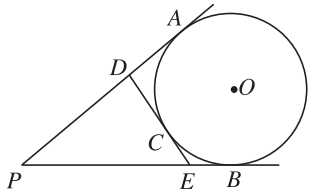
（第 9 题）

9. 如图，已知 Rt$\triangle ABC$($\angle C=90°$)．作一个圆，使圆心 O 在 AC 上，且与 AB、BC 所在直线相切(不写作法，保留作图痕迹，并说明作图的理由)．

10. 如图，I 是$\triangle ABC$ 的内心，AI 的延长线交$\triangle ABC$ 的外接圆于点 D．BD 与 ID 相等吗？为什么？



（第 10 题）

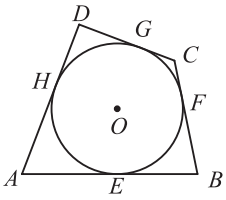


（第 12 题）

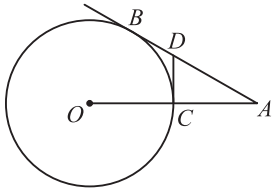
11. $\triangle ABC$ 的周长为 24，面积为 24，求它的内切圆的半径．

*12. 如图，PA、PB 是$\odot O$ 的切线，切点分别为 A、B，点 C 在$\overset{\frown}{AB}$ 上，过点 C 的切线分别交 PA、PB 于点 D、E．设 $PA=10$，求$\triangle PDE$ 的周长．

*13. 如图，四边形 $ABCD$ 的各边与$\odot O$ 分别相切于点 E、F、G、H．AB、BC、CD、DA 之间有怎样的数量关系？为什么？



（第 13 题）



（第 14 题）

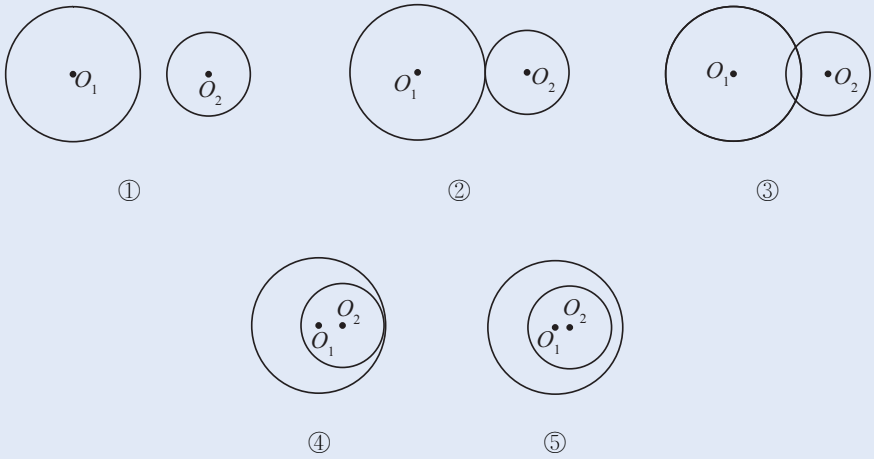
*14. 如图，AB 是$\odot O$ 的切线，切点为 B，AO 交$\odot O$ 于点 C，过点 C 的切线交 AB 于点 D．若 $AD=2BD$，$CD=2$，求$\odot O$ 的半径．

阅读

圆与圆的位置关系

借助学习点与圆、直线与圆的位置关系所获得的经验，我们来探索圆与圆的位置关系．

在平面内，两圆相对运动，可以得到下列不同的位置关系(如图(1))：

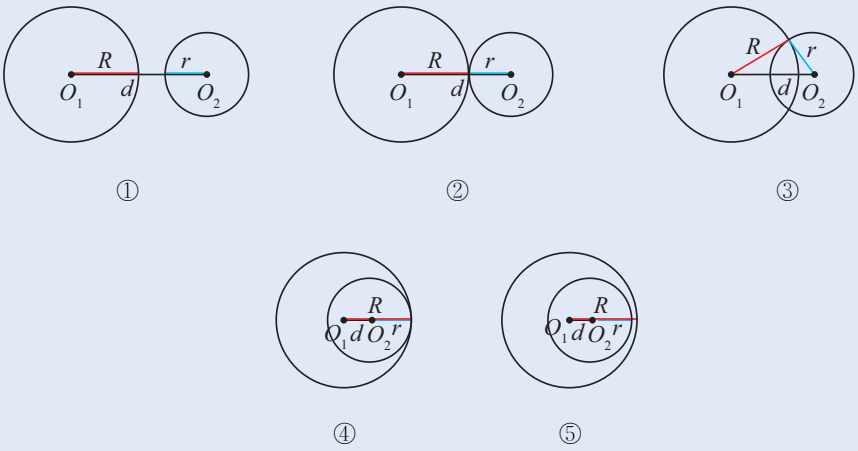


图(1)

这 5 种位置关系分别称为两圆外离、外切、相交、内切和内含．

像点与圆、直线与圆的位置关系那样，圆与圆的位置关系与相应的数量关系之间也有着内在的联系．

如图(2)，设⊙O_1、⊙O_2 的半径分别为 R、r，圆心 O_1、O_2 之间的距离为 d，



图(2)

观察图(2)，我们可以用 d 与 R、r 之间的数量关系来描述两圆的位置关系：

两圆外离 $\Leftrightarrow d > R + r$；

两圆外切 $\Leftrightarrow d = R + r$；

两圆相交 $\Leftrightarrow R - r < d < R + r (R \geqslant r)$；

两圆内切 $\Leftrightarrow d = R - r (R > r)$；

两圆内含 $\Leftrightarrow d < R - r (R > r)$.

图形的位置关系决定了相应数量之间的关系；反过来，由数量之间的关系可以判定图形的位置关系.

2.6 正多边形与圆

我们已经学习过等边三角形(正三角形)、正方形(正四边形). 正三角形、正四边形的各边相等，各角也相等.

生活中，各边相等、各角也相等的多边形的形象处处可见. 例如，图 2－52 中霓虹灯的边框、螺帽的边缘等.

(1)　　(2)

图 2－52

各边相等、各角也相等的多边形叫做**正多边形**(regular polygon).

我们知道，三边相等的三角形是正三角形，三角相等的三角形也是正三角形. 能否说各边相等的多边形是正多边形？或者说各角相等的多边形是正多边形？试举例说明.

如图 2－53，已知⊙O.

(1) 用量角器把⊙O 五等分，依次连接各等分点，得五边形 $ABCDE$；

(2) 五边形 $ABCDE$ 是正五边形吗？为什么？

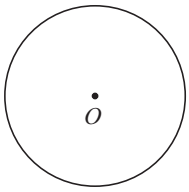


图 2－53

如图 2－54，点 A、B、C、D、E 把⊙O 五等分.

$\because \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EA}$,

$\therefore AB = BC = CD = DE = EA$,

$\overset{\frown}{BCE} = \overset{\frown}{CDA}$.

$\therefore \angle A = \angle B$.

同理 $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$.

$\therefore$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形.

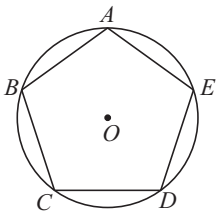


图 2－54

数学实验室

如图 2－55，点 A、B、C、D、E、F 把 ⊙O 六等分．

（1）在一张透明纸上画与图 2－55 形状、大小相同的图形，并把它们叠合在一起；

（2）把所画图形绕点 O 旋转 60°，你发现了什么？再旋转 60°呢？

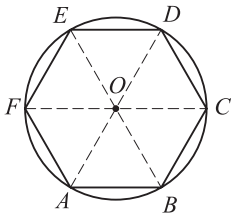


图 2－55

你能用图形运动的方法证实六边形 $ABCDEF$ 是正六边形吗？

一般地，只要用量角器把一个圆 $n(n \geqslant 3)$ 等分，依次连接各等分点就能得到这个圆的内接正 n 边形，这个圆是这个正 n 边形的外接圆．正多边形的外接圆的圆心叫做正多边形的中心，外接圆的半径叫做正多边形的半径．

例　如图 2－56，正六边形 $ABCDEF$ 的半径为 4．求这个正六边形的周长和面积．

解： 作半径 OA、OB．

根据题意，得 $\angle AOB = \dfrac{360°}{6} = 60°$．

$\because OA = OB$，

$\therefore \triangle OAB$ 为等边三角形，$AB = OA = 4$．

正六边形的周长 $l = 4 \times 6 = 24$．

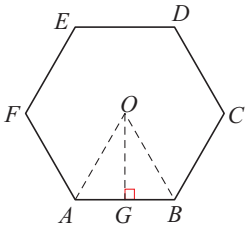


图 2－56

过点 O 作 $OG \perp AB$，垂足为 G．

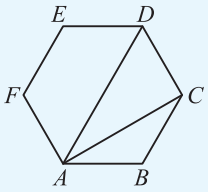
在 Rt$\triangle OAG$ 中，

$\because OA = 4, AG = \dfrac{1}{2}AB = 2$，

$\therefore OG = \sqrt{OA^2 - AG^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$．

正六边形的面积 $S = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \times 6 = 24\sqrt{3}$．

1. 求半径为 r 的圆内接正方形的边长和面积．
2. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 5，求对角线 AD、AC 的长．



（第 2 题）

图 2－57 中的正多边形，哪些是轴对称图形？哪些是中心对称图形？如果是轴对称图形，画出它的对称轴；如果是中心对称图形，找出它的对称中心．

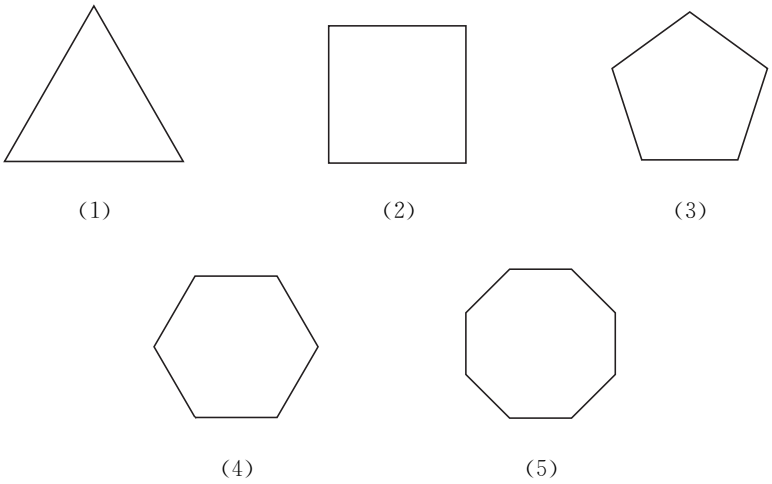


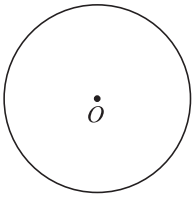
图 2－57

正多边形都是轴对称图形，一个正 n 边形共有 n 条对称轴，每条对称轴都经过正 n 边形的中心．一个正多边形，如果有偶数条边，那么它又是中心对称图形，对称中心就是这个正多边形的中心．

用直尺和圆规可以作出一些特殊的正多边形．

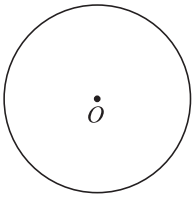
操作与思考

1. 作正方形．

作　法	图　形
1. 在⊙O 中作两条互相垂直的直径 AC、BD． 2. 依次连接 A、B、C、D 各点． 四边形 $ABCD$ 就是所求作的正方形．	

如何作正八边形？

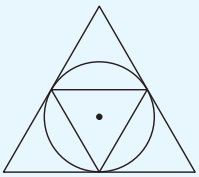
2. 作正六边形．

作　法	图　形
1. 在⊙O 中任意作一条直径 AD． 2. 分别以点 A、D 为圆心，⊙O 的半径为半径作弧，与 ⊙O 相交于点 B、F 和点 C、E． 3. 依次连接 A、B、C、D、E、F 各点． 六边形 $ABCDEF$ 就是所求作的正六边形．	

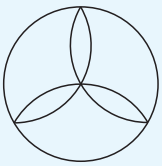
如何作正三角形、正十二边形？

练习

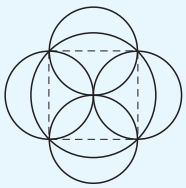
1. 将一个正十边形绕它的中心至少旋转多少度，就能与它自身重合？正五边形呢？
2. 图中的两个三角形分别是圆的外切正三角形和内接正三角形．这个图形是轴对称图形吗？如果是，画出它的对称轴．
3. 用等分圆周的方法画出下列图形：



（第 2 题）



①



②

（第 3 题）

读一读

判定正多边形的条件

三边相等的三角形是正三角形.

各边相等、各角也相等的多边形是正多边形.

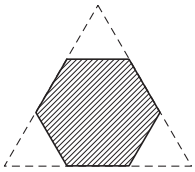
不难发现，这两个定义有差异．这是因为：在三角形中，由三角形的三条边相等可以推出它的三个角也相等，因而正三角形的定义中只需要“三边相等”的条件．但是，边数大于 3 的多边形的各边(或各角)相等时，它的各角(或各边)不一定相等．例如，菱形的四条边相等，但它的四个角不都相等；矩形的四个角相等，但它的四条边不都相等．因而边数大于 3 的正多边形定义中需要“各边相等、各角也相等”的条件.

由此可见，三角形(特殊的多边形)具有稳定性，边数大于 3 的多边形不具有稳定性，使正三角形的定义与正多边形的定义产生了“差异”.

2.6 习题

1. 正五边形被过它的顶点的半径分成多少个等腰三角形？这些等腰三角形全等吗？为什么？正六边形、正八边形呢？

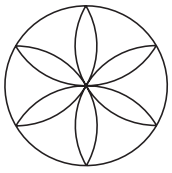
2. 如图，把一个边长为 a 的正三角形纸片剪成正六边形(图中的阴影部分)，剪去的 3 个小三角形的边长应是多少？为什么？



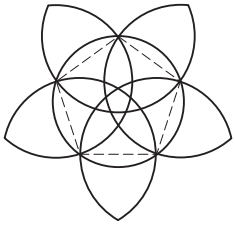
(第 2 题)

3. 用长 24 m 的木栅栏围成正三角形或正方形或正六边形的绿地．这三种围法中，哪一种围成的绿地面积最大？为什么？

4. 用等分圆周的方法画出下列图形：



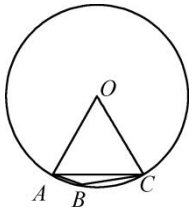
①



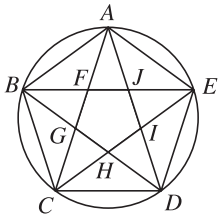
②

(第 4 题)

5. 如图，AC 是⊙O 的内接正六边形的一边，点 B 在 $\overset{\frown}{AC}$ 上，且 BC 是⊙O 的内接正八边形的一边．AB 是否为⊙O 的内接正 n 边形的一边？如果是，求出 n 的值；如果不是，请说明理由．



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 观察圆内接正五边形 $ABCDE$（如图），解答下列问题：

（1）图中，以 AB 为底，且顶角为 36°的等腰三角形有多少个？以 AB 为腰，且顶角为 36°的等腰三角形有多少个？将它们表示出来；

（2）图中，以 AB 为底，且底角为 36°的等腰三角形有多少个？以 AB 为腰，且底角为 36°的等腰三角形有多少个？将它们表示出来．

2.7 弧长及扇形的面积

我们知道，圆上任意两点间的部分叫做弧，一条弧和经过这条弧的端点的两条半径所组成的图形叫做扇形．弧是圆的一部分，扇面是圆面的一部分．

思考与探索

如图 2－58，当圆的半径 R 确定时，扇形的弧长随所对圆心角大小的变化而变化．设 $n°$ 的圆心角所对的弧长为 l，探索 l 与 n 之间的数量关系．

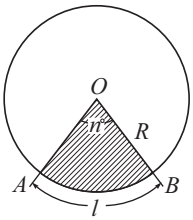


图 2－58

360°的圆心角所对的弧长就是圆周长$2\pi R$，180°的圆心角所对的弧长为$\frac{1}{2}\times 2\pi R$.

1°的圆心角所对的弧长为$\frac{1}{360}\times 2\pi R$.

