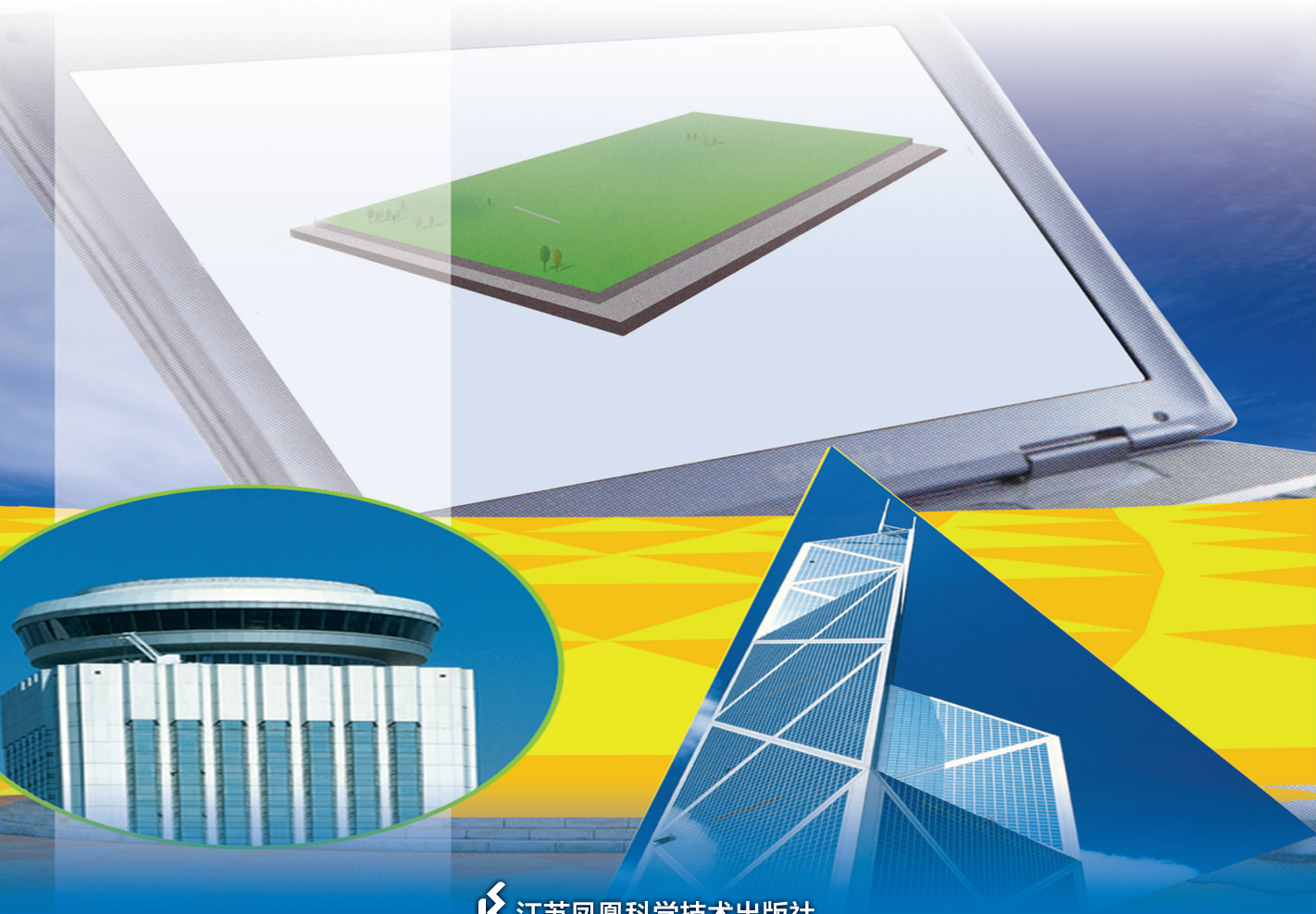
教育部审定
2012

义务教育教科书

数学

SHU XUE

七年级 下册



江苏凤凰科学技术出版社

义务教育教科书

数学

SHU XUE

七年级 下册

杨裕前　董林伟　主编

江苏凤凰科学技术出版社 · 南京

义务教育教科书
数学　七年级下册

主　　编　杨裕前　董林伟
责任编辑　许礼光　闵正年　沈　琼
责任校对　杜秋宁

出　　版　江苏凤凰科学技术出版社
出版社地址　南京市湖南路1号A楼，邮编：210009
重　　印　江苏凤凰出版传媒股份有限公司
发　　行　江苏凤凰出版传媒股份有限公司
照　　排　江苏凤凰制版有限公司
印　　刷　江苏凤凰扬州鑫华印刷有限公司

开　　本　787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张　11
版　　次　2004年11月第1版　2012年11月第3版
印　　次　2020年10月第17次印刷

标准书号　ISBN 978-7-5537-0317-6
定　　价　10.79元

如发现印、装质量问题，请与凤凰传媒联系，电话：400-828-1132

致　同　学

亲爱的同学：

春天即将来临，大地万物复苏．踏着春天的脚步，我们进入了一个充满活力的新学期．

数学，已经成为了你的朋友．通过这册课本的学习，你将更多地了解、熟悉她——

“平面图形的认识(二)”将帮助你更好地认识平行线、三角形等简单图形，并探索它们的一些基本性质.

“幂的运算”将引导你认识“幂”这种表达相同数乘积的简明形式，并通过观察、猜想，由特殊到一般地得到幂的一些运算性质.

“整式乘法与因式分解”将别开生面地通过图形面积的计算、归纳和推演，得到整式乘法的法则和公式，简明、奇妙而有趣；然后，通过整式乘法法则和公式的变形，学习多项式因式分解的一些方法.

“二元一次方程组”将使你进一步学会用“方程”这种数学模型，解决比较复杂的实际问题，进一步感受方程的魅力.

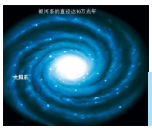
“一元一次不等式”将引导你研究数量之间的不等关系．不等式与方程一样，能有效地刻画现实世界的数量关系，解决一些简单的实际问题．

“证明”将帮助你初步学会用推理的方法，从一些基本事实出发证明探索发现的一些图形性质，初步了解“证明”的步骤和方法.

学习数学，不仅要想，而且要做；不仅要自主探索，而且要与同学合作交流；不仅要掌握数学知识和技能，而且要学会思考的方法．这样，你一定会在数学学习中不断进步！

目　录

第 7 章　平面图形的认识(二)



第 8 章　幂的运算

第 9 章　整式乘法与因式分解

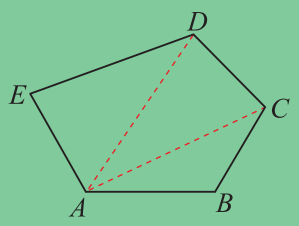
第 10 章　二元一次方程组

第 11 章　一元一次不等式

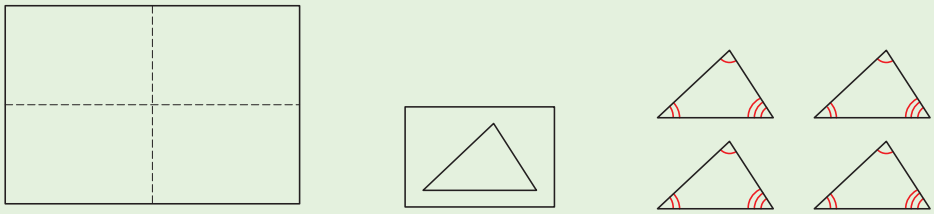
[注] 标有 * 的内容为选学内容，不作考试要求.

第 12 章　证　明

第7章　平面图形的认识(二)



平行线、三角形的形象在生活中处处可见．研究这些图形可以更好地认识图形世界．



（1）　　（2）　　（3）

把一张长方形纸片按图(1)对折两次；按图(2)画三角形(三条边的长度互不相等)并剪下，得到形状、大小相同的 4 张三角形纸片；按图(3)把 4 个三角形中相等的角标注相同的记号．

(1) 你能用这 4 张小三角形纸片拼成一个大三角形吗？

(2) 如果能，观察用 3 种记号标注的角在所拼图形中的位置，你有什么发现？

本章将探索直线平行的条件，以及平行线、三角形、多边形的一些性质．

7.1　探索直线平行的条件

用三角尺和直尺可以画平行线(如图 7－1)：

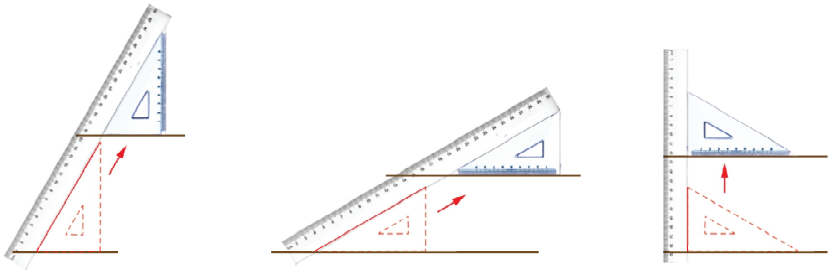


图 7－1

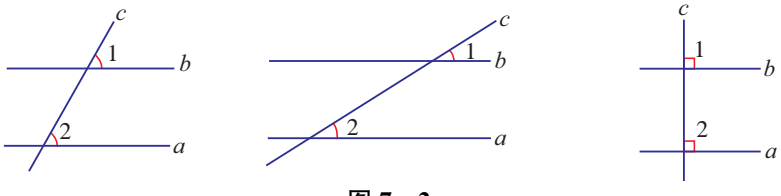


图 7－2

在图 7－2 中，∠1 与∠2 相等，直线 a、b 就平行．

想一想

在图 7－3 中，∠1 与∠2 不相等，直线 a、b 平行吗？

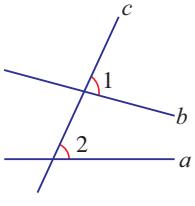
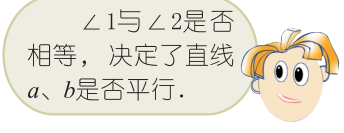


图 7－3



如图 7－4，在两条直线 a、b 被第三条直线 c 所截而成的 8 个角中，像∠1 与∠2 这样的一对角称为**同位角**(corresponding angles)．

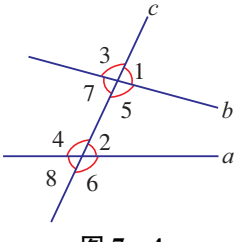
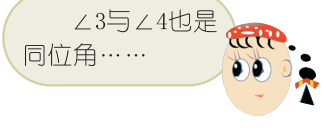


图 7－4

议一议

在图 7－4 中，还有其他的同位角吗？



实践告诉我们一个**基本事实**：

两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行．

简单说成：**同位角相等，两直线平行．**

例 1 如图 7－5，$\angle 1=\angle C$，$\angle 2=\angle C$. 指出图中互相平行的直线，并说明理由．

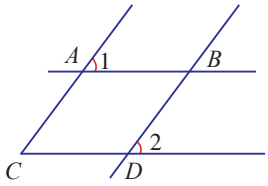


图 7－5

解： 在图 7－5 中，$AB \parallel CD$，$AC \parallel BD$.

因为$\angle 1$ 与$\angle C$ 是 AB、CD 被 AC 截成的同位角，且 $\angle 1=\angle C$，

所以 $AB \parallel CD$.

理由是：同位角相等，两直线平行．

因为$\angle 2$ 与$\angle C$ 是 BD、AC 被 CD 截成的同位角，且 $\angle 2=\angle C$，

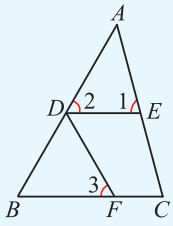
所以 $AC \parallel BD$.

理由是：同位角相等，两直线平行．

说明一个结论成立，通常应有：因、果和由因得果的理由．如例 1 中，“$\angle 1$ 与$\angle C$ 是 AB、CD 被 AC 截成的同位角，且 $\angle 1=\angle C$”是“因”；“$AB \parallel CD$”是“果”；“同位角相等，两直线平行”是“由因得果的理由”．

练一练

1. 如图，$\angle 1$ 与$\angle C$、$\angle 2$ 与$\angle B$、$\angle 3$ 与$\angle C$ 分别是哪两条直线被哪一条直线截成的同位角？



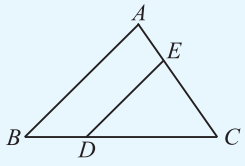
（第 1 题）

2. 如图，

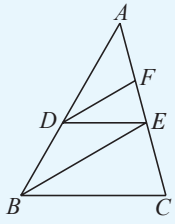
因为 $\angle A = \angle DEC$，

所以_____ // _____.

理由是：_____.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，$\angle ADE = 60°$，$\angle ABE = 30°$.