在半径为 R 的圆中，弧长 l 与所对的圆心角度数 n 之间有如下关系：

$$l=\frac{n}{360}\times 2\pi R=\frac{n\pi R}{180}.$$

在这个关系式中，当 R 为常数时，l 是 n 的正比例函数；当 n 为常数时，l 是 R 的正比例函数．

观察与思考

仿照上面的过程，当圆的半径 R 确定时，探索扇形的面积 $S_{扇形}$ 与扇形的圆心角度数 n 之间的数量关系．

圆心角为360°的扇形的面积就是圆面积πR^2，圆心角为180°的扇形的面积为$\frac{1}{2}\times\pi R^2$.

圆心角为1°的扇形的面积为$\frac{1}{360}\times\pi R^2$.

在半径为 R 的圆中，扇形的面积 $S_{扇形}$ 与圆心角度数 n 之间有如下关系：

$$S_{扇形}=\frac{n}{360}\pi R^2.$$

思考与探索

上述公式揭示了 $S_{扇形}$ 与 n、R 之间的数量关系．试探索 $S_{扇形}$ 与 l、R 之间的数量关系．

$S_{扇形}=\frac{n}{360}\pi R^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{n\pi R}{180}\cdot R$，于是

$$S_{扇形}=\frac{1}{2}lR.$$

例 1　如图 2－59，$\triangle ABC$ 是$\odot O$ 的内接三角形，$\angle BAC=60^\circ$．设$\odot O$ 的半径为 2，求$\overset{\frown}{BC}$的长．

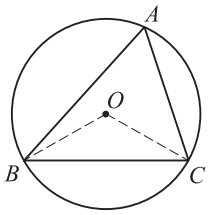


图 2－59

解： 连接 OB、OC，则$\angle BOC$ 为$\overset{\frown}{BC}$所对的圆心角．

$\because\ \angle BAC=60^\circ$，

$\therefore\ \angle BOC=2\angle BAC=120^\circ$．

$\therefore\ \overset{\frown}{BC}$的长 $l=\frac{120\pi\times 2}{180}=\frac{4}{3}\pi$．

例 2　如图 2－60，折扇打开后，OA、OB 的夹角为 120°，OA 的长为 30 cm，AC 的长为 20 cm．求图中阴影部分的面积 S．

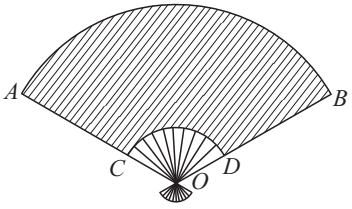


图 2－60

解： $S=S_{扇形OAB}-S_{扇形OCD}$．

$$\because S_{扇形OAB}=\frac{120\pi\times30^2}{360}=300\pi(\text{cm}^2),$$

$$S_{扇形OCD}=\frac{120\pi\times10^2}{360}=\frac{100}{3}\pi(\text{cm}^2),$$

$$\therefore S=300\pi-\frac{100}{3}\pi=\frac{800}{3}\pi(\text{cm}^2).$$

拓展与延伸

如图 2－61，半圆的直径 $AB=40$，C、D 是半圆的 3 等分点．求弦 AC、AD 与$\overset{\frown}{CD}$围成的阴影部分的面积．

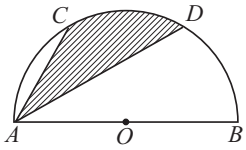


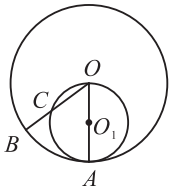
图 2－61

练习

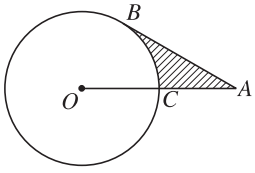
1. 已知圆弧所在圆的半径为 24，所对的圆心角为 60°，求这条弧的长．
2. 已知扇形的圆心角为 120°，弧长为 20π，求这个扇形的面积．

2.7 习题

1. 已知 75°的圆心角所对的弧长为 5π，求这条弧所在圆的半径．
2. 已知扇形的面积为 6π，半径为 4，求这个扇形的弧长．
3. 如图，OA、OB 是⊙O 的两条半径，以 OA 为直径的⊙O_1 交 OB 于点 C．$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{AC}$的长相等吗？为什么？



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，AB 是⊙O 的切线，切点为 B，AO 交⊙O 于点 C，且 $AC=OC$．

   (1) 求$\overset{\frown}{BC}$的度数；

   (2) 设⊙O 的半径为 5，求图中阴影部分的面积．

2.8　圆锥的侧面积

我们把连接圆锥的顶点和底面圆上一点的线段叫做圆锥的母线．如图 2－62，线段 SA 是圆锥的母线．

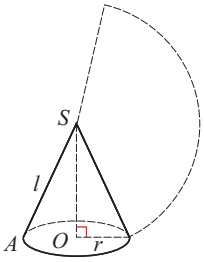
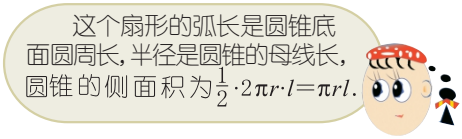


图 2－62

思考与探索

在图 2－62 中，设圆锥的母线长为 l，圆锥的底面圆半径为 r，你能计算圆锥的侧面积吗？



例　用铁皮制作的圆锥形容器盖如图 2－63 所示，求这个容器盖铁皮的面积(精确到1 cm^2)．

解：圆锥形容器盖的底面圆周长为 $2\pi\times 40=80\pi$.

容器盖的面积

$$S=\frac{1}{2}\times 80\pi\times 50$$

$$\approx 6\ 280\ .$$

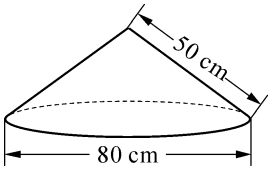


图 2－63

答：这个圆锥形容器盖铁皮的面积约为 6 280 cm^2.

拓展与延伸

在半径为$\sqrt{2}$的圆形纸片中，剪一个圆心角为 90°的扇形(图 2－64 中的阴影部分)．

(1) 求这个扇形的面积(结果保留 π)；

(2) 若用剪得的扇形纸片围成一个圆锥的侧面，能否从剪下的 3 块余料中选取一块，剪出一个圆作为这个圆锥的底面？

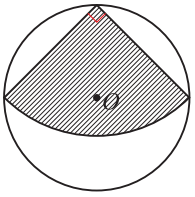


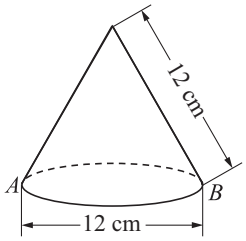
图 2－64

练习

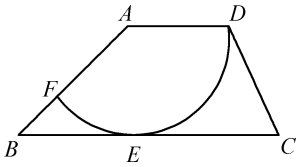
1. 设圆锥的底面圆半径为 r，圆锥的母线长为 l，用含 r、l 的式子表示圆锥的全面积 S（圆锥的全面积为圆锥的侧面积与底面积的和）.
2. 用半径为 30，圆心角为 120° 的扇形纸片围成一个圆锥的侧面，求这个圆锥的底面圆半径.

2.8 习题

1. 给一个圆锥形零件的侧面涂漆，零件的尺寸要求如图所示．求需涂漆的面积（精确到 $1\ \text{cm}^2$）.

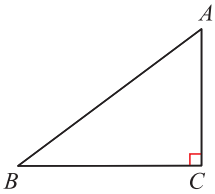


（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$AD=2$，$AB=2\sqrt{2}$，以点 A 为圆心，AD 为半径的圆与 BC 相切于点 E，交 AB 于点 F．用扇形 AFD 围成一个圆锥的侧面，求这个圆锥底面圆的半径.
3. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$，$BC=4$.
   (1) 分别以 AC、BC 所在直线为轴，把 $\triangle ABC$ 旋转 1 周，得到两个不同的圆锥．求这两个圆锥的侧面积.
   (2) 以 AB 所在直线为轴，把 $\triangle ABC$ 旋转 1 周，求所得几何体的表面积.



（第 3 题）

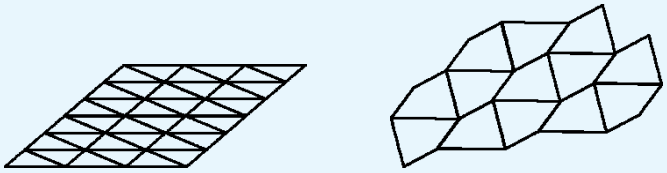
数学活动

图形的密铺

如图 2－65，用形状、大小完全相同的一种或几种平面图形进行拼接，使图形之间没有空隙，也没有重叠地铺成一片，叫做图形的密铺．

图 2－65

图 2－66 是用全等的三角形或四边形材料密铺而成的地面．



（1）　　（2）

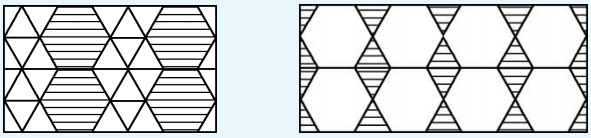
图 2－66

思考：

用边长相同的正三角形、正六边形两种材料组合能够密铺地面吗？

要使这两种材料组合能够密铺地面，就必需满足：有公共顶点的若干个（m 个）正三角形的内角与若干个（n 个）正六边形的内角的和等于 360°，也就是二元一次方程 $m\cdot 60^\circ+n\cdot 120^\circ=360^\circ$ 要有正整数解．不难知道，这个二元一次方程有正整数解 $\begin{cases}m=4,\\n=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=2,\\n=2.\end{cases}$

我们可以拼出如图 2－67 所示的密铺图形：



（1）　　（2）

图 2－67

探索：

（1）用全等的五边形材料能够密铺地面吗？

（2）如果限于用一种边长相同的正多边形材料密铺地面，那么哪几种材料能够密铺地面？

（3）在边长相同的正三角形、正方形、正六边形材料中，哪几种材料组合能够密铺地面？

操作：

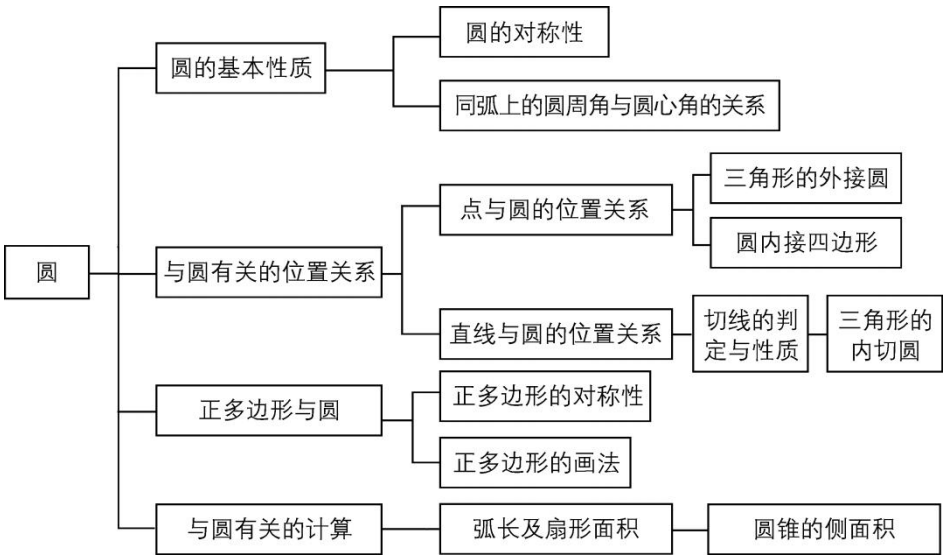
准备硬纸板、水彩等材料，三角尺、圆规、剪刀等工具．

（1）用硬纸板剪若干块边长相同的正三角形和正方形，用这两种图形组合密铺地面；

（2）用硬纸板剪若干块边长相同的正三角形、正方形、正六边形，用这 3 种图形组合密铺地面．

小结与思考

1. 本章知识结构



2. 圆是中心对称图形、轴对称图形；圆还具有绕圆心旋转任意角度都能与它自身重合的性质．

利用圆的对称性，可以得到圆的如下性质：

圆心角、弧、弦之间的关系：在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等．

*垂径定理：垂直于弦的直径平分弦以及弦所对的两条弧．

*切线长定理：过圆外一点所画的圆的两条切线长相等．

回顾上述定理的探索、证明过程，体会“对称”在研究图形性质中的作用．

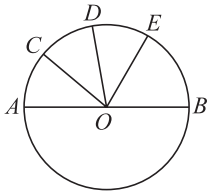
3. 探索并证明图形性质常常经历如下过程：通过操作、观察……发现图形可能具有的性质；用图形运动的方法或通过推理论证，证实图形的性质．举例说明，在本章中，哪些定理的探索、证明经历了这样的过程．

4. 在探索圆周角与圆心角之间数量关系时，先对圆心与圆周角的位置关系进行分类，再从特殊情形入手，通过一般到特殊的转化证实了结论．

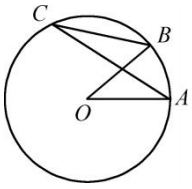
点与圆、直线与圆的位置关系反映了数与形之间的内在联系：由图形的位置关系决定数量关系，由数量关系判定图形的位置关系．

复习巩固

1. 如图，AB 是⊙O 的直径，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$，$\angle AOC=40^\circ$．求$\angle BOE$ 的度数．



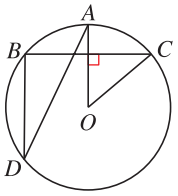
（第 1 题）



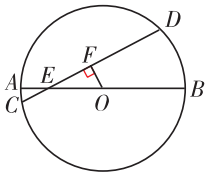
（第 2 题）

2. 如图，OA、OB 是⊙O 的半径，C 是⊙O 上一点，$\angle AOB=40^\circ$，$\angle OBC=50^\circ$．求$\angle OAC$ 的度数．

*3. 如图，BC 是⊙O 的弦，半径 $OA\perp BC$，点 D 在⊙O 上，且$\angle ADB=25^\circ$．求$\angle AOC$ 的度数．



（第 3 题）

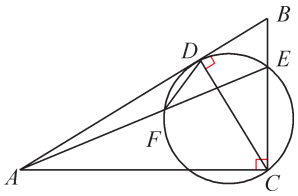


（第 4 题）

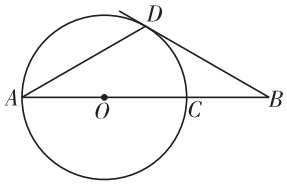
*4. 如图，在⊙O 中，直径 AB 交弦 CD 于点 E，$OF\perp CD$，垂足为 F，$AE=1$，$BE=5$，$OF=1$．求 CD 的长．

5. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，垂足为 D，E 是

BC 上一点，过 C、E、D 三点的圆交 AE 于点 F. $\angle DFE$ 与 $\angle BAC$ 相等吗？为什么？



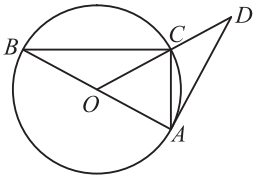
（第 5 题）



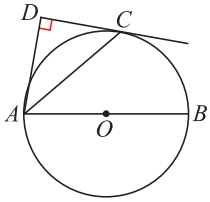
（第 6 题）

6. 如图，AD 是⊙O 的弦，AB 经过圆心 O 交⊙O 于点 C，$\angle A = \angle B = 30°$. BD 与⊙O 有怎样的位置关系？为什么？

7. 如图，$\triangle ABC$ 是⊙O 的内接三角形，AB 是⊙O 的直径，$\angle BAC = 2\angle B$，过点 A 的切线交 OC 的延长线于点 D. 若⊙O 的半径为 2，求 AD 的长.



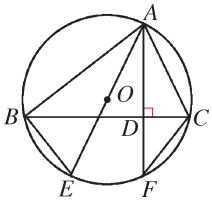
（第 7 题）



（第 8 题）

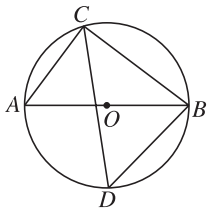
8. 如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 在⊙O 上，AD 垂直于过点 C 的切线，垂足为 D，且 $\angle BAD = 80°$. 求 $\angle DAC$ 的度数.