（1）当$\angle ABC$ 等于多少度时，$DE \parallel BC$？为什么？

（2）当$\angle ADF$ 等于多少度时，$DF \parallel BE$？为什么？

议一议

如图 7－6，直线 a、b 被直线 c 所截，$\angle 2 = \angle 3$. 直线 a 与直线 b 平行吗？为什么？

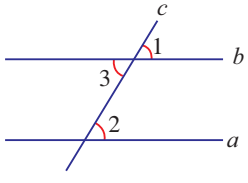
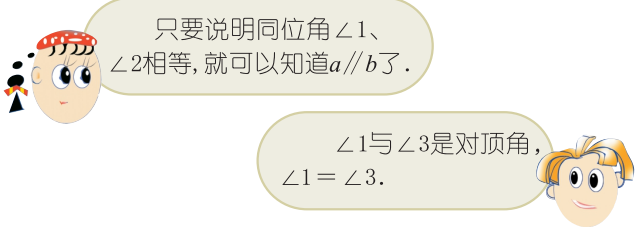


图 7－6



如图 7－6，

因为$\angle 1$ 与$\angle 3$ 是对顶角，

所以 $\angle 1 = \angle 3$.

理由是：对顶角相等.

这样，由 $\angle 1 = \angle 3$、$\angle 2 = \angle 3$，可得 $\angle 1 = \angle 2$.

因为$\angle 1 = \angle 2$，

所以 $a \parallel b$.

理由是：同位角相等，两直线平行.

想一想

如图 7－7，直线 a、b 被直线 c 所截，$\angle 2+\angle 3=180^\circ$. 直线 a 与直线 b 平行吗？为什么？

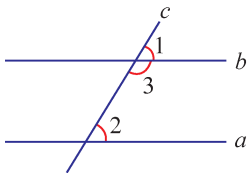
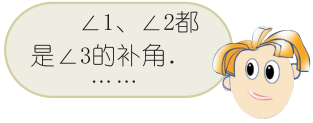


图 7－7



如图 7－8，在两条直线 a、b 被第三条直线 c 所截而成的 8 个角中，像$\angle 2$ 与$\angle 7$ 这样的一对角称为**内错角**(alternate interior angles)，像$\angle 2$ 与$\angle 5$ 这样的一对角称为**同旁内角**(interior angles on the same side).

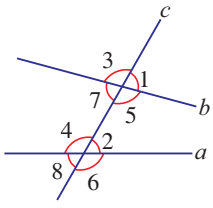


图 7－8

议一议

在图 7－8 中，还有其他的内错角或同旁内角吗？

我们从“同位角相等，两直线平行”这个基本事实出发，通过说理得到：

两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行.

简单说成：**内错角相等，两直线平行.**

两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行.

简单说成：**同旁内角互补，两直线平行.**

例 2 如图 7－9，$\angle 1=\angle 2$，$\angle B+\angle BDE=180^\circ$. 指出图中互相平行的直线，并说明理由.

解： 在图 7－9 中，$AB \parallel EF$，$DE \parallel BC$.

因为$\angle 1$ 与$\angle 2$ 是 AB、EF 被 DE 截成的内错角，且 $\angle 1=\angle 2$，

所以 $AB \parallel EF$.

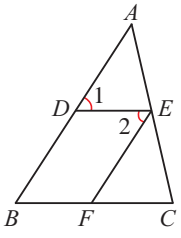


图 7－9

理由是：内错角相等，两直线平行．

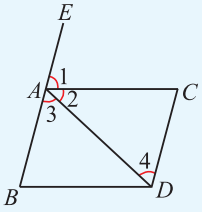
因为$\angle B$与$\angle BDE$是BC、DE被AB截成的同旁内角，且$\angle B+\angle BDE=180^\circ$，

所以$DE \parallel BC$.

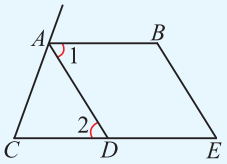
理由是：同旁内角互补，两直线平行．

练一练

1. 如图，$\angle 1$与$\angle B$、$\angle 3$与$\angle 4$、$\angle 2$与$\angle 4$分别是哪两条直线被哪一条直线截成的？它们分别是什么角？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，

（1）因为$\angle 1=\angle 2$，

所以_____$\parallel$_____.

理由是：_____.

（2）因为$\angle 2=$_____，

所以$AD \parallel BE$.

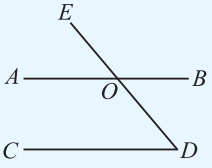
理由是：_____.

（3）因为$\angle 1+\angle B=180^\circ$，

所以_____$\parallel$_____.

理由是：_____.

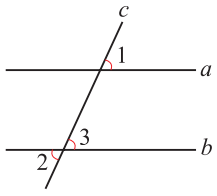
3. 如图，直线AB与射线DE相交于点O，$\angle BOE=130^\circ$，$\angle D=50^\circ$. AB与CD平行吗？为什么？



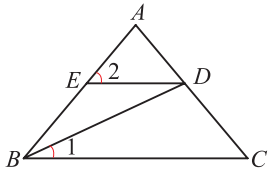
（第 3 题）

7.1 习题

1. 如图，直线 a、b 被直线 c 所截，$\angle 1=\angle 2$. 直线 a、b 平行吗？为什么？



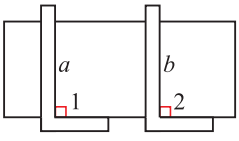
（第 1 题）



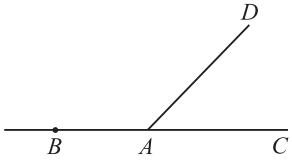
（第 2 题）

2. 如图，BD 平分 $\angle ABC$，$\angle 1=25°$，$\angle 2=50°$. ED 与 BC 有怎样的位置关系？为什么？

3. 如图，a、b 是木工师傅用角尺在工件上画出的与工件边缘垂直的两条垂线．这两条垂线平行吗？为什么？



（第 3 题）

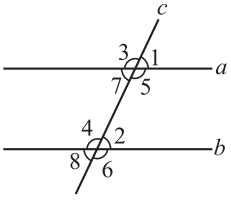


（第 4 题）

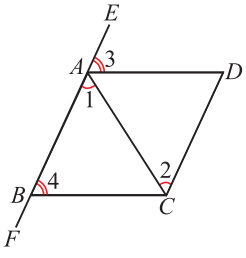
4. （1）如图，以 B 为顶点，射线 BC 为一边，用直尺和圆规作 $\angle CBE$，使 $\angle CBE=\angle CAD$；

（2）在所作图中，BE 与 AD 平行吗？为什么？

5. 如图，直线 a、b 被直线 c 所截．请给出一个合适的条件，使 $a\parallel b$，并说明理由．



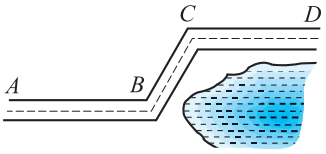
（第 5 题）



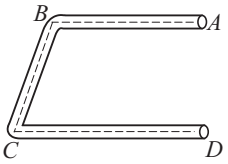
（第 6 题）

6. 如图，如果 $\angle 1=\angle 2$，那么可以判定哪两条直线平行？为什么？如果 $\angle 3=\angle 4$ 呢？

7. 如图，一条临湖道路的两个拐角（$\angle ABC$ 与 $\angle BCD$）都是 120°. 道路 AB 与 CD 平行吗？为什么？



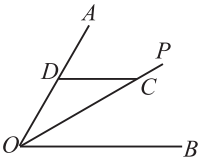
（第 7 题）



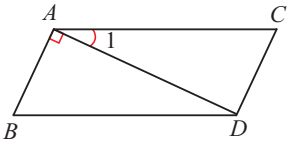
（第 8 题）

8. 如图，弯形管道 $ABCD$ 的一个拐角（$\angle ABC$）等于 110°，另一个拐角（$\angle BCD$）等于多少度时，$CD /\!/ BA$？为什么？

9. 如图，点 C 在 $\angle AOB$ 的平分线 OP 上，点 D 在 OA 上，且 $\angle DOC = \angle DCO$. DC 与 OB 有怎样的位置关系？为什么？



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，$\angle 1 = 25^\circ$，$\angle B = 65^\circ$，$AB \perp AD$.

（1）AC 与 BD 平行吗？为什么？

（2）根据题中的条件，能判断 AB 与 CD 平行吗？如果能，请说明理由；如果不能，还应添加什么条件？

7.2 探索平行线的性质

两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，或内错角相等，或同旁内角互补，那么这两条直线平行．反过来，如果两条平行直线被第三条直线所截，那么同位角、内错角、同旁内角分别有怎样的数量关系呢？

数学实验室

1．在练习本上画两条平行线 AB、CD，再画直线 EF，使 EF 与 AB、CD 相交（如图 7－10）．

指出图 7－10 中的同位角、内错角、同旁内角．

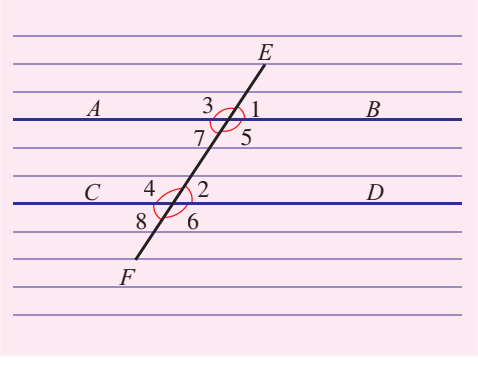


图 7－10

2．把图 7－10 剪成如图 7－11 所示的四块纸片．用图 7－11 所示的四块纸片，分别把图 7－10 中的每对同位角叠合．你发现了什么？

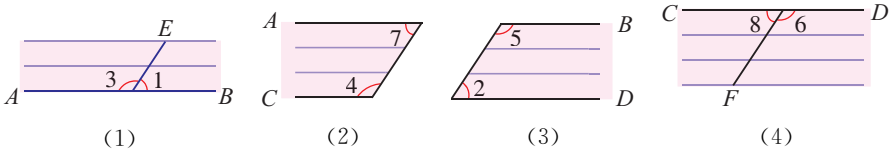
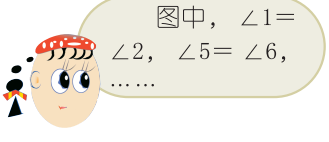
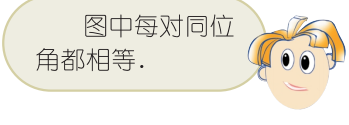


图 7－11



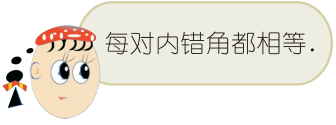


由此，我们知道：

两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等．
简单说成：两直线平行，同位角相等．

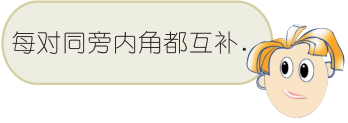
我们通过实验发现的上述结论，以后可以加以证实．

1．用图 7－11（2）、(3）所示的两块纸片，分别把图 7－10 中的每对内错角叠合．你发现了什么？



2．把图 7－11(2)、(3)所示的两块纸片分别剪成两部分，并按图 7－12 拼在一起．你发现图 7－10 中每对同旁内角之间有怎样的数量关系？

图 7－12



下面，我们来证实小丽、小明得到的结论．

如图 7－13，直线 a、b 被直线 c 所截，$a \parallel b$．
因为 $a \parallel b$，
所以 $\angle 1 = \angle 2$．
理由是：两直线平行，同位角相等．
又因为$\angle 1$ 与$\angle 3$ 是对顶角，
所以 $\angle 1 = \angle 3$．
理由是：对顶角相等．
这样，由 $\angle 1 = \angle 2$、$\angle 1 = \angle 3$，可得 $\angle 2 = \angle 3$．

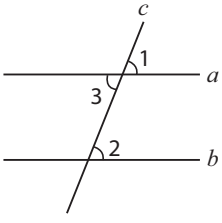


图 7－13

如图 7－14，直线 a、b 被直线 c 所截，$a \parallel b$．
因为 $a \parallel b$，
所以 $\angle 1 = \angle 2$．
理由是：两直线平行，同位角相等．
这样，由 $\angle 1 + \angle 3 = 180°$、$\angle 1 = \angle 2$，
可得 $\angle 2 + \angle 3 = 180°$.