9. 如图，$\triangle ABC$ 是⊙O 的内接三角形，AE 是⊙O 的直径，AF 是⊙O 的弦，且 $AF \perp BC$，垂足为 D. BE 与 CF 相等吗？为什么？

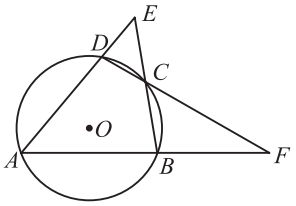


（第 9 题）

10. 如图，AB 是⊙O 的直径，AC 是⊙O 的弦，$\angle ACB$ 的平分线交⊙O 于点 D．若 $AB=10$，$AC=6$，求 BC、BD 的长．



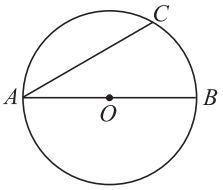
（第 10 题）



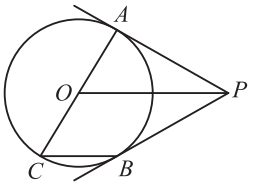
（第 11 题）

11. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，AD、BC 的延长线相交于点 E，AB、DC 的延长线相交于点 F，且 $\angle E=50°$，$\angle F=30°$．求 $\angle A$ 的度数．

12. 如图，AB 是⊙O 的直径，AC 是⊙O 的弦，$AB=2$，$\angle BAC=30°$．在图中作弦 AD，使 $AD=1$，并求 $\angle CAD$ 的度数．



（第 12 题）

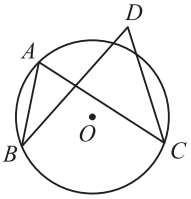


（第 13 题）

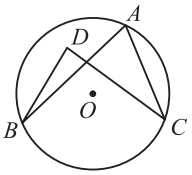
*13. 如图，AC 是⊙O 的直径，PA、PB 是⊙O 的切线，切点分别为 A、B．OP 与 CB 有怎样的位置关系？为什么？

14. (1) 如图①，点 A、B、C 在⊙O 上，点 D 在⊙O 外，比较 $\angle BAC$ 与 $\angle BDC$ 的大小，并说明理由；

(2) 如图②，点 A、B、C 在⊙O 上，点 D 在⊙O 内，比较 $\angle BAC$ 与 $\angle BDC$ 的大小，并说明理由.



①

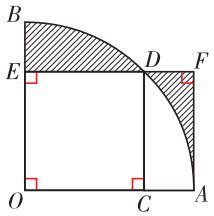


②

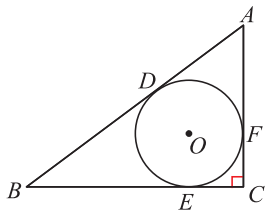
（第 14 题）

灵活运用

15. 如图，扇形 OAB 的圆心角为直角，边长为 1 的正方形 $OCDE$ 的顶点 C、D、E 分别在 OA、$\overset{\frown}{AB}$、OB 上，$AF\perp ED$，交 ED 的延长线于点 F．求图中阴影部分的面积．



（第 15 题）



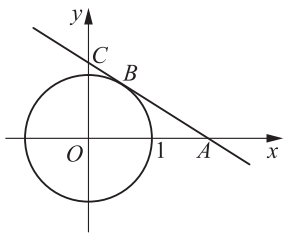
（第 16 题）

*16. 如图，在△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，⊙O 是△ABC 的内切圆，切点分别为 D、E、F．若 $BD=6$，$AD=4$，求⊙O 的半径 r．

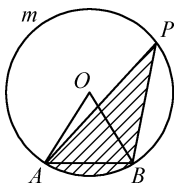
17. 如图，在平面直角坐标系中，⊙O 的半径为 1，过点 $A(2,0)$ 的直线与⊙O 相切于点 B，与 y 轴相交于点 C．

（1）求 AB 的长；

（2）求直线 AC 相应的一次函数表达式．



（第 17 题）



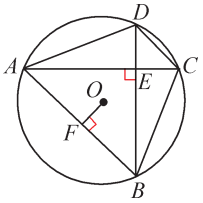
（第 18 题）

18. 如图，AB 是⊙O 的弦，$AB=2$，点 P 在 $\overset{\frown}{AmB}$ 上运动，且 $\angle APB=30^\circ$．

（1）求⊙O 的半径；

（2）设点 P 到直线 AB 的距离为 x，图中阴影部分的面积为 y，求 y 与 x 之间的函数关系，并写出自变量 x 的取值范围．

*19. 如图，四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，且 $AC \perp BD$，$OF \perp AB$，垂足分别为 E、F．OF 与 CD 有怎样的数量关系？为什么？



（第 19 题）

20. 在同一平面内，已知点 O 到直线 l 的距离为 5．以点 O 为圆心，r 为半径画圆．

（1）当 $r=$ _____ 时，⊙O 上有且只有 1 个点到直线 l 的距离等于 3；

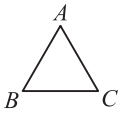
（2）当 $r=$ _____ 时，⊙O 上有且只有 3 个点到直线 l 的距离等于 3；

（3）随着 r 的变化，⊙O 上到直线 l 的距离等于 3 的点的个数有哪些变化？求出相对应的 r 的值或取值范围．

探索研究

21. 如图，△ABC 是边长为 1 cm 的正三角形．

（1）画图：将线段 CA 绕点 C 按顺时针方向旋转 120°至 CP_1，形成扇形 D_1；将线段 BP_1 绕点 B 按顺时针方向旋转 120°至 BP_2，形成扇形 D_2；将线段 AP_2 绕点 A 按顺时针方向旋转 120°至 AP_3，形成扇形 D_3；将线段 CP_3 绕点 C 按顺时针方向旋转 120°至 CP_4，形成扇形 D_4……



（第 21 题）

（2）设 l_n 为扇形 D_n 的弧长（$n=1,2,3$……）．

填表：

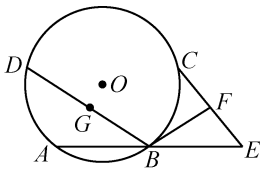
n	1	2	3	4
l_n				

根据上表所反映的规律，试估计 n 至少为何值时，扇形 D_n 的弧长能够绕地球赤道 1 周(设地球赤道半径为6 400 km)．

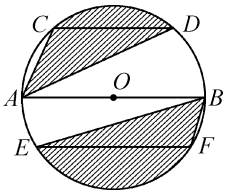
22. 如图，点 A、B、C、D 在⊙O 上，且$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$，$E$ 是 AB 延长线上一点，且 $BE=AB$，F 是 EC 的中点.

(1) 探索 BF 与 BD 之间的数量关系，并说明理由；

(2) 设 G 是 BD 的中点，在⊙O 上是否存在点 P（点 B 除外)，使得 $PG=PF$？为什么？



（第 22 题）

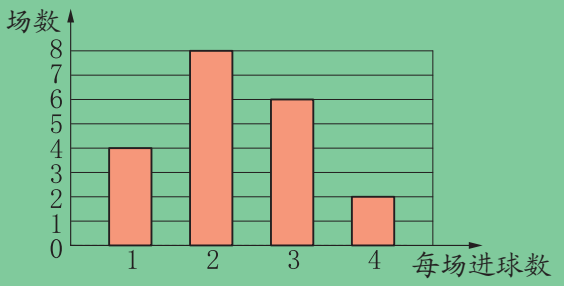


（第 23 题）

23. 运用图形运动的方法研究下列问题：

如图，AB 是⊙O 的直径，CD、EF 是⊙O 的弦，且 $AB\parallel CD\parallel EF$，$AB=10$，$CD=6$，$EF=8$．求图中阴影部分的面积．

第3章 数据的集中趋势和离散程度



$$\overline{x}=\frac{1\times4+2\times8+3\times6+4\times2}{4+8+6+2}$$

了解数据的集中趋势和离散程度，可以更加有效地认识、利用数据．

第 28 届奥运会男子 50 m 步枪 3×40 决赛中，甲、乙两名运动员 10 次射击的成绩如下(单位：环)：

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次	第 7 次	第 8 次	第 9 次	第 10 次
甲	9.4	10.1	10.4	8.4	8.7	9.9	9.9	8.8	7.8	10.1
乙	9.4	10.4	9.3	10.4	9.5	10.1	9.9	9.4	10.0	0

(1) 计算甲、乙两名运动员 10 次射击的平均成绩；

(2) 你认为甲、乙两名运动员这 10 次射击的平均成绩能较好地反映他们的实际水平吗？说说你的理由．

本章将学习平均数、中位数、众数、极差、方差的概念，并利用它们分析数据的集中趋势和离散程度．

3.1　平均数

小学里，我们已经学习了计算一组数据的平均数的方法．

一般地，如果有 n 个数

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,$$

那么

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

叫做这 n 个数的**算术平均数**(arithmetic mean)，简称为平均数．“$\overline{x}$”读作“x 拔”．

通常，平均数可以用来表示一组数据的“集中趋势”．

小明和小丽所在的 A、B 两个小组的同学身高如下（单位：cm）：

A 组	B 组
164，168，171，166， 170，168，166，164， 169，170，166，168	166，172，170，162， 164，169，170，165， 167，168

计算 A 组同学的平均身高$\overline{x}_A$，B 组同学的平均身高$\overline{x}_B$.

小明用下面的方法计算$\overline{x}_A$：

首先整理数据，列频数分布表，然后再计算．

身高/cm	164	166	168	169	170	171
划　记	丅	下	下	一	丅	一
频　数	2	3	3	1	2	1

$$\bar{x}_A = \frac{164\times2+166\times3+168\times3+169\times1+170\times2+171\times1}{2+3+3+1+2+1}$$

$$= 167.5\ (\text{cm}).$$

小丽用下面的方法计算$\bar{x}_B$：

先将各数据同时减去 165，得到一组新数据 1，7，5，−3，−1，4，5，0，2，3，再计算这组新数据的平均数，得

$$\overline{x'} = \frac{1}{10}(1+7+5-3-1+4+5+0+2+3) = 2.3.$$

$$\bar{x}_B = \overline{x'} + 165 = 167.3(\text{cm}).$$

思考与探索

小明和小丽的计算方法，各有什么特点？

拓展与延伸

由 $\bar{x}_A > \bar{x}_B$ 可以断定小明比小丽高吗？为什么？

练习

1. 小丽某周每天的睡眠时间如下(单位：h)：
   8，9，7，9，7，8，8.
   求小丽该周每天的平均睡眠时间.
2. 已知一组数据 85、80、x、90 的平均数为 85，求 x 的值.
3. 某舞蹈队 20 名队员的身高如下(单位：cm)：
   172，170，169，172，162，167，168，165，172，170，160，175，168，165，171，169，167，174，170，164.
   求这些队员的平均身高(精确到 1 cm).

问题 1 为了解某市九年级学生开展“综合与实践”活动的情况，抽样调查了该市 200 名九年级学生上学期参加“综合与实践”活动的

天数，并根据调查所得的数据绘制条形统计图如下：

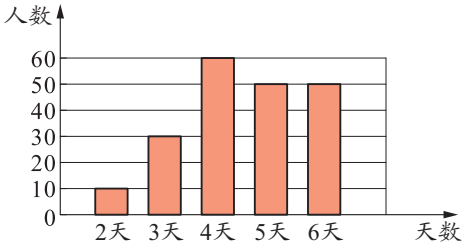
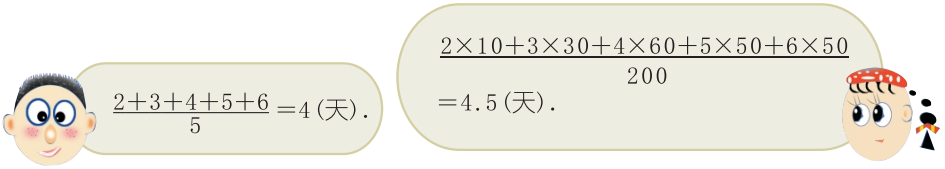


图 3－1

求这 200 名学生参加“综合与实践”活动的平均天数．



你认为上述两种算法哪一个正确？为什么？

这 200 名学生参加“综合与实践”活动的平均天数，不仅与参加活动的天数有关，还与相应的人数有关，因此小丽的算法是正确的．

问题 2　某电视台要招聘 1 名记者，甲、乙、丙三人应聘参加了 3 项素质测试，成绩如下(单位：分)：

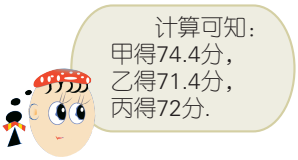
	采访写作	计算机操作	创意设计
甲	70	60	86
乙	90	75	51
丙	60	84	78

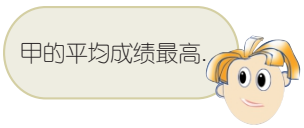
如果采访写作、计算机操作和创意设计的成绩按 5∶2∶3 计算，那么哪个人的素质测试平均成绩最高？

采访写作、计算机操作和创意设计成绩按 5∶2∶3 计算，说明采访写作、计算机操作、创意设计的“重要程度”不一样，它们分别占总成绩的 $\frac{5}{5+2+3}$、$\frac{2}{5+2+3}$、$\frac{3}{5+2+3}$．这样，

$$甲的得分=70\times\frac{5}{5+2+3}+60\times\frac{2}{5+2+3}+86\times\frac{3}{5+2+3}$$
$$=\frac{70\times5+60\times2+86\times3}{5+2+3}=72.8(分)；$$
$$乙的得分=\frac{90\times5+75\times2+51\times3}{5+2+3}=75.3(分)；$$
$$丙的得分=\frac{60\times5+84\times2+78\times3}{5+2+3}=70.2(分).$$

如果采访写作、计算机操作和创意设计成绩按 4∶2∶4 计算，那么哪个人的素质测试平均成绩最高？





一组数据的平均数，不仅与这组数据中各个数据的值有关，而且与各个数据的“重要程度”有关．我们把衡量各个数据“重要程度”的数值叫做**权**(weight)．例如：

“问题 1”中的人数 10、30、60、50、50 分别是天数 2、3、4、5、6 的“权”；

“问题 2”中的 $\frac{5}{5+2+3}$、$\frac{2}{5+2+3}$、$\frac{3}{5+2+3}$（或 $\frac{4}{4+2+4}$、$\frac{2}{4+2+4}$、$\frac{4}{4+2+4}$）分别是采访写作、计算机操作、创意设计成绩的“权”．

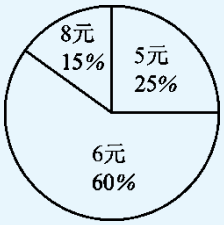
“问题 1”中的 4.5 是数 2、3、4、5、6 的“加权平均数”．“问题 2”中甲的得分 72.8 是数 70、60、86 按 5∶2∶3 计算所得的“加权平均数”；74.4 是数 70、60、86 按 4∶2∶4 计算所得的加权平均数．

1. 小明统计了 15 天同一时段通过某路口的汽车流量如下(单位：辆)：

汽车流量	142	145	157	156
天　数	2	2	5	6

求这 15 天在这个时段通过该路口的汽车平均流量．

2. 某校食堂销售三种午餐盒饭的有关数据如图所示，求该食堂销售午餐盒饭的平均价格．



（第 2 题）

3. 某风景区内 5 个景点的门票价格调整如下：

景　点	A	B	C	D	E
原价/元·人	40	40	60	80	100
现价/元·人	30	30	60	90	110
日平均游客人数/千人	1	1	2	3	3

风景区管理部门强调：调价前、后这5个景点门票的平均价格不变，并没有通过调价来增加收入；游客认为：调价后风景区的日平均收入相对于调价前实际增加了约5.4%．

你赞成哪一种说法，并说明理由．

3.1 习题

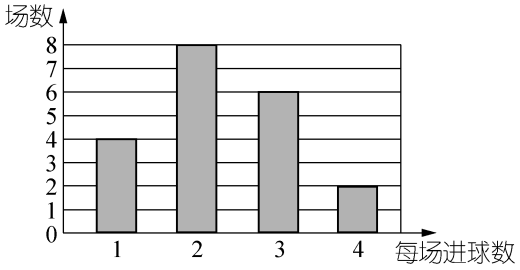
1. 某校九年级甲班 40 名学生中，5 人 13 岁，30 人 14 岁，5 人 15 岁．求这个班级学生的平均年龄．