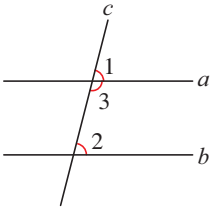


图 7－14

于是，我们得到：

两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等．
简单说成：**两直线平行，内错角相等．**
两条平行直线被第三条直线所截，同旁内角互补．
简单说成：**两直线平行，同旁内角互补．**

例 如图 7－15，$AB \parallel CD$，$\angle A = \angle D$. 判断 AF 与 ED 是否平行，并说明理由．

解： $AF \parallel ED$.
因为 $AB \parallel CD$，
所以 $\angle D = \angle BED$.
理由是：两直线平行，内错角相等．
这样，由 $\angle A = \angle D$、$\angle D = \angle BED$，
可得 $\angle A = \angle BED$．
因为 $\angle A = \angle BED$，
所以 $AF \parallel ED$.
理由是：同位角相等，两直线平行．

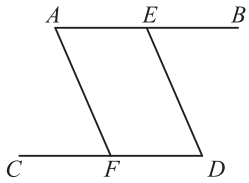
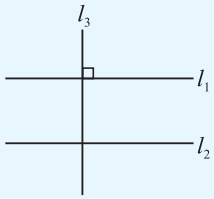


图 7－15

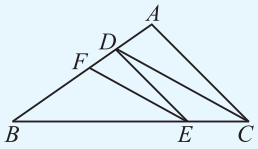
练一练

1. 如图，$l_1 \parallel l_2$，$l_3 \perp l_1$. l_3 与 l_2 有怎样的位置关系？为什么？

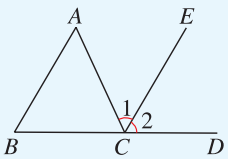


（第 1 题）

2. 如图，$CD \parallel EF$，$DE \parallel AC$. 图中哪些角相等？为什么？



（第 2 题）



（第 3 题）

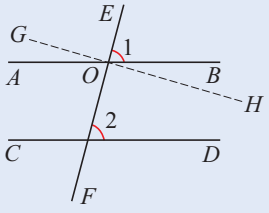
3. 如图，点 B、C、D 在一条直线上，$AB \parallel EC$，$\angle A = 55°$，$\angle B = 60°$. 求$\angle 1$、$\angle 2$ 和$\angle ACB$ 的度数．

读一读

怎样证实“两直线平行，同位角相等”

本节中，我们用叠合的方法发现了“两直线平行，同位角相等”．事实上，这个结论可以运用已有的基本事实，通过说理加以证实．

如图，直线 AB、CD 被直线 EF 所截，$AB \parallel CD$，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是同位角．



假设 $\angle 1 \neq \angle 2$，那么可以过直线 AB 与 EF 的交点 O 作直线 GH，使 $\angle EOH = \angle 2$，直线 GH 与直线 AB 是两条直线．

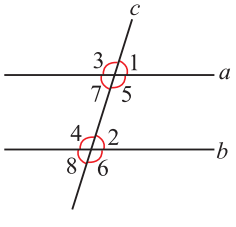
根据基本事实“同位角相等，两直线平行”，由 $\angle EOH = \angle 2$，可以得到 $GH \parallel CD$.

这样，过点 O 就有两条直线 AB、GH 都与 CD 平行．这与基本事实“过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”矛盾．

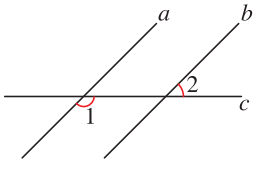
这说明 $\angle 1 \neq \angle 2$ 的假设不正确，于是 $\angle 1 = \angle 2$.

7.2 习题

1. 如图，直线 a、b 被直线 c 所截．由 $a \parallel b$，可以得到哪些结论？为什么？



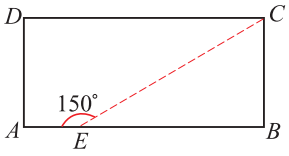
（第 1 题）



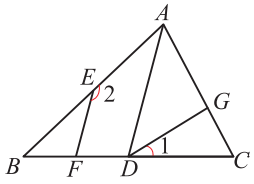
（第 2 题）

2. 如图，直线 a、b 被直线 c 所截，$a \parallel b$，$\angle 2 = 45°$．求 $\angle 1$ 的度数．

3. 如图，要在长方形钢板 $ABCD$ 的边 AB 上找一点 E，使 $\angle AEC=150^\circ$，应怎样确定点 E 的位置？为什么？



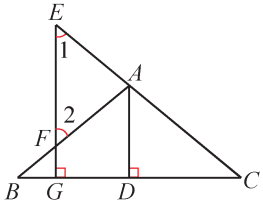
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，$AD\parallel EF$，$\angle 1+\angle 2=180^\circ$. $\angle 1$ 与 $\angle BAD$ 相等吗？为什么？

5. 如图，点 E、A、C 在一条直线上，$AD\perp BC$，$EG\perp BC$，垂足分别为 D、G，EG 交 AB 于点 F，且 $\angle 1=\angle 2$. $\angle BAD$ 与 $\angle CAD$ 相等吗？为什么？



（第 5 题）

7.3　图形的平移

手扶电梯上的人、笔直轨道上的列车……都在沿着某一方向移动．

你能举出生活中类似的例子吗？

如图 7－16，三角尺 ABC 沿直尺的边缘移动一定距离到三角尺 $A'B'C'$ 的位置．我们就说，三角尺 ABC 移动的方向是点 B 到点 B' 的方向，移动的距离是线段 BB' 的长．

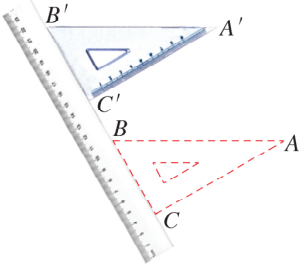


图 7－16

在平面内，将一个图形沿着某个方向移动一定的距离，这样的图形运动叫做图形的**平移**(translation)．平移不改变图形的形状、大小．

在图 7－16 中，点 A、B、C 分别移动到点 A'、B'、C' 的位置，点 A'、B'、C' 分别是点 A、B、C 的对应点．

做一做

在图 7－17 中，画出线段 AB 向左平移 4 格得到的线段 $A'B'$；再画出线段 $A'B'$ 向上平移 3 格得到的线段 $A''B''$.

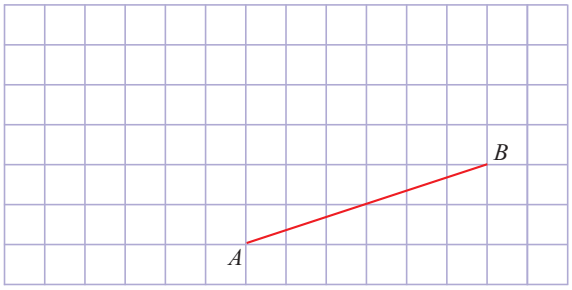


图 7－17

画线段$A'B'$、$A''B''$的关键是确定点A'、B'和点A''、B''的位置.

画出连接对应点的线段 AA''、BB''. 你能发现这些线段之间的关系吗?

议一议

怎样平移图 7－18 中的四边形 $ABCD$ 可以得到四边形$A'B'C'D'$?

画出连接对应点的线段 AA'、BB'、CC'、DD'. 你能发现这些线段之间的关系吗?

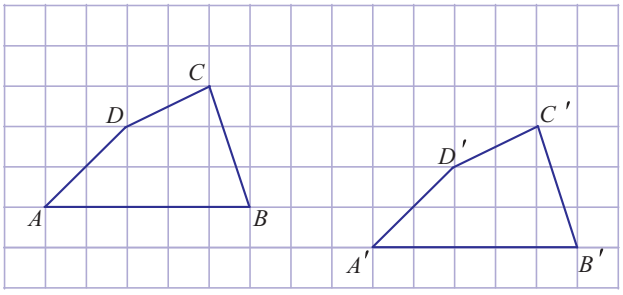


图 7－18

若在图 7－16 中画出连接对应点的线段 AA'、BB'、CC'，你能发现这些线段之间的关系吗?

一个图形和它经过平移所得的图形中，两组对应点的连线平行(或在同一条直线上)且相等.

例　平移图 7－19 中的三角形 ABC，使点 A 移到点 A' 的位置，画出平移后所得的三角形．

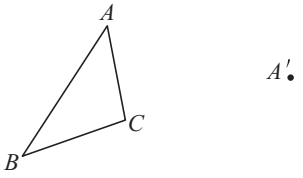


图 7－19

分析：三角形 ABC 沿点 A 到点 A' 的方向平移，平移的距离为线段 AA' 的长．设点 B、C 分别平移到点 B'、C'，根据图形平移的性质可知，$BB' \parallel CC' \parallel AA'$，$BB' = CC' = AA'$，于是可以确定点 B'、C' 的位置．

画法：（1）连接 AA'；

（2）分别过点 B、C 画 AA' 的平行线 BD、CE；

（3）分别在 BD、CE 上截取 $BB' = AA'$，$CC' = AA'$；

（4）连接 $A'B'$、$B'C'$、$C'A'$．

三角形 $A'B'C'$ 就是所要画的三角形（如图 7－20）．

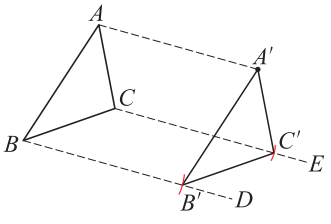
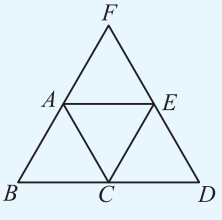


图 7－20

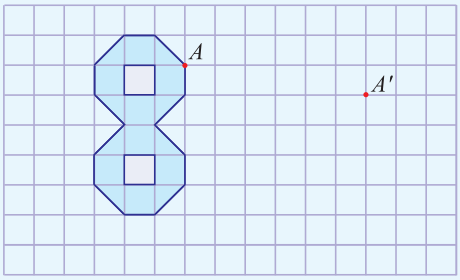
练一练

1. 图中的 4 个小三角形都是等边三角形，边长都是 1.2 cm．三角形 ABC 可以平移到图中哪几个三角形的位置？分别说出三角形 ABC 平移的方向和距离．



（第 1 题）

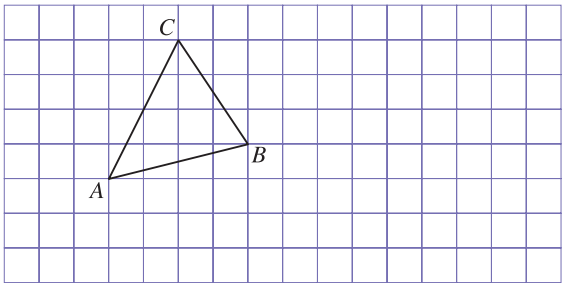
2. 平移所给的图形，使点 A 移到点 A' 的位置，画出平移后所得的图形．



（第 2 题）

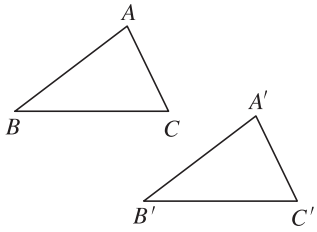
7.3 习题

1. 如图，画出三角形 ABC 先向右平移 6 格，再向下平移 2 格所得的三角形 $A'B'C'$.

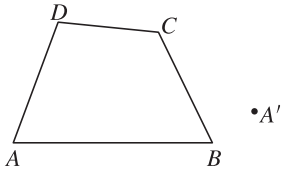


（第 1 题）

2. 如图，三角形 ABC 经过平移得到三角形 $A'B'C'$. 说出三角形 ABC 的平移方向，并量出平移的距离．



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 平移图中的四边形 $ABCD$，使点 A 移到点 A' 的位置，画出平移后所得的四边形．

7.4　认识三角形

交通警告标志牌

金字塔

日常生活中常常见到一些形状为三角形的物体，如交通警告标志牌、金字塔的侧面等．试举出类似的实例，并与同学交流．

三角形是由 3 条不在同一条直线上的线段，首尾依次相接组成的图形．

三角形有 3 条边、3 个内角和 3 个顶点．顶点是 A、B、C 的三角形记作“$\triangle ABC$”．$\angle A$ 所对的边 BC 可以用 a 表示．类似地，$\angle B$ 所对的边 AC、$\angle C$ 所对的边 AB 也可以分别用 b、c 表示(如图 7－21).