2. 某手表厂抽查了 100 只手表的日走时误差，数据如下（单位：s）：

日走时误差	−2	−1	0	1	2	3	4
只数	3	10	18	28	20	16	5

求这 100 只手表的平均日走时误差．

3. 某足球队 20 场比赛的进球数如图所示：



（第 3 题）

求该足球队平均每场的进球数．

4. 5 根钢材的平均长度为 3.21 m，在每根钢材上分别截下相同长度的一段后，余下部分的长度(单位：m)分别为 0.30，0.25.0.15，0.10，0.20．求在每根钢材上截下部分的长度．

5. 小丽等 5 人在草地上做游戏，他们的平均年龄是 13 岁，这 5 个人可能的年龄有哪些？请写出几组他们可能的年龄．小丽的年龄 14 岁，如果按年龄从大到小的顺序排列，小丽可以排第几？

6. 某单位要招聘 1 名英语翻译，甲、乙两人报名参加了 4 项素质测试，成绩如下(单位：分)：

	听	说	读	写
甲	90	80	85	78
乙	78	82	85	88

如果把听、说、读、写的成绩按 3∶3∶2∶2 计算素质测试平均成绩，那么谁的平均成绩最高？如果把听、说、读、写的成绩按 2∶2∶3∶3 计算呢？

7. 某公司为了解每天的用电情况，抽查了某月 10 天该公司的用电量，统计如下(单位：度)：

用电量	90	93	102	113	114	120
天　数	1	1	2	3	1	2

(1) 求该公司这 10 天的日平均用电量；

(2) 估计该公司该月的用电量(按 30 天计算)．

8. 某灯泡厂为了检测本厂生产的某种型号灯泡的使用寿命，从中抽取了 400 只灯泡，测得它们的使用寿命如下(单位：h)：

使用寿命	550	650	750	850	950	1 050
只数	20	80	108	92	76	24

(1) 在这个问题中，总体和样本各指什么？

(2) 求样本平均数；

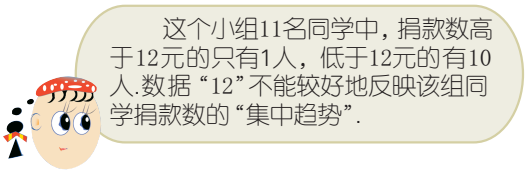
(3) 估计该灯泡厂生产的这种型号灯泡的平均使用寿命．

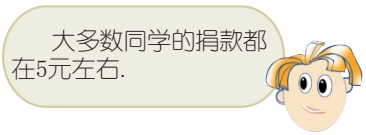
3.2　中位数与众数

问题 1　在“献爱心”捐款活动中，某校九年级(1)班第 3 小组 11 名同学的捐款数如下(单位：元)：

4，4，2，3，3，5，7，6，8，10，80．

计算可得，这个小组平均每名同学捐款 12 元．你认为数据“12”能较好地反映该组同学捐款数的“集中趋势”吗？

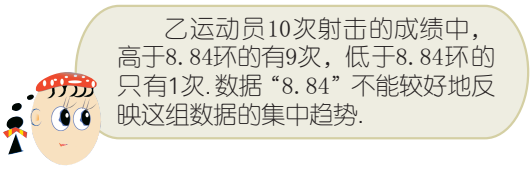


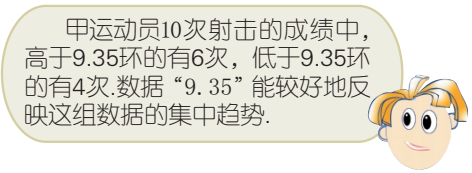


问题 2　第 28 届奥运会男子 50 m 步枪 3×40 决赛中，甲、乙两名运动员 10 次射击的成绩如下(单位：环)：

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次	第 7 次	第 8 次	第 9 次	第 10 次	总环数
甲	9.4	10.1	10.4	8.4	8.7	9.9	9.9	8.8	7.8	10.1	93.5
乙	9.4	10.4	9.3	10.4	9.5	10.1	9.9	9.4	10.0	0	88.4

乙运动员因第 10 次射击脱靶而失去了冠军．你认为乙运动员这 10 次射击的平均成绩 8.84 环能反映他的实际水平吗？





平均数的大小与一组数据中的每个数据都有关系．

如果一组数据中所有数据的大小差异不大，那么平均数就能较好地反映这组数据的集中趋势．

如果一组数据中个别数据与其他数据的大小差异很大（如“问题 1”中的“80”，“问题 2”中的“0”），那么平均数就不能较好地反映

这组数据的集中趋势．像这样的一组数据的集中趋势怎样来描述呢？

将“问题 1”中 11 名同学的捐款数按从小到大的顺序排列：

2，3，3，4，4，5，6，7，8，10，80．

在这组数据中，比 5 小的数有 5 个，比 5 大的数有 5 个，处于中间位置的数是 5，我们用“5”来描述这组数据的集中趋势．

将“问题 2”中乙运动员 10 次射击的环数按从小到大的顺序排列：

0，9.3，9.4，9.4，9.5，9.9，10.0，10.1，10.4，10.4．

在这组数据中，处于中间位置的数是 9.5 和 9.9，我们用这两个数的平均数“9.7”来描述这组数据的集中趋势．

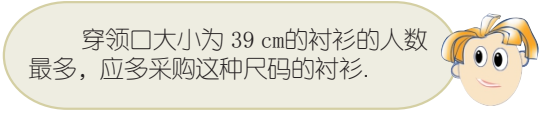
一般地，将一组数据按大小顺序排列，如果数据的个数是奇数，那么处于中间位置的数叫做这组数据的**中位数**(median)；如果数据的个数是偶数，那么处于中间位置的两个数的平均数叫做这组数据的中位数．例如，“问题 1”中数据的中位数是 5；“问题 2”中数据的中位数是 9.7．

当一组数据中个别数据与其他数据的大小差异很大时，通常用中位数来描述这组数据的集中趋势．

问题 3 小明在校内抽样调查了 30 名男同学的衬衫尺码，数据如下(单位：cm)：

领口大小	37	38	39	40	41	42
划　记	下	正一	正正下	正	一	一
人　数	3	6	14	5	1	1

你认为学校商店应多采购哪种尺码的男衬衫？说说你的理由．



一组数据中出现次数最多的数据叫做这组数据的**众数**(mode)．例如，在“问题 3”中，数据“39”出现的次数最多，“39”是这组数据

的众数．

当一组数据中有较多的重复数据时，常用众数来描述这组数据的集中趋势．

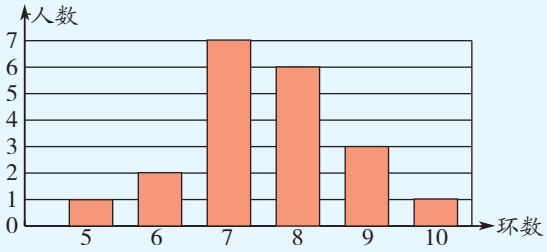
1. 某校九年级 8 个班级向“希望工程”捐献图书的册数情况如下：

班级	一班	二班	三班	四班	五班	六班	七班	八班
册数	50	96	100	90	90	120	500	90

(1) 求平均每个班级所捐图书的册数．

(2) 求所捐图书册数的中位数和众数．

2. 某射击小组 20 人某次射击训练的成绩如图所示：



(1) 求该小组这次射击的平均成绩；

(2) 求这组数据的中位数和众数．

平均数、中位数和众数都反映了一组数据的集中趋势．在实际问题中，如何选用平均数、中位数和众数呢？

某公司职工的月工资情况如下(单位：元)：

月工资	20 000	12 000	8 000	6 000	3 000	2 000	1 800	1 500	1 200
人　数	1 (总经理)	2 (副总经理)	5 (部门经理)	10	17	23	28	10	4

根据上表，可以算得该公司职工月工资的平均数、中位数和众数分别为 3 112 元、2 000 元、1 800 元．如果你是该公司的一员，那么会更加关注其中的哪一个数据？

如果我是普通职工，我更关注自己的收入在职工群体中的位置，感兴趣的是职工月工资的中位数.

如果我是工会主席，我更关注多数职工利益，感兴趣的是职工月工资的众数.

如果我是总经理，我更关注职工月工资总额，感兴趣的是职工月工资的平均数.

平均数、中位数、众数都能刻画数据的集中趋势，在实际应用中，应根据需要恰当地进行选择.

数学实验室

将一根绳子拉直.

(1) 每位同学目测、估计这根绳子的长度；

(2) 将全班同学的估计值绘制成统计表和统计图，并计算平均数、中位数和众数；

(3) 参照“(2)”中计算的结果，每人重新估计这根绳子的长度；

(4) 测出这根绳子的实际长度，与你的估计值相比较.

练习

1. 从甲、乙、丙三个厂家生产的同一种产品中，各抽取 8 件产品，对其使用寿命进行跟踪调查，结果如下(单位：年)：

甲：3，4，5，6，8，8，8，10；

乙：4，6，6，6，8，9，12，13；

丙：3，3，4，7，9，10，11，12.

(1) 根据调查结果，三个厂家在广告中都称自己产品的使用寿命是 8 年，请分析他们各自的理由；

(2) 你认为哪个厂家的产品使用寿命更长一些？说说你的理由.

2. 某公司职工的月工资情况如下(单位：元)：

职务	经理	副经理	职员
人数	1	1	18
月工资	12 000	8 000	2 000

(1) 求该公司职工月工资的平均数、中位数和众数；

(2) 你认为用平均数、中位数和众数中的哪一个描述该公司职工月工资的“集中趋势”较为合适？说说你的理由．

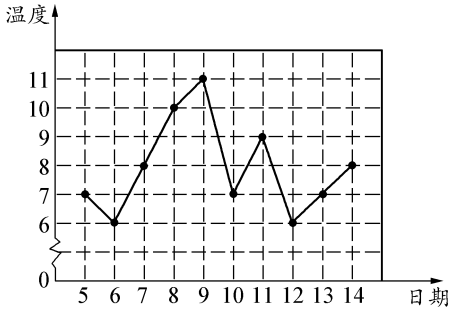
3.2 习题

1. 抽样调查了某校 30 位女生所穿鞋子的尺码，数据如下(单位：码)：

码号	33	34	35	36	37
人　数	7	6	15	1	1

在这组数据的平均数、中位数和众数中，鞋厂最感兴趣的是哪一个？

2. 某市 2012 年 2 月 5 日～2 月 14 日每天的最低气温如图所示(单位：℃)：



(第 2 题)

求这 10 天中该市最低气温的众数和中位数．

3. 小明调查了学校九年级(1)班 40 名同学上学路上所花的时间，数据如下(单位：min)：

10，40，10，30，30，30，30，10，20，20，
20，20，10，20，30，50，30，10，30，10，
20，30，60，60，10，20，20，20，20，40，
10，40，20，30，30，40，40，40，50，20.

(1) 求这组数据的平均数、中位数和众数；

(2) 你认为用平均数、中位数和众数中的哪一个描述该班全体同学上学路上所花时间的“集中趋势”较为合适？说说你的理由．

4. 某公司 25 名营销人员某月销售某种商品的数量如下(单位：件)：

月销售量	600	500	400	350	300	200
人数	1	4	4	6	7	3

(1) 求该公司营销人员该月销售量的平均数、中位数和众数；

(2) 假设你是销售部负责人，你认为应怎样制定每位营销人员的月销售量指标？说说你的理由．

5. 某校为了普及环保知识，从七～九年级中各选出 10 名学生参加环保知识竞赛，成绩如下(满分100 分)：

年级	竞赛成绩									
七年级	80	86	88	80	88	99	80	74	91	89
八年级	85	85	87	97	85	76	88	77	87	88
九年级	82	80	78	78	81	96	97	88	89	86

(1) 计算各年级参赛学生成绩的平均数、中位数和众数，并对 3 个年级参赛学生的成绩进行评价；

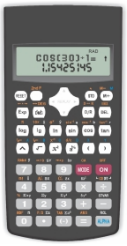
(2) 如果从每个年级参赛学生中各选出 3 名学生参加决赛，你认为哪个年级的选手实力更强一些？说说你的理由．

6. 调查本小组同学这学期阅读课外书籍的册数，求这组数据的平均数、中位数和众数，并说出它们的意义．

3.3　用计算器求平均数

用计算器可以便捷地计算一组数据的平均数.

用计算器计算一组数据的平均数的操作顺序如下：



1. 按开机键 ON，打开计算器.
2. 按 MODE 键选择 1，进入 stat$x$ 模式，即单变量统计模式.
3. 按第三功能键 ALPHA 及 M+ 键进入统计数据的录入模式.
4. 输入 x_1 的值.
5. 按光标键▼，确认.
6. 输入 x_1 值的频数(FRQ)，其中 FRQ 的默认值＝1.
7. 重复步骤 4、5 和 6，直到输入所有数据为止.
8. 按第三功能键 ALPHA 及 M+ 键退出统计数据的录入模式，再按第三功能键 ALPHA、平均值键 4 和 = 得到结果.

例　某中学九年级(1)班学生上学路上所花时间如图 3－2 所示(单位：min)：

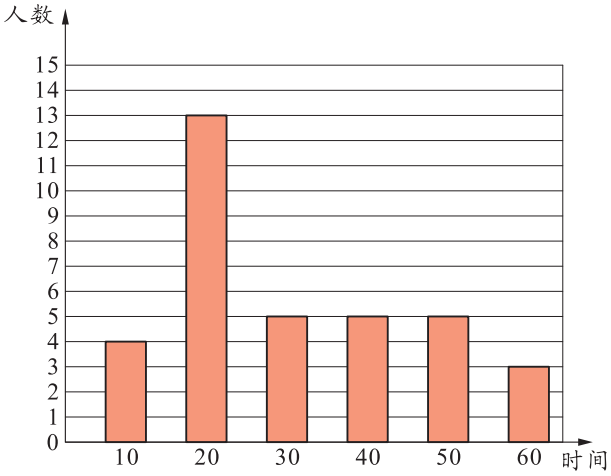
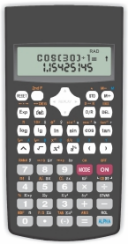


图 3－2

用计算器计算该班学生上学路上的平均用时数(精确到 1 min).



解： 按 MODE 键选择 1 ，进入 stat$x$ 模式，然后依次按键：

ALPHA M+ 1 0 ▼ 4 ▼ 2 0 ▼ 1 3 ▼ 3 0 ▼ 5 ▼

4 0 ▼ 5 ▼ 5 0 ▼ 5 ▼ 6 0 ▼ 3 ALPHA M+

ALPHA 4 =

显示结果为 30.857 142 86 .

该班学生上学路上平均用时约为 31 min .

数学实验室

1. 目测、估计教室内黑板的长度；

2. 记录全班每位同学的估计值，并用计算器计算这些估计值的平均值；

3. 测出教室内黑板的实际长度，这个测量值与你的估计值、全班同学估计值的平均值接近吗？

练 习

1. 某足球队比赛的场数及进球数如下：

进球数	0	1	2	3	4	5	6
场　数	6	1	5	10	12	5	1

用计算器求该队平均每场比赛的进球数 .

2. 抽样调查了 10 名学生文字录入的速度如下(单位：字/分)：

38，41，43，62，63，70，74，90，69，72 .

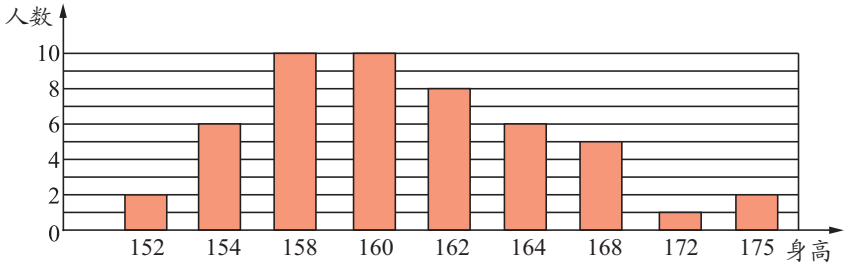
用计算器求这组数据的平均数 .

3.3 习 题

1. 用计算器求下列 5 个城市某年的降水量(单位：mm)的平均数(精确到 0.1 mm)：

城　市	西　安	北　京	广　州	上　海	银　川
降水量	588.4	279.8	1 577.2	1 419.3	169.2

2. 某校九年级(1)班学生的身高如图所示(单位：cm)：



(第 2 题)

用计算器计算该班学生的平均身高.

3.4 方差

在实际生产、生活中，我们不仅需要描述一组数据的集中趋势，而且还需要描述一组数据的离散程度．

乒乓球的标准直径为 40 mm．质检部门抽取了 A 厂生产的 10 只乒乓球，对其直径进行检测，结果如下(单位：mm)：

40.0，39.9，40.0，40.1，40.2，39.8，40.0，39.9，40.0，40.1．

上述这组数据中，最大值为 40.2 mm，最小值为 39.8 mm，最大值与最小值的差为 40.2－39.8＝0.4 (mm)．我们把这样的差叫做极差．

极差反映了一组数据的变化范围，在一定程度上描述了这组数据的离散程度．

质检部门又抽取了 B 厂生产的 10 只乒乓球，对其直径进行检测，结果如下(单位：mm)：

40.0，40.2，39.8，40.1，39.9，40.1，39.9，40.2，39.8，40.0．

这组数据的极差是多少？

通过计算可以发现，上述两组数据的极差都是 0.4 mm．怎样比较这两组数据的离散程度呢？

将上面的两组数据绘制成图 3－3：

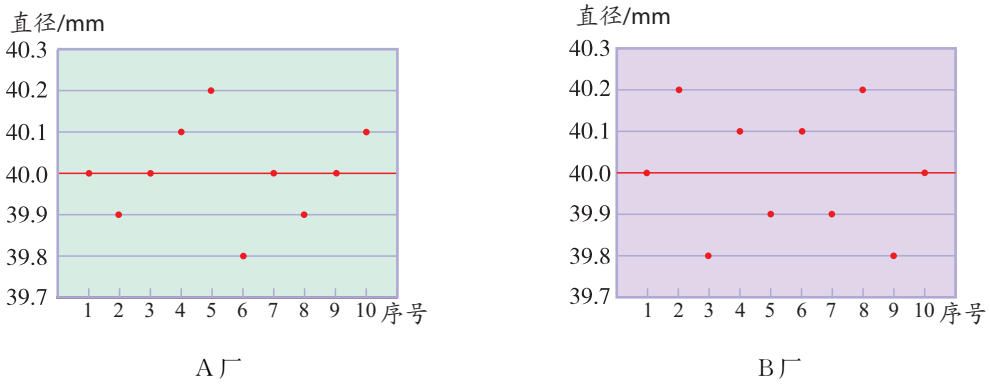


图 3－3

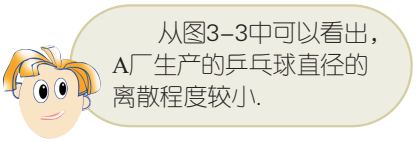
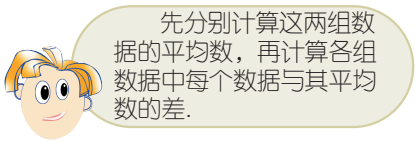
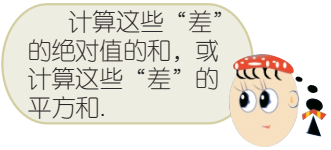


图 3－3 直观地反映了这两组数据的离散程度，怎样用数量来描述这两组数据的离散程度呢？





描述一组数据的离散程度，可以采用多种方法．在统计中，常采用下面的方法：

用一组数据 x_1、x_2、…、x_n 与它们的平均数$\overline{x}$的差的平方的平均数，即

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$$

来描述这组数据的离散程度，并把它叫做这组数据的**方差**（variance）．

一组数据的方差越大，说明这组数据的离散程度越大；一组数据的方差越小，说明这组数据的离散程度越小．

下面我们计算所抽取的 A、B 两厂生产的乒乓球直径的方差：

$$\overline{x}_A = \frac{40.0+39.9+\cdots+40.0+40.1}{10} = 40(\text{mm}),$$

$$\overline{x}_B = \frac{40.0+40.2+\cdots+39.8+40.0}{10} = 40(\text{mm}).$$

于是，

$$s_A^2 = \frac{(40.0-40)^2+(39.9-40)^2+\cdots+(40.0-40)^2+(40.1-40)^2}{10}$$

$$= 0.012(\text{mm}^2),$$

$$s_B^2 = \frac{(40.0-40)^2+(40.2-40)^2+\cdots+(39.8-40)^2+(40.0-40)^2}{10}$$

$$= 0.02(\text{mm}^2).$$

由 $s_A^2 < s_B^2$，可以推断 A 厂生产的乒乓球直径的离散程度较小，A 厂生产的乒乓球质量比较稳定．

读一读

标　准　差

极差是一组数据中最大值与最小值的差，反映这组数据的变化范围．

方差较为精确地反映一组数据相对于平均数的平均偏差，是一个被广泛用来描述数据离散程度的量．但方差以原始数据的单位的平方作为单位，所以在统计中，也用方差的算术平方根，即

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}$$

来描述一组数据的离散程度，并把它叫做这组数据的标准差（standard deriation）．

标准差的单位与原始数据的单位相同．

练习

1. 某地某日最高气温为 12℃，最低气温为 −7℃，该日气温的极差是多少？
2. 计算并比较下列两组数据的极差和方差：

   甲组：5，15，10，10，9.2，10，10.1，10，10.8，9.9；

   乙组：9，11，8，12，7，13，6，14，10，10．
3. 某市 2011 年、2012 年 3 月上旬的日最高气温(℃)如下：

	3 月 1 日	3 月 2 日	3 月 3 日	3 月 4 日	3 月 5 日	3 月 6 日	3 月 7 日	3 月 8 日	3 月 9 日	3 月 10 日
2011 年	11	12	13	18	10	9	10	14	16	17
2012 年	12	13	11	8	15	16	14	10	15	16

   该市这两年中，哪一年 3 月上旬的日最高气温比较稳定？为什么？

3.4 习题

1. 某种零件的标准直径为 10 mm，从甲、乙两台机床加工的这种零件中各抽取 5 件，对其直径进行检测，结果如下(单位：mm)：

   甲机床：10.05，10.02，9.97，9.96，10.00；

   乙机床：10.00，10.01，10.02，9.97，10.00.

   (1) 分别求这两个样本的极差、方差；

   (2) 估计哪一台机床加工的产品质量比较稳定．
2. 从某商店采购的一批标准直径为 30 mm 的机器零件中抽取 18 件，对其直径进行检测，结果如下(单位：mm)：

   30.0，29.8，30.1，30.2，29.9，

   30.0，30.2，29.8，30.2，29.8，

   30.0，30.0，29.8，30.2，30.0，

   30.1，30.0，29.9.

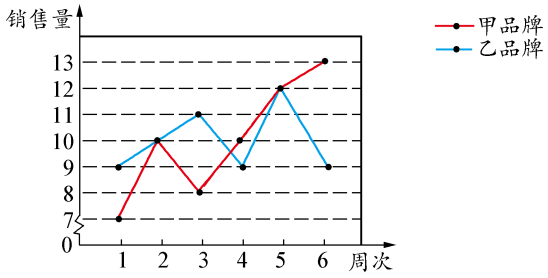
   根据抽样检测结果，估计该商店采购的这批零件直径的方差．

3. 要从甲、乙两名运动员中选出一名参加校际 100 m 比赛，对这两名运动员进行了 10 次测试，成绩如下(单位：s)：

甲	12.8	12.9	12.9	12.7	13.2	13.1	12.8	13.0	12.7	12.9
乙	12.9	12.8	12.8	12.9	13.0	12.9	12.9	13.1	12.9	12.8

根据测试成绩，你认为选派哪一名运动员参赛更好些？为什么？

4. 某家电销售商店 1～6 周销售甲、乙两种品牌冰箱的数量如图所示(单位：台)：



(第 4 题)

(1) 分别求该商店这段时间内甲、乙两种品牌冰箱周销售量的平均数和方差；

(2) 根据计算结果及折线统计图，对该商店今后采购这两种品牌冰箱的意向提出建议，并说明理由.

3.5　用计算器求方差

我们也可以用计算器来计算一组数据的平均数、方差．

甲、乙两人在相同条件下 10 次射击的成绩如下(单位：环)：

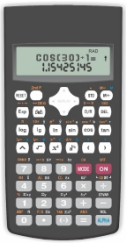
甲：10，7，8，8，8，8，8，8，9，6；

乙：8，8，8，8，5，8，8，9，9，9．

用计算器计算这两组数据的平均数、方差，比较甲、乙两人射击成绩的稳定性．

方法一：

按开机键 [OFF ON] 后，首先将计算器功能模式设定为统计模式，



依次按键：[CA MODE] [% Σxy 1] [RCL ALPHA] [M− M M+] [% Σxy 1] [MDF n 0] ▼ ▼ [RAN# x̄ 7] ▼ ▼ [→rθ SY 8] ▼ [Cr δx 6] ▼ [→xy δy 9] ▼ ▼ [Cr δx 6] ▼ [RCL ALPHA] [M− M M+]

[RCL ALPHA] [n! x̄ 4] [ANS =] 显示结果为 8．

[RCL ALPHA] [δx² ×] [ANS =] 显示结果为 1．

即甲射击成绩的平均数 $\overline{x}=8$，方差 $s^2=1$．

依次按键：[CA MODE] [% Σxy 1] [RCL ALPHA] [M− M M+] [→rθ SY 8] ▼ [n! x̄ 4] ▼ [Ar SX 5] ▼ ▼ [→rθ SY 8] ▼ [Σy 2] ▼ [→xy δy 9] ▼ [Σy² 3] ▼ [RCL ALPHA] [M− M M+]

[RCL ALPHA] [n! x̄ 4] [ANS =] 显示结果为 8．

[RCL ALPHA] [δx² ×] [ANS =] 显示结果为 1.2．

即乙射击成绩的平均数 $\overline{x}=8$，方差 $s^2=1.2$．

方法二：

按 菜单设置 键显示主菜单，使用光标键◆或◆选择统计图标，按 = 键将计算器功能设定为统计模式，再按 1（单变量统计）SHIFT 菜单设置 1（统计）1（开），选择计算类型．

依次按键：1 Rnd 0 = 7 = 8 = 复位 9 = 6 = ◆◆ 1 = 1 = 6 = 1 = 1 = 关机 AC OPTN 2（单变量计算）显示结果为

$\bar{x}$	$=8$
$\sigma^2 x$	$=1$
⋮	

即甲射击成绩的平均数$\bar{x}=8$，方差 $s^2=1$．

依次按键：8 = 5 = 复位 9 = ◆◆ 6 = 1 = 3 = 关机 AC OPTN 2（单变量计算）显示结果为

$\bar{x}$	$=8$
$\sigma^2 x$	$=1.2$
⋮	

即乙射击成绩的平均数$\bar{x}=8$，方差$s^2=1.2$．

这两组数据的平均数相同，但第一组数据的方差小于第二组数据的方差，说明甲射击成绩比乙稳定．

1. 甲、乙两家水果店 1～6 月份某种水果的销售情况如下（单位：kg）：

	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月
甲店	520	490	530	470	630	600
乙店	530	510	520	540	570	570

分别计算这两家水果店 1～6 月份该种水果月销售量的平均数、方差（精确到 1 kg）．

2. 从甲、乙两台包装机包装的标准质量为 400 g 的袋装食品中各抽取 10 袋，测得其实际质量如下（单位：g）：

甲：401，400，408，406，410，409，400，393，394，394；

乙：403，404，402，396，399，401，405，397，402，399.

（1）分别计算这两个样本的平均数、方差；

（2）比较这两台包装机包装质量的稳定性．

3.5 习题

1. 甲、乙两只股票某时段的收盘价格如下(单位：元)：

日期	9	12	13	14	15	16	19	20
甲股票	14.11	14.59	14.27	14.25	14.62	14.55	14.39	14.93
乙股票	15.49	15.53	15.51	16.07	15.88	15.98	16.67	16.80
日期	21	22	23	26	27	28	29	30
甲股票	14.93	14.97	14.89	14.59	14.76	15.03	15.12	14.87
乙股票	16.61	16.60	16.41	16.31	16.39	16.04	16.15	16.17

分别计算这两只股票在该时段收盘价格的平均数、极差、方差．

2. 进行抛掷一枚质地均匀的硬币的试验，得到的数据如下：

试验序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
抛掷次数	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
正面朝上的频数	4	8	16	19	28	34	40	44	50	52
正面朝上的频率	0.400	0.400	0.533	0.475	0.560	0.567	0.571	0.550	0.556	0.520

试验序号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
抛掷次数	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
正面朝上的频数	54	56	60	69	74	81	84	90	94	101
正面朝上的频率	0.491	0.467	0.462	0.493	0.493	0.506	0.494	0.500	0.495	0.505

(1) 分别计算序号为 1～10、11～20 的试验中，“正面朝上的频率”的极差、方差(精确到 0.000 1)；

(2) 比较序号为 1～10、11～20 的试验中，“正面朝上的频率”的稳定性．

阅读

用 Excel 求平均数、中位数、众数和方差

Microsoft Office 软件中的 Excel 不仅可以很方便地画出统计图，而且可以很方便地求出一组数据的平均数、中位数、众数和方差．

例如，10 名同学的身高（单位：cm）分别为：160，162，163，165，165，165，167，171，175，177．在 Excel 表中的第一列逐个输入这些数据，一个数据占一个单元格．选中一个空白单元格，作为计算机给出答案的位置．点击工具栏中的“＝”后，会出现一个下拉菜单．点击这个菜单，选中“AVERAGE”并拖动鼠标，将刚才输入的数据全部选中．这样，在 Number 1 这一格中就会显示这列数据所在的范围（从 A_1 到 A_{10}），按一下“确定”，立即会在刚才选中的位置显示出“平均数”为 167．要计算中位数，就选中“MEDIAN”，可得“中位数”为 165．要计算众数，就选中“MODE”，可得“众数”为 165．要计算方差，就选中“VARP”，可得“方差”为 28.2．

数学活动

估 测 时 间

全班同学分为两人一个小组做同一个试验：分别在安静和吵闹的环境中，估计 1 min 的时间．

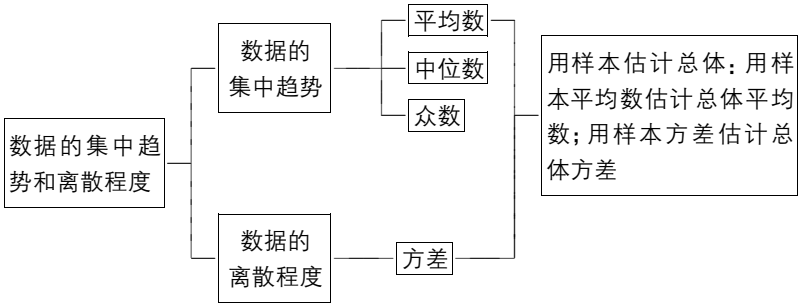
（1）在安静的环境中，一人估计 1 min 的时间，另一人看着秒表记下实际时间．然后，汇总全班同学估计的数据，计算这些数据的平均数、极差和方差，并将这些数据绘制成频数分布直方图．

（2）在吵闹的环境中，一人估计 1 min 的时间，另一人看着秒表记下实际时间．然后，汇总全班同学估计的数据，计算这些数据的平均数、极差和方差，并将这些数据绘制成频数分布直方图．

（3）这两组数据的平均数、极差和方差是否一致？频数分布直方图各有什么特点？

小结与思考

1. 本章知识结构



2. 平均数、中位数和众数从不同角度描述一组数据的集中趋势．平均数、中位数、众数各有什么特点？举例说明，在解决实际问题时，如何合理选用平均数、中位数和众数．

3. 方差刻画一组数据的离散程度．一组数据的方差越大，说明这组数据的离散程度越大；一组数据的方差越小，说明这组数据的离散程度越小．这样，我们可以通过计算两组数据的方差来比较这两组数据的离散程度．请举出几个与方差有关的生活实例．