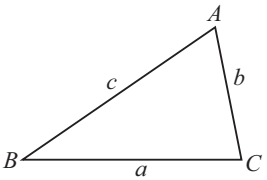


图 7－21

用量角器、圆规检验：

(1) 在图 7－22 中，哪些三角形是锐角三角形、直角三角形、钝角三角形？

(2) 在图 7－22 中，哪些三角形是等腰三角形？

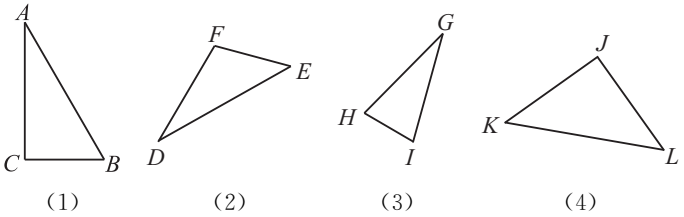


图 7－22

数学实验室

从长度分别为 3 cm、4 cm、5 cm、6 cm 和 9 cm 的小木棒（如图 7－23）中任意取 3 根，能否搭成一个三角形？请试一试．

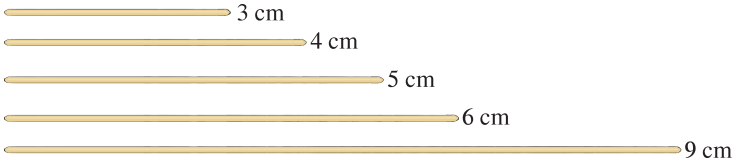
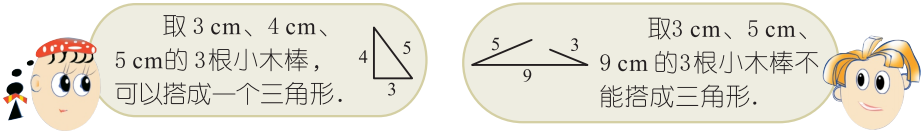
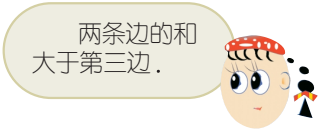


图 7－23



通过上面的实验，你发现三角形三边之间有怎样的关系？



议一议

如何根据基本事实“两点之间线段最短”，说明三角形三边之间的关系？

如图 7－24，BC 是连接 B、C 两点的线段，根据基本事实“两点之间线段最短”，可以得到 $AB+AC>BC$．同样的道理，可以得到 $AC+BC>AB$，$AB+BC>AC$．

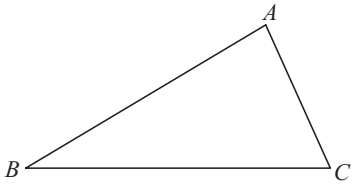


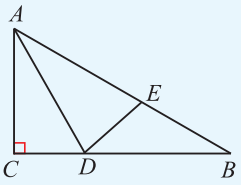
图 7－24

于是，我们得到：

三角形的任意两边之和大于第三边．

练一练

1. 图中共有几个三角形？把它们分别表示出来，并用量角器检验它们是锐角三角形、直角三角形，还是钝角三角形．
2. 4 根小木棒的长度分别为 2 cm、3 cm、4 cm 和 5 cm．用其中 3 根搭三角形，可以搭出几个不同的三角形？



（第 1 题）

议一议

如图 7－25，橡皮筋的一端固定在△ABC 的顶点 A 处，另一端从点 B 出发沿 BC 方向（或从点 C 出发沿 CB 方向）移动．在这个过程中，橡皮筋（线段）的位置不断变化，你认为其中有哪些位置是特殊的？请与同学交流．

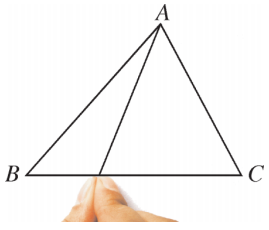
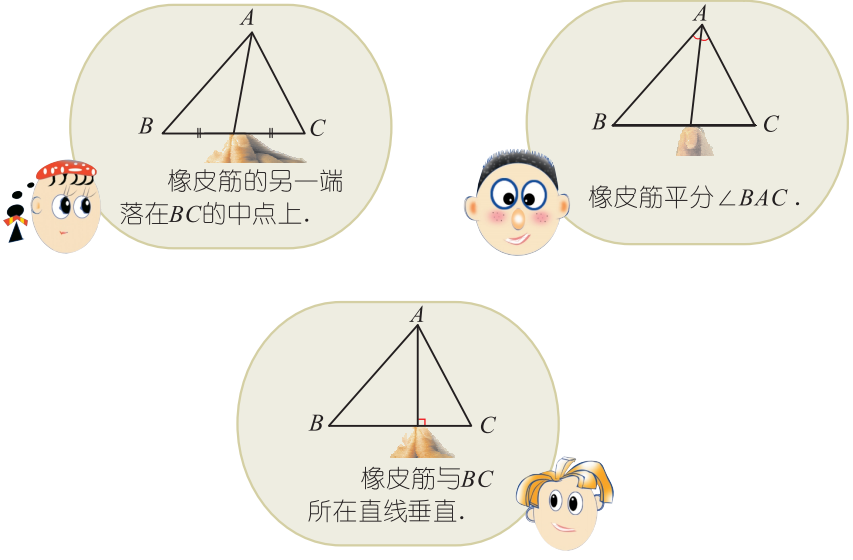


图 7－25



在三角形中，连接一个顶点与它的对边中点的线段，叫做**三角形的中线**(median of triangle).

在三角形中，一个内角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点与交点之间的线段叫做**三角形的角平分线**(angular bisector of triangle).

从三角形的一个顶点向它的对边所在直线作垂线，顶点与垂足之间的线段叫做**三角形的高线**，简称**三角形的高**(altitude of triangle).

例如，在图 7－26 中，D 是 BC 的中点，线段 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线；$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 E，线段 AE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线；$AF \perp BC$，垂足为 F，线段 AF 是 $\triangle ABC$ 的高．

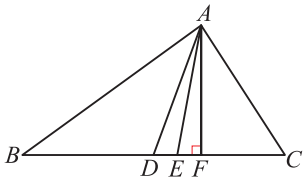
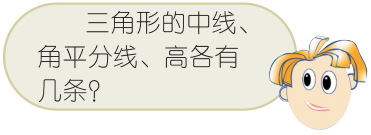


图 7－26



想一想

1. 如图 7－27，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 BC 上，且 $\angle BAD = \angle CAD$，E 是 AC 的中点，BE 交 AD 于点 F．指出图中哪条线段是哪个三角形的角平分线，哪条线段是哪个三角形的中线.

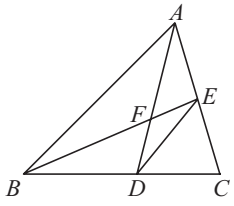


图 7－27

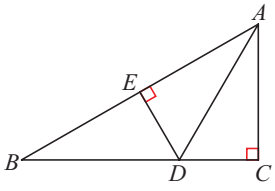
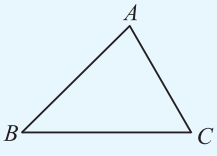


图 7－28

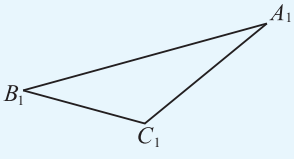
2. 如图 7－28，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，点 D 在 BC 上，$DE \perp AB$，垂足为 E. 指出图中 DE、AC 分别是哪些三角形的高.