复习题

复习巩固

1. 小明在某次考试中，语文、数学、外语 3 门学科的平均成绩为 80 分，物理、化学 2 门学科的平均成绩为 85 分．求小明这 5 门学科的平均成绩．

2. 在一次考试中，某题(满分 10 分)的得分情况如下：

得　分	0	2	4	6	8	10
百分率	15%	10%	25%	30%	15%	5%

求该题的平均得分．

3. 某校九年级甲班 50 名学生的年龄情况如下(单位：岁)：

年龄	14	15	16	17
人　数	4	21	24	1

求这个班级学生年龄的平均数、众数和中位数．

4. 某消费者调查了某商品在 20 家商店的销售价格如下(单位：元)：

75，77，74，80，78，77，79，74，80，76，
76，77，76，80，74，77，80，78，74，78．

求这组数据的平均数、方差．

5. 甲、乙两班各选 10 名学生参加电脑汉字录入比赛，参赛学生每分钟录入汉字的个数如下：

录入汉字/个	132	133	134	135	136	137
甲班参赛学生/人	1	0	1	5	2	1
乙班参赛学生/人	0	1	4	1	2	2

分别求甲、乙两班参赛学生比赛成绩的平均数、中位数、众数和方差．

6. 某篮球队在一次联赛中共进行了 10 场比赛．已知这 10 场比赛的平均得分为 88 分，且前 9 场比赛的得分依次为：97，91，85，91，84，86，85，82，88．

(1) 求第 10 场比赛的得分；

(2) 求这 10 场比赛得分的中位数、众数和方差．

7. 要从甲、乙两名运动员中选出一名参加 400 m 比赛，对这两名运动员进行了 8 次测试，成绩如下(单位：s)：

	1	2	3	4	5	6	7	8
选手甲成绩	52.1	52.2	53	52.5	53.1	52.5	52.4	52.2
选手乙成绩	52	52.4	52.8	53	52.2	52.8	52.3	52.5

根据测试成绩，你认为选派哪一名运动员参赛更好些？为什么？

8. 某品牌汽车销售公司有营销员 14 人，销售部为制定营销人员月销售汽车定额，统计了这 14 人某月的销售量如下(单位：辆)：

销售量	20	17	13	8	5	4
人　数	1	1	2	5	3	2

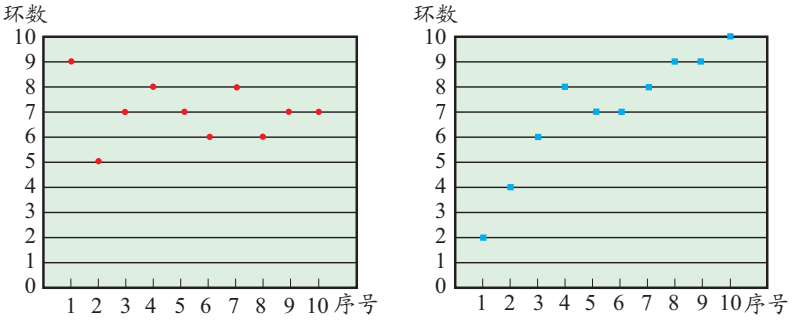
(1) 求这 14 位营销员该月销售该品牌汽车的平均数、众数、中位数；

(2) 销售部经理把每位营销员月销售量定为 9 辆，你认为是否合理，为什么？如果不合理，请你设计一个较为合理的销售定额，并说明理由．

灵活运用

9. 一组数据 6，8，10，x 的中位数与平均数相等，求 x 的值．

10. 甲、乙两人在相同条件下 10 次射击的成绩如图所示：



甲　　乙

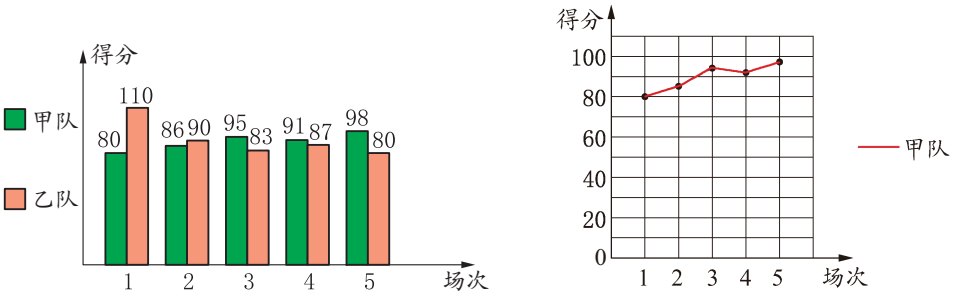
（第 10 题）

（1）填表：

	平均数	方差	中位数	命中 10 环次数
甲				
乙				

（2）评价甲、乙两人射击的成绩．

11. 甲、乙两支篮球队进行了 5 场选拔赛，比赛成绩绘制成图①、图②．



①　　②

（第 11 题）

（1）在图②中画出折线统计图表示乙队这 5 场比赛成绩的变化趋势；

（2）分别求甲、乙两队这 5 场比赛成绩的平均数和方差；

（3）根据计算结果和折线统计图，你认为哪支球队参赛更能取得好成绩？

12. 某鱼塘中养了某种鱼 2 000 条，为了估计鱼塘中该种鱼的总质量，从鱼塘中随机捕捞了 3 次，取得的数据如下：

	数量/条	平均每条鱼的质量/kg
第 1 次捕捞	15	1.6
第 2 次捕捞	15	2.0
第 3 次捕捞	10	1.8

(1) 求样本中平均每条鱼的质量；

(2) 估计鱼塘中该种鱼的总质量；

(3) 设该种鱼每千克的售价为 12 元，求出售该种鱼的收入 y（元）与出售该种鱼的质量 x（kg）之间的函数关系，并估计自变量 x 的取值范围.

探索研究

13. 在一组数据 x_1、x_2、…、x_n 中，各数据与它们的平均数$\overline{x}$的差的绝对值的平均数，即

$$T=\frac{1}{n}(|x_1-\overline{x}|+|x_2-\overline{x}|+\cdots+|x_n-\overline{x}|)$$

叫做这组数据的“平均差”. “平均差”也能描述一组数据的离散程度，“平均差”越大，说明数据的离散程度越大.

(1) 分别计算下列两组数据的“平均差”，并根据计算结果比较这两组数据的稳定性.

甲：12，13，11，15，10，16，13，14，15，11；

乙：11，16，6，14，13，19，17，8，10，16.

(2) 分别计算甲、乙两组数据的方差，并根据计算结果比较这两组数据的稳定性.

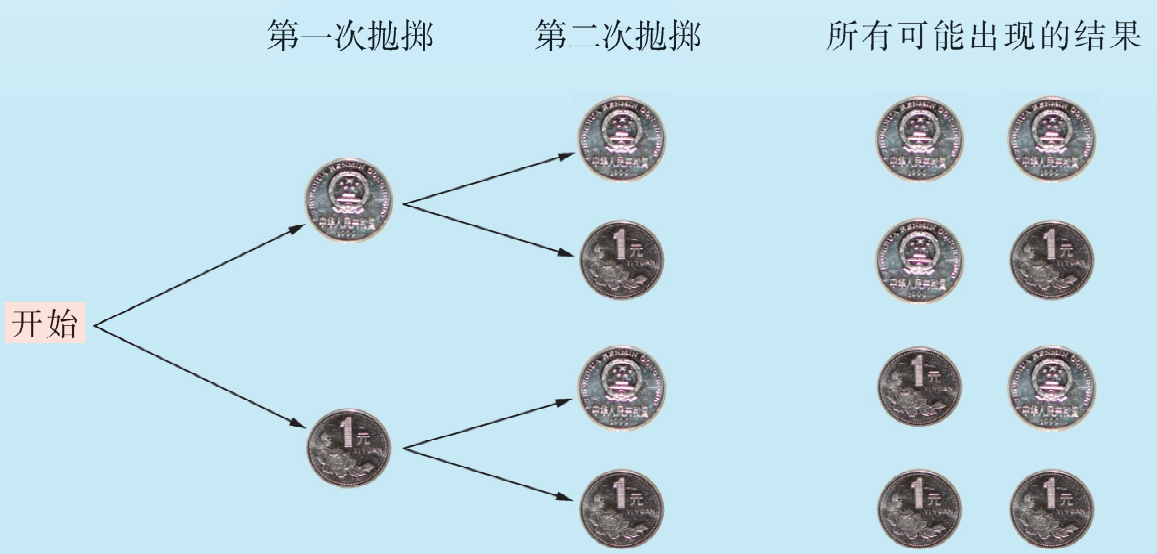
14. 把一次函数 $y=kx+b$ 中自变量的一组值 x_1、x_2、…、x_n 和对应的函数值 y_1、y_2、…、y_n 分别看成一个样本，这两个样本的平均数之间、方差之间分别有怎样的函数关系？

15. 人端坐在板凳上，头顶与凳面之间的距离称为“坐高”. 量出你所在小组各位同学的坐高(精确到 1 cm)，求出坐高的极差和方差，并与班级的其他小组进行比较.

第4章　等可能条件下的概率

P(摸到白球) $= \frac{3}{5}$

摸球、抛硬币……试验的结果具有等可能性，列举法帮助我们计算这类简单事件的概率．



抛掷一枚质地均匀的硬币 1 次，可能出现哪些结果？这些结果出现的可能性相同吗？出现正面朝上的概率有多大？

抛掷一枚质地均匀的硬币 2 次，可能出现哪些结果？这些结果出现的可能性相同吗？出现 2 次都是正面朝上的概率有多大？

本章将学习等可能条件下的概率，并运用列举法（包括列表、画树状图）计算这类事件发生的概率．

4.1　等可能性

如图 4－1，一只不透明的袋子中装有标号为 0、1、2、…、9 的 10 个小球，这些球除标号外都相同，搅匀后从中任意摸出 1 个球，会有哪些可能的结果？这些结果出现的可能性相同吗？

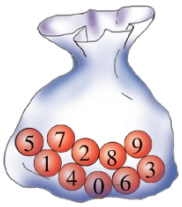


图 4－1

我们已经知道，在“抛掷硬币试验”中，假设硬币的质地是均匀的，出现“正面朝上”与出现“反面朝上”的机会均等，试验的结果就具有等可能性.

一般地，设一个试验的所有可能发生的结果有 n 个，它们都是随机事件，每次试验有且只有其中的一个结果出现．如果每个结果出现的机会均等，那么我们说这 n 个事件的发生是等可能的，也称这个试验的结果具有等可能性．

例 1　在 3 张相同的小纸条上分别标上 1、2、3 这 3 个号码，做成 3 支签，放在一个盒子中，搅匀后从中任意抽出 1 支签，会有哪些可能的结果？这些结果的出现是等可能的吗？为什么？

解：在这种情况下，会出现 3 种可能的结果：

抽到 1 号签，抽到 2 号签，抽到 3 号签．

由于每支签被抽到的机会都相同，因此这 3 种结果的出现是等可能的．

例 2　一只不透明的袋子中装有 1 个白球和 2 个红球，这些球除颜色外都相同，搅匀后从中任意摸出 1 个球．摸到白球与摸到红球是等可能的吗？为什么？

摸到的球不是白球就是红球，所以摸到白球与摸到红球是等可能的.

摸到每一个球的可能性相同，而红球有2个，白球只有1个，摸到红球的可能性大.

小明、小丽的说法哪一个正确？

解： 因为这 3 个球除颜色外都相同，所以搅匀后从中摸出每一个球的可能性是相同的．红球有 2 个，如果把它们编号为红球 1、红球 2，那么搅匀后从中任意摸出 1 个球有 3 种可能的结果：摸到白球，摸到红球 1，摸到红球 2．

这 3 种结果的出现是等可能的，因此摸到红球的可能性大，小丽的说法正确．

思考与探索

图 4－2 是一个质地均匀的正十二面体，12 个面上分别标有 1～12 这 12 个整数，抛掷这个正十二面体 1 次．

（1）会有哪些可能的结果？这些结果的出现是等可能的吗？

（2）出现朝上一面的数是奇数与出现朝上一面的数是偶数是等可能的吗？为什么？

（3）出现朝上一面的数是 4 的倍数与出现朝上一面的数是 6 的倍数是等可能的吗？为什么？

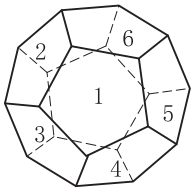
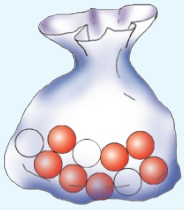


图 4－2

练习

1. A、B 两地之间的电缆有一处断点，断点出现在电缆的各个位置的可能性相同吗？
2. 把 C、H、I、N、A 这 5 个字母分别写在 5 张相同的小纸条上，放在一个盒子中，搅匀后从中任意摸出 1 张纸条，会有哪些可能的结果？这些结果的出现是等可能的吗？
3. 一只不透明的袋子中装有 7 个红球和 3 个白球，这些球除颜色外都相同，搅匀后从中任意摸出 1 个球，会有哪些可能的结果？这些结果的出现是等可能的吗？



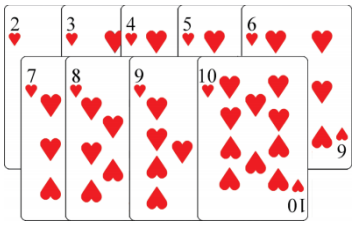
（第 3 题）

4.1 习题

1. 一套书共有上、中、下三册，将它们任意摆放到书架的同一层上，按从左向右的顺序列出所有可能摆放的结果，这些结果的出现是等可能的吗？

2. 从一名男生和两名女生中任选一名去学校图书馆帮助整理图书，会有哪些可能的结果？这些结果的出现是等可能的吗？

3. 将如图所示的 9 张牌的背面朝上，洗匀后从中任意抽取 1 张．



（第 3 题）

（1）会有哪些可能的结果？这些结果的出现是等可能的吗？

（2）抽到牌面是奇数的牌与抽到牌面是偶数的牌是等可能的吗？为什么？

4. 一只不透明的袋子中装有 3 个白球和 2 个红球，这些球除颜色外都相同，搅匀后从中任意摸出 1 个球．摸到哪种颜色的球的可能性大？为什么？

4.2 等可能条件下的概率(一)

思考与探索

抛掷一枚质地均匀的骰子 1 次，出现“朝上一面的点数大于 4”与“朝上一面的点数不大于 4”这两个事件中，哪个事件发生的可能性大?

抛掷一枚质地均匀的骰子 1 次，有 6 种可能的结果：1 点朝上，2 点朝上，3 点朝上，4 点朝上，5 点朝上，6 点朝上．这 6 种结果的出现是等可能的．

当朝上一面的点数是 5 或 6 时，“朝上一面的点数大于 4”这一事件(记为事件 A)才能发生，于是事件 A 发生的概率

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

当朝上一面的点数是 1、2、3、4 之一时，“朝上一面的点数不大于 4”这一事件(记为事件 B)才能发生，于是事件 B 发生的概率

$$P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

由于 $P(B)>P(A)$，所以出现“朝上一面的点数不大于 4”的可能性大．

一般地，如果一个试验有 n 个等可能的结果，当其中的 m 个结果之一出现时，事件 A 发生，那么事件 A 发生的概率

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

m：事件 A 发生可能出现的结果数

n：所有等可能出现的结果数

例 1　某班级有 21 名男生和 19 名女生，名字彼此不同．现有相同的 40 张小纸条，每名学生分别将自己的名字写在纸条上，放入一个盒子中，搅匀后从中任意抽出 1 张纸条．比较“抽到男生名字”与“抽到女生名字”的概率的大小．

解：全班 40 名学生中，每一名学生的名字被抽到的可能性是相同的．

$$P(\text{抽到男生名字})=\frac{21}{40},$$

$$P(\text{抽到女生名字})=\frac{19}{40},$$

所以“抽到男生名字”的概率大．

例 2　一只不透明的袋子中装有 3 个白球和 2 个红球，这些球除颜色外都相同，搅匀后从中任意摸出 1 个球．

(1) 会有哪些等可能的结果？

(2) 摸到白球、摸到红球的概率各是多少？

解：如图 4－3，分别给这 5 个球编上号码 1、2、3、4、5．

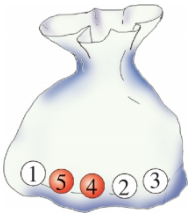


图 4－3

(1) 搅匀后从中任意摸出 1 个球，有5 种可能的结果：

摸到 1 号球，摸到 2 号球，摸到 3 号球，摸到 4 号球，摸到 5 号球．这 5 种结果的出现是等可能的．

(2) 摸到 1 号球、摸到 2 号球、摸到 3 号球这 3 种结果之一出现时，“摸到白球”这一事件发生，所以

$$P(\text{摸到白球})=\frac{3}{5}.$$

摸到 4 号球、摸到 5 号球这 2 种结果之一出现时，“摸到红球”这一事件发生，所以

$$P(\text{摸到红球})=\frac{2}{5}.$$

拓展与延伸

甲袋中装有 3 个白球和 2 个红球，乙袋中装有 30 个白球和 20 个红球，这些球除颜色外都相同．把两只袋子中的球搅匀，并分别从中任意摸出 1 个球．比较从甲、乙两只袋子中摸到红球的概率的大小．

练习

1. 一道选择题有 A、B、C、D 四个选项，其中有且只有一个正确的选项．在 A、B、C、D 中随意选择一个选项，所选选项恰好正确的概率是多少？
2. 一只袋子中装有 3 个白球和 7 个红球，这些球除颜色外都相同，搅匀后从中任意摸出 1 个球．

   P(摸到白球) = _____，P(摸到红球) = _____，

   P(摸到绿球) = _____，P(摸到白球或红球) = _____．
3. 请举出一些事件，它们发生的概率都是 $\frac{3}{5}$．

思考与探索

抛掷一枚质地均匀的硬币 2 次，2 次抛掷的结果都是正面朝上的概率是多少？

正面

反面

在抛掷一枚质地均匀的硬币 2 次的试验中，我们把第 1 次正面朝上、第 2 次正面朝上记作(正，正)，第 1 次正面朝上、第 2 次反面朝上记作(正，反)，第 1 次反面朝上、第 2 次正面朝上记作(反，正)，第 1 次反面朝上、第 2 次反面朝上记作(反，反)，并将这 4 种可能的结果列表如下：

结果 第二次抛掷 / 第一次抛掷	正	反
正	（正，正）	（正，反）
反	（反，正）	（反，反）

这 4 种结果的出现是等可能的．其中，2 次抛掷的结果都是“正面朝上”只有 1 种，所以 $P(正,正)=\frac{1}{4}$．

我们还可以画出图 4－4，列出 2 次抛掷所有等可能出现的结果：

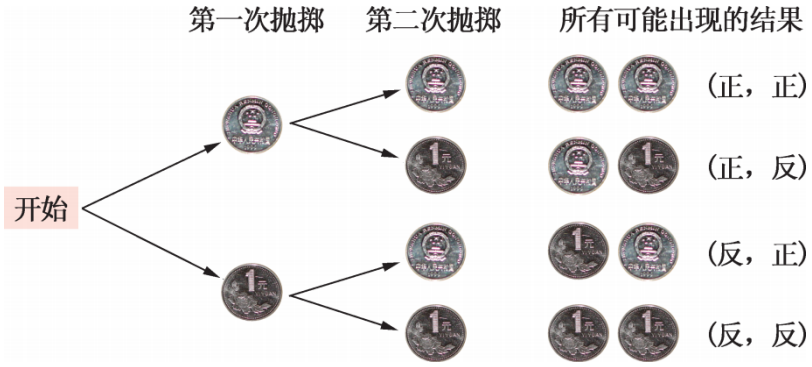


图 4－4

像图 4－4 这样的图称为**树状图**(tree derivation)，它直观地显示了一个随机事件在一次试验中所有可能的结果．通过列表或画树状图列出这些结果，必须做到既不重复，又不遗漏．

例 3　小明有红色、黄色、蓝色上衣各 1 件，有蓝色、棕色裤子各 1 条．小明任意取出 1 件上衣和 1 条裤子，恰好取到蓝色上衣和蓝色裤子的概率是多少？

解：用树状图列出所有可能的结果：

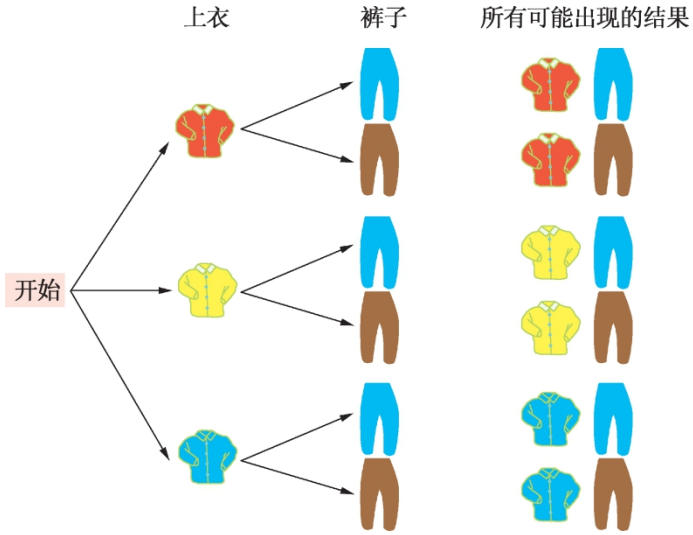


图 4－5

由图 4－5 可知，共有 6 种可能的结果，并且它们的出现是等可能的．“恰好取到蓝色上衣和蓝色裤子”记为事件 A，它的发生只有 1 种可能，所以事件 A 发生的概率

$$P(A)=\frac{1}{6},$$

即恰好取到蓝色上衣和蓝色裤子的概率是 $\frac{1}{6}$．

抛掷一枚质地均匀的硬币 3 次，3 次抛掷的结果都是正面朝上的概率是多少？

1. 一只不透明的袋子中装有 4 个大小、质地都相同的乒乓球，球面上分别标有数字 1、－2、3、－4，搅匀后先从中任意摸出 1 个球（不放回），再从余下的 3 个球中任意摸出 1 个球．
   (1) 用树状图列出所有可能出现的结果；
   (2) 求 2 次摸出的乒乓球球面上数字的积为偶数的概率．
2. 小明同时抛掷一枚质地均匀的硬币和骰子．
   (1) 用树状图列出所有可能出现的结果；
   (2) 求各种结果出现的概率．

例 4　一只不透明的袋子中装有 1 个白球和 2 个红球，这些球除颜色外都相同，搅匀后从中任意摸出 1 个球，记录颜色后放回、搅匀，再从中任意摸出 1 个球．求两次都摸到红球的概率．

图 4－6

解： 如图 4－6，把 2 个红球编号为红球 1、红球 2，用表格列出所有可能的结果：

结果 第一次摸球 \ 第二次摸球	白	红 1	红 2
白	（白，白）	（白，红 1）	（白，红 2）
红 1	（红 1，白）	（红 1，红 1）	（红 1，红 2）
红 2	（红 2，白）	（红 2，红 1）	（红 2，红 2）

由表格可知，共有 9 种可能的结果，并且它们的出现是等可能的．“两次都摸到红球”记为事件 B，它的发生有 4 种可能，所以事件 B 发生的概率

$$P(B)=\frac{4}{9},$$

即两次都摸到红球的概率是 $\frac{4}{9}$．

例 5　北京 2008 年奥运会吉祥物“福娃”是“贝贝、晶晶、欢欢、迎迎、妮妮”：

将 5 张分别印有 5 个“福娃”图案的卡片（卡片的形状、大小、质地都相同）放在盒子中，搅匀后从中任意取出 1 张卡片，记录后放回、搅匀，再从中任意取出 1 张卡片．求下列事件发生的概率：

（1）取出的 2 张卡片图案相同；

(2) 取出的 2 张卡片中，1 张为“欢欢”，1 张为“贝贝”；

(3) 取出的 2 张卡片中，至少有 1 张为“欢欢”.

解： 将印有“贝贝、晶晶、欢欢、迎迎、妮妮”的卡片分别编号为 1、2、3、4、5，用表格列出所有可能的结果：

结果 第二次取出卡片 / 第一次取出卡片	1	2	3	4	5
1	(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)
2	(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)
3	(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)	(3，5)
4	(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)	(4，5)
5	(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)	(5，5)

由表格可知，共有 25 种可能的结果，并且它们的出现是等可能的.

(1)“取出的 2 张卡片图案相同”记为事件 A，它的发生有 5 种可能，即(1，1)、(2，2)、(3，3)、(4，4)、(5，5)，所以事件 A 发生的概率

$$P(A)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5},$$

即取出的 2 张卡片图案相同的概率是 $\frac{1}{5}$；

(2)“取出的 2 张卡片中，1 张为‘欢欢’，1 张为‘贝贝’”记为事件 B，它的发生有 2 种可能，即(1，3)、(3，1)，所以事件 B 发生的概率

$$P(B)=\frac{2}{25},$$

即取出的 2 张卡片中，1 张为“欢欢”，1 张为“贝贝”的概率是 $\frac{2}{25}$；

(3)“取出的 2 张卡片中，至少有 1 张为‘欢欢’”记为事件 C，它的发生有 9 种可能，即(1，3)、(2，3)、(3，3)、(4，3)、(5，3)、(3，1)、(3，2)、(3，4)、(3，5)，所以事件 C 发生的概率

$$P(C)=\frac{9}{25},$$

即取出的 2 张卡片中，至少有 1 张为“欢欢”的概率是 $\frac{9}{25}$.

尝试与交流

举例说明，如何利用“树状图”、“表格”列出所有等可能出现的结果？它们各有怎样的特点？

练习

1. 一只不透明的袋子中装有 1 个红球和 1 个白球，这些球除颜色外都相同，搅匀后从中任意摸出 1 个球，记录颜色后放回、搅匀，再从中任意摸出 1 个球．求 2 次摸到的球颜色相同的概率．
2. 甲、乙两盒中各有 3 张卡片，卡片上分别标有数字 -7、-1、3 和 -2、1、6，这些卡片除数字外都相同．把卡片洗匀后，从甲、乙两盒中各任意抽取 1 张，并把抽得卡片上的数字分别作为平面直角坐标系中一个点的横坐标、纵坐标．
   (1) 列出这样的点所有可能的坐标；
   (2) 计算这些点落在第三象限的概率．

4.2 习题

1. 下列说法正确吗？为什么？
   (1) 某篮球运动员投篮 1 次，因为只有“投中”、“未投中”两种可能的结果，所以 $P(\text{投中})=P(\text{未投中})=\frac{1}{2}$；
   (2) 一只袋子中装有黄豆、绿豆、豌豆，从中任意取出 1 颗恰好是豌豆的概率为 $\frac{1}{3}$.
2. 抛掷一枚质地均匀的骰子 1 次，求下列事件发生的概率：
   (1) 朝上一面的点数是 7；
   (2) 朝上一面的点数是偶数；
   (3) 朝上一面的点数不大于 6.

3. 从一副扑克牌中任意抽取 1 张，求下列事件发生的概率：

(1) 抽到“大王”；

(2) 抽到“A”；

(3) 抽到“红桃”.

4. 一只不透明的袋子中装有 2 个白球和 1 个红球，这些球除颜色外都相同，搅匀后从中任意摸出 1 个球，记录颜色后放回、搅匀，再从中任意摸出 1 个球．求 2 次都摸到红球的概率．

5. 一个质地均匀的正方体每两个相对的面上分别画有相同的图案．抛掷这个正方体 2 次，求朝上一面出现相同图案的概率．

6. 有两道选择题，每道题所给的 4 个选项中，只有 1 个选项是正确的，如果从每道题的 4 个选项中任意选择 1 个选项，那么所选的两个选项都正确的概率是多少？

7. “石头、剪子、布”是一个广为流传的游戏，规则是：甲、乙两人都做出“石头”、“剪子”、“布”3 种手势中的 1 种，其中“石头”胜“剪子”，“剪子”胜“布”，“布”胜“石头”，手势相同不分胜负．假设甲、乙两人每次都随意并且同时做出 3 种手势中的 1 种，求下列事件发生的概率：

(第 7 题)

(1) 甲取胜；

(2) 乙取胜；

(3) 甲、乙两人不分胜负．

8. 抛掷一枚质地均匀的骰子 2 次，朝上一面的点数之和可能有哪些？它们是等可能的吗？点数之和为 8 的概率是多少？点数之和为多少时概率最大？

9. 小明每天骑自行车上学，都要通过安装有红、绿灯的 3 个十字路口．假设每个路口红灯和绿灯亮的时间相同，小明从家到学校，通过这 3 个十字路口时至少遇到 1 次红灯的概率是多少？没有遇到红灯的概率是多少？

4.3　等可能条件下的概率（二）

转动如图 4－7 所示的转盘，当转盘停止转动时，指针的位置有多少种可能的结果？这些结果具有等可能性吗？

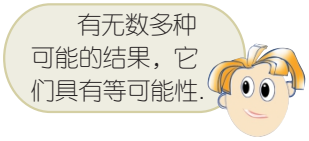


图 4－7

我们将图 4－7 所示的转盘分成 8 个面积相等的扇形，并涂上不同的颜色（如图 4－8），这些扇形除颜色外都相同．任意转动如图4－8所示的转盘 1 次，当转盘停止转动时，指针落在不同扇形就只有 8 种可能的结果，并且这些结果的出现是等可能的．由于指针落在红色区域的可能结果有 6 个，于是

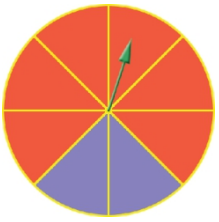


图 4－8

$$P(\text{指针落在红色区域})=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

例　某商场制作了一个可以自由转动的转盘，转盘分成 24 个面积相等的扇形，其中红色扇形 1 个、蓝色扇形 3 个、黄色扇形5 个、白色扇形 15 个（如图 4－9）．

图 4－9

商场规定：顾客每购满1 000元商品，可获得一次转动转盘的机会；当转盘停止转动时，指针落在红、蓝、黄区域，顾客可分别获得 500 元、100 元、50 元的礼品．某顾客购物 1 400 元，他获得礼品的概率是多少？获得 500 元、100 元、50 元礼品的概率各是多少？

解：该顾客购物 1 400 元，可以获得一次转动转盘的机会．

转盘被分成 24 个面积相等的扇形．任意转动转盘 1 次，当转盘停止转动时，指针落在不同扇形有 24 种可能的结果，并且它们的出现是等可能的．

P(获得礼品) $=\frac{1+3+5}{24}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$；

P(获得 500 元礼品) $=\frac{1}{24}$；

P(获得 100 元礼品) $=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$；

P(获得 50 元礼品) $=\frac{5}{24}$.

即该顾客获得礼品的概率是$\frac{3}{8}$，获得 500 元、100 元、50 元礼品的概率分别是$\frac{1}{24}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{5}{24}$．

拓展与延伸

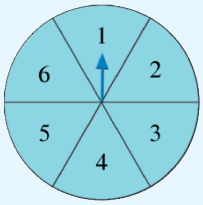
设计一个转盘，任意转动转盘 1 次，当转盘停止转动时，使指针：

(1) 落在红色区域、黄色区域、蓝色区域的概率分别为$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}$；

(2) 落在红色区域、黄色区域、蓝色区域的概率分别为$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$．

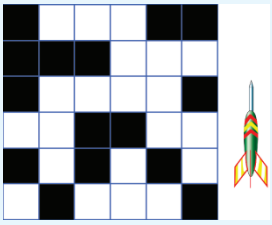
练习

1. 如图，转盘中 6 个扇形的面积都相等．任意转动转盘 1 次，当转盘停止转动时，求下列事件发生的概率：
   (1) 指针所落扇形中的数为 6；
   (2) 指针所落扇形中的数为偶数；
   (3) 指针所落扇形中的数小于 4；
   (4) 指针所落扇形中的数不大于 4；
   (5) 指针所落扇形中的数大于 0．



(第 1 题)

2. 如图，飞镖游戏板中每一块小正方形除颜色外都相同．假设飞镖击中每一块小正方形是等可能的(击中小正方形的边界线或没有击中游戏板，则重投 1 次)，任意投掷飞镖 1 次，击中哪种颜色的小正方形的概率较大？为什么？


(第 2 题)

4.3 习题

1. 下列转盘中的各个扇形的面积分别相等，任意转动这 3 个转盘各 1 次，当转盘停止转动时，指针落在红色区域的概率分别是多少？

①　　②　　③

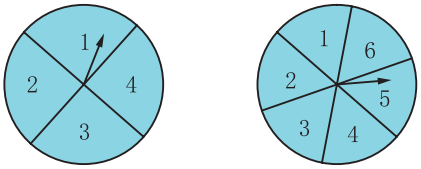
（第 1 题）

2. 按下列要求设计一个转盘：任意转动转盘 1 次，当转盘停止转动时，指针落在红色区域的概率为 $\frac{1}{4}$.

3. 如图，转盘 A 中的 4 个扇形的面积相等，转盘 B 中的 6 个扇形的面积相等．有人设计了如下游戏规则：甲、乙两人分别任意转动转盘 A、B1 次，当转盘停止转动时，将指针所落扇形中的 2 个数相乘，如果所得的积是偶数，那么甲获胜；如果所得的积是奇数，那么乙获胜．

（1）这样的规则公平吗？为什么？

（2）如果这样的规则不公平，请设计一个公平的规则，并说明理由．



A　　B

（第 3 题）

阅读

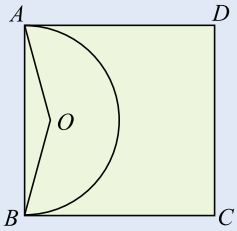
一类事件概率的计算

在 4.3 节的例题中，如果去掉转盘上的指针，改为向转动中的转盘投掷一枚飞镖，投到不同区域获得相应的礼品（假设飞镖击中转盘上的每一点是等可能的）．这样，例题中计算的各个概率值不会有变化．事实上，解决这类问题的关键，在于计算各个区域面积与整个区域面积的比值．

一般地，设试验结果落在某个区域 S 中每一点的机会均等，如果把“试验结果落在 S 中的一个小区域 M 中”记为事件 A，那么

$$P(A)=\frac{M\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}.$$

在正方形 $ABCD$ 内任取一点 O，连接 OA、OB（如图）．如果正方形 $ABCD$ 内每一点被取到的可能性都相同，分别求△OAB 是钝角三角形和直角三角形的概率．



“△OAB 是钝角三角形”这个事件发生相当于点 O 恰好落在以 AB 为直径的半圆内，所以

$$P(\triangle OAB\text{ 是钝角三角形})=\frac{\text{以 }AB\text{ 为直径的半圆的面积}}{\text{正方形 }ABCD\text{ 的面积}}=\frac{\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{AB}{2}\right)^2}{AB^2}=\frac{\pi}{8}.$$

同理，“△OAB 是直角三角形”这个事件发生相当于点 O 恰好落在以 AB 为直径的半圆上，所以

$$P(\triangle OAB\text{ 是直角三角形})=\frac{\overset{\frown}{AB}\text{ 的面积}}{\text{正方形 }ABCD\text{ 的面积}}=0.$$

注意，这个例子中，“△OAB 是直角三角形”这个事件发生的概率是 0！但这并不意味着这个事件不会发生，我们只能说该事件发生的概率为 0．这就是说，概率为 0 的事件不一定是不可能事件．

数学活动

调查“小概率事件”

人们常说：“只要有百分之一的希望，就要做百分之百的努力”、“不怕一万，就怕万一”．

概率接近于 0 的事件叫做小概率事件．生活中，通常把概率不超过 0.05 的事件看成是小概率事件．

小概率事件不是不可能事件．对于一个事件，不论它发生的概率有多小，只要重复试验的次数足够多，这个事件总是可能发生的．例如，体育彩票中奖的概率远小于 0.05，但由于买彩票的人足够多，最终总会有人中奖．

小概率事件与我们的生活息息相关．“只要有百分之一的希望，就要做百分之百的努力”，就是说，对于一些有益的小概率事件，如人体造血干细胞的配对等，我们总希望通过努力尽可能促使其发生．“不怕一万，就怕万一”，就是说，对于造成严重损失的一些小概率事件，如交通事故、矿难、地震、海啸等，我们要强化安全管理，严加防范，尽量避免这些事件的发生或尽量减少损失．

组织一次社会调查，收集、整理生活中的小概率事件，并发表你对这些小概率事件的看法．

小结与思考

1. 什么是试验的结果具有等可能性？举例说明．

2. 一个随机事件发生的概率，表示该随机事件在一次试验中发生的可能性的大小．

在有些情况下，我们可以通过相同条件下多次重复试验，根据某事件发生的频率估计该事件发生的概率．当一个随机事件在一次试验中的所有可能出现的结果是有限个，且具有等可能性时，我们只需列出一次试验可能出现的所有结果，就可以求出相应的事件发生的概率．

通常，计算等可能条件下事件发生的概率，可以通过列表或画树状图，不重复、不遗漏地列出所有等可能出现的结果．如果一个试验有 n 个等可能的结果，当其中的 m 个结果之一出现时，事件 A 发生，那么事件 A 发生的概率 $P(A)=\frac{m}{n}$．

3. 按下列要求设计一个转盘：任意转动转盘 1 次，当转盘停止转动时，指针落在红色区域的概率为 $\frac{5}{16}$．

你还能举出一些事件，它们发生的概率也为$\frac{5}{16}$吗？

复习题

复习巩固

1. 100 件某种产品中有 5 件次品，从中任意抽取 1 件，恰好抽到次品的概率是多少？

2. 一只不透明的袋子中装有 2 个白球、3 个黄球和 5 个红球，这些球除颜色外都相同，搅匀后从中任意摸出 1 个球．求下列事件发生的概率：

(1) 摸到白球；　　(2) 摸到的球不是白球；

(3) 摸到黄球；　　(4) 摸到的球不是黄球；

(5) 摸到红球；　　(6) 摸到的球不是红球．

3. 小丽认为：抛掷一枚质地均匀的硬币 2 次，有 3 种可能的结果，即出现 2 次正面朝上，出现 2 次反面朝上，出现 1 次正面朝上和 1 次反面朝上，它们是等可能的，概率都是 $\frac{1}{3}$．小丽的说法正确吗？为什么？

4. 一只不透明的袋子中装有 3 个白球、1 个红球，这些球除颜色外都相同，搅匀后从中任意摸出 2 个球(先摸出 1 个球，且这个球不放回，再摸出 1 个球)恰好是 1 个红球、1 个白球的概率是多少？

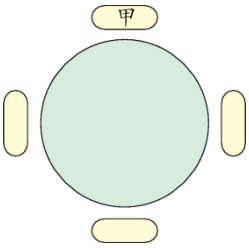
5. 小明从两副完全相同的手套(分左、右手)中任取两只．求这两只手套恰好配成一副的概率．

6. 从甲地到乙地有 A_1、A_2 两条路线，从乙地到丙地有 B_1、B_2、B_3 三条路线，其中 A_1B_2 是最短路线．任选一条从甲地到丙地的路线恰好选到最短路线的概率是多少？

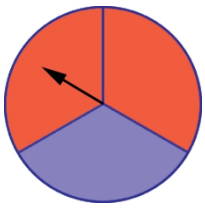
7. 有 5 根细木棒，它们的长度分别是 1 cm、3 cm、5 cm、7 cm、9 cm．从中任取 3 根恰好能搭成一个三角形的概率是多少？

8. 某班级召开主题班会，准备从由 3 名男生和 2 名女生组成的班委会中任选 2 名担任主持人．求所选主持人恰好为 1 名男生和 1 名女生的概率．

9. 一张圆桌旁设有 4 个座位，甲先坐在如图所示的座位上，乙、丙、丁 3 人等可能地坐到其他 3 个座位上．分别求乙与甲不相邻而坐、丙与丁相邻而坐的概率．



(第 9 题)



(第 10 题)

10. 如图，转盘中各个扇形的面积相等，任意转动这个转盘 2 次，当转盘停止转动时，求下列事件发生的概率：

(1) 指针 2 次都落在红色区域；

(2) 指针 2 次落在不同颜色的区域；

(3) 指针 2 次落在相同颜色的区域．

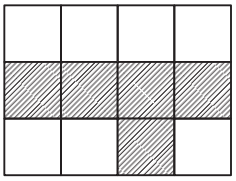
灵活运用

11. 4 张相同的卡片上分别写有数字 1、2、3、4，将卡片的背面朝上，洗匀后从中任意抽取 1 张，将卡片上的数字作为被减数；一只不透明的袋子中装有标号为 1、2、3 的 3 个小球，这些球除标号外都相同，搅匀后从中任意摸出 1 个球，将摸到的球的标号作为减数．

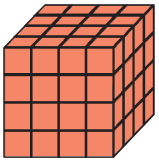
(1) 求这两个数的差为 0 的概率；

(2) 游戏规则规定：当抽到的这两个数的差为非负数时，甲获胜；否则，乙获胜．这样的规则公平吗？如果不公平，请设计一个公平的规则，并说明理由．

12. 从图中 7 个无阴影的小正方形中任选 1 个，使它与图中 5 个有阴影的小正方形能折叠成一个正方体．求这个事件发生的概率．



（第 12 题）



（第 13 题）

13. 如图，将一个棱长为 4 的正方体的表面涂上红色，再把它分割成棱长为 1 的小正方体，从中任取 1 个小正方体．求这个小正方体至少有一个面涂有红色的概率．

14. 一只不透明的袋子中装有 1 个白球、1 个蓝球和 2 个红球，这些球除颜色外都相同，搅匀后从中任意摸出 1 个球，记录颜色后放回、搅匀，再从中任意摸出 1 个球，像这样有放回地先后摸球 3 次．求下列事件发生的概率：

(1) 3 次都摸到红球；

(2) 至少有 1 次摸到红球；

(3) 至少有 2 次摸到红球；

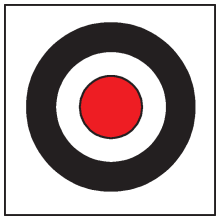
(4) 3 次摸到的球的颜色都不相同．

探索研究

15. 在本章的“阅读”材料中给出了“一类随机事件概率的计算方法”：设试验结果落在某个区域 S 中每一点的机会均等，如果把“试验结果落在 S 中的一个小区域 M 中”记为事件 A，那么 $P(A)=\frac{M\text{的面积}}{S\text{的面积}}$．

解答下列问题：

如图，一块边长为 30 cm 的正方形飞镖游戏板上画有半径分别为 5 cm、8 cm、12 cm 的 3 个同心圆．假设飞镖投中游戏板上的每一点是等可能的(若投中圆的边界或没有投中游戏板，则重投 1 次)，任意投掷飞镖 1 次，求下列事件发生的概率(精确到 0.001)：



(第 15 题)

(1) 飞镖投中红色小圆；

(2) 飞镖投中黑色圆环．

16. 4 张相同的卡片上分别写有数字 -1、-5、2、4，将卡片的背面朝上，洗匀后从中任意抽取 1 张，并将所取卡片上的数字记作一次函数 $y=kx+b$ 中的 k；再从余下的卡片中任意抽取 1 张，并将所取卡片上的数字记作一次函数 $y=kx+b$ 中的 b．分别求这个一次函数的图像经过第二、三、四象限，经过第一、三、四象限的概率．

课题学习

收集数据　分析数据　探索规律

万事万物都是有规律的．探索事物的规律，可以使我们更好地认识世界．探索事物的规律有许多方法，收集有关数据，整理、分析数据，是探索事物规律的一种方法．

活动 1　利用树叶的特征对树木分类

（1）收集 A、B、C 三种不同树种的树叶各若干片（如 10 片或 20 片）．

（2）分类测量、记录每种树叶的长和宽，并分别计算各类树叶长与宽的比值．

树种_____

树叶的长									
树叶的宽									
长与宽的比值									

（3）根据表中的数据，采用你认为合适的方法对各树种树叶长与宽的比值作出估计(例如，用各种树叶长与宽比值的平均数、或众数、或中位数作出估计；也可以用表中“所有树叶长的和÷所有树叶宽的和”作出估计)．

（4）再收集 A、B、C 三种树叶各 1 片，验证你的估计．

（5）收集某种树种的树叶 1 片，测量并计算它的长与宽的比值．参照（3)中作出的估计，判断这种树种是否属于 A、B、C 三种树种中的一种．请生物老师鉴定你们的判断是否正确．

活动 2　仿照上面的过程，选择下面的某一课题进行类似的探索：

（1）同一年龄（或年龄段）学生身高与体重的关系；

（2）我国的 GDP 与出口总量的关系；

（3）其他自己感兴趣的课题．

数学活动评价表

活动名称	矩形绿地中的花圃设计	活动时间	
参加者			
自我评价	1. 对活动中提出的“求绿地宽度”的问题，你是如何解决的？ 2. 你提出了哪些新的设计方案？在设计过程中运用了哪些知识？能举例说明吗？ 3. 在与同学的交流中，你认为比较好的设计方案有哪些？举出 1～2 例，并说明理由 . 4. 经历了“问题情境——建立模型——求解——解释与应用”的过程，你有哪些新的感受？		
同学或小组评价			
老师评语			

数学活动评价表

活动名称	图形的密铺	活动时间	
参加者			
自我评价	1. 举例说明，你是如何运用所学的数学知识解决活动中遇到的问题的？ 2. 在与同学的合作中，你是否敢于发表自己的意见和建议？发表了哪些意见和建议？你是否从同学的意见和建议中得到启发？能举例说明吗？ 3. 活动中，你设计了哪些图案？愿与同学分享吗？ 4. 通过本次活动，你对数学与生活的联系有什么感受？你还有哪些新的收获？		
同学或小组评价			
老师评语			

数学活动评价表

活动名称	估测时间	活动时间	
参加者			
自我评价	1. 你觉得这样的活动有趣吗？你对课本中的活动设计有哪些改进的建议？ 2. 活动中，你和同学是如何合作的？ 3. 在“收集数据，整理、描述、分析数据，做出估计”的过程中，你发挥了怎样的作用？有哪些收获、体会？ 4. 通过活动，你对噪声对环境的影响有哪些新的认识？		
同学或小组评价			
老师评语			

数学活动评价表

活动名称	调查“小概率事件”	活动时间	
参加者			
自我评价	1. 你和小组同学调查、收集、整理了生活中的哪些小概率事件？举出几例，并谈谈你对这些小概率事件的认识． 2. 活动中，你能与同学合作吗？在与同学的交流中，你得到哪些启发？ 3. 能从概率的角度，谈谈你对“只要有百分之一的希望，就要做百分之百的努力”、“不怕一万，就怕万一”的见解吗？		
同学或小组评价			
老师评语			

后　　记

本套教材是以《义务教育数学课程标准(2011年版)》为依据，在广泛听取专家、实验区师生的意见和建议的基础上，对《义务教育课程标准实验教科书 数学(苏科版)》(以下简称“实验本”)进行修订而成的，供义务教育7～9年级使用．

本套教材每章的开头部分设置：章头图，章头语，章头问题，本章内容概述．

每章的内容部分设置：

“数学实验室”——通过“做”数学，感悟、理解数学知识；

“数学活动”——运用本章知识解决一些简单的问题；

“阅读”和“读一读”——介绍数学思想方法、拓展课本内容；

“练一练”——按课时编写，供当堂练习用；

“习题”——按节编写，供本节各个课时课后作业用．

每章的末尾部分设置：

“小结与思考”——梳理本章知识的结构、提炼基本思想；

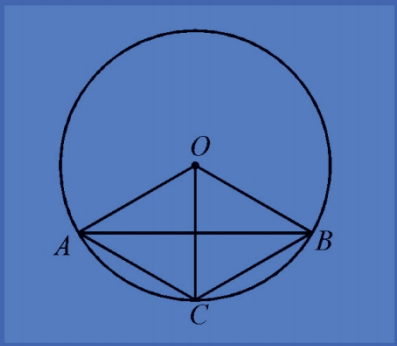
“复习题”（分为复习巩固、灵活应用、探索研究三个层次）——供本章复习时用，其中“灵活应用”、“探索研究”部分的习题可根据实际情况选用．

本套教材的每册课本设置一个“课题学习”——综合运用有关知识解决实际问题．全书使用了卡通人“小明”、“小丽”，并根据课程内容展开的需要，编写了一些卡通语．

“实验本”教材由杨裕前、董林伟任主编，丁伟明、李善良曾任副主编．参与本册各章（“实验本”）编写的有朱建明、周凯、孔凡海．

修订后的本套教材由杨裕前、董林伟任主编．参与本册修订的编写人员有周凯、杨秋萍、徐延觉、朱建明、荆福仁；参与修订讨论的有王永建、周学祁、陈志廉．

史宁中教授、顾泠沅教授、张英伯教授等专家、同行，对本套教材的修订给予了热情的帮助和指导，提出了许多宝贵的意见和建议，在此表示衷心感谢！



数学

SHU XUE

九年级 上册

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5537-2974-9

定价:9.65元

审批号:苏费核(2021年)0097号　　举报电话:12315