练一练

1. 剪一张三角形纸片，用折纸的方法折出这个三角形的 3 条角平分线．你有什么发现？
2. 分别画出图中各个三角形的 3 条中线．你有什么发现？



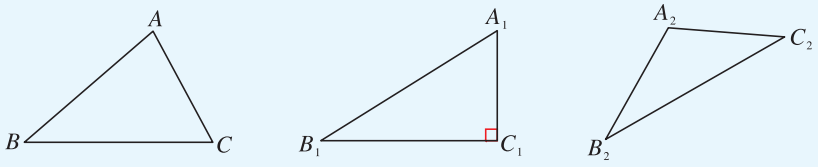
①



②

（第 2 题）

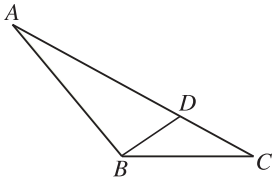
3. 分别画出图中各个三角形的 3 条高．你有什么发现？



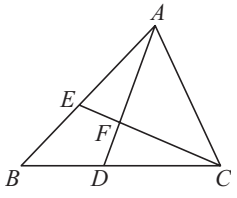
（第 3 题）

7.4 习题

1. 图中共有几个三角形？把它们分别表示出来，并写出它们的边和角．



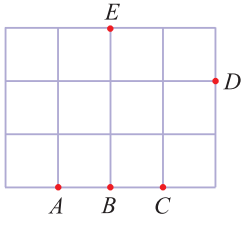
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在△ABC 中，点 D、E 分别在 BC、AB 上，AD 交 CE 于点 F．图中 AC 是哪些三角形的边？∠B 是哪些三角形的内角？

3. 如图，方格中的点 A、B、C、D、E 称为“格点”（格线的交点）．以这 5 个格点中的 3 点为顶点画三角形，一共可以画多少个？其中，哪些是直角三角形、钝角三角形、锐角三角形？哪些是等腰三角形？



（第 3 题）

4. 下列长度的 3 根小木棒能搭成三角形吗？

（1）3 cm，5 cm，10 cm；

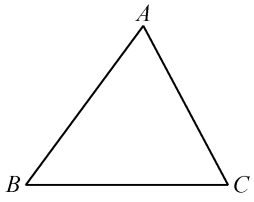
（2）5 cm，4 cm，9 cm；

（3）4 cm，6 cm，9 cm．

5. 如图，$\triangle ABC$ 是锐角三角形.

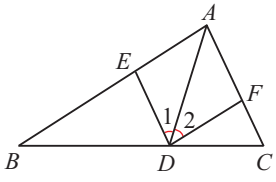
(1) 过点 A 画 BC 的垂线，垂足为 D；过点 A 画 AB 的垂线，交 BC 的延长线于点 E.

(2) 在所画图中，哪些三角形是直角三角形、钝角三角形？AD 是哪些三角形的高？

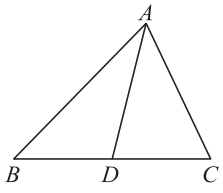


（第 5 题）

6. 如图，AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，点 E、F 分别在 AB、AC 上，且 $DE /\!/ AC$，$DF /\!/ AB$. $\angle 1$ 与$\angle 2$ 相等吗？为什么？



（第 6 题）



（第 7 题）

7. (1) 如图，AD 是$\triangle ABC$ 的中线．$\triangle ABC$ 与$\triangle ABD$ 的面积有怎样的数量关系？为什么？

(2) 你能把 1 个三角形分成面积相等的 4 个三角形吗？试画出相应的图形．

7.5　多边形的内角和与外角和

小学里，我们曾经把一个三角形的 3 个角拼在一起，发现了“**三角形的内角和是 180°**”的结论.

议一议

如图 7－29，在△ABC 的边 AC 所在的直线绕点 A 按逆时针方向旋转的过程中，直线 AC 与边 BC 的延长线分别交于点 C_1、C_2、C_3……

（1）在上述过程中，哪些角的大小发生了变化？

（2）度量∠BAC 与∠ACB，并求它们的和；度量∠BAC_1 与∠AC_1B、∠BAC_2 与∠AC_2B、∠BAC_3 与∠AC_3B……并分别求它们的和．你发现了什么？

（3）当直线 AC 绕点 A 旋转到 AC'，使 AC' // BC 时，度量∠BAC'的度数，你发现了什么？

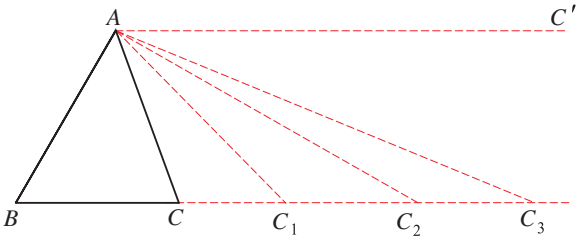
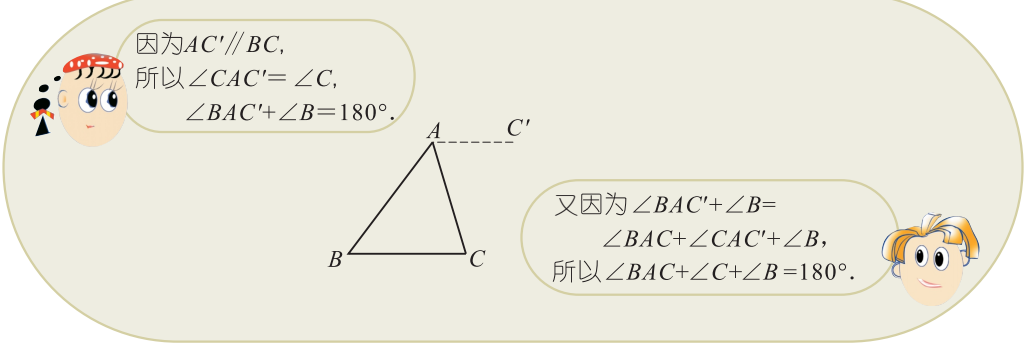


图 7－29

试一试

通过上面的探索活动，同样可以发现“三角形的内角和是 180°”的结论．你能说明这个结论成立的理由吗？



例 1 在△ABC 中，$\angle A=40^\circ$，$\angle B=\angle C$. 求$\angle C$ 的度数.

解： 在△ABC 中，

由 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$、$\angle A=40^\circ$，得

$\angle B+\angle C=180^\circ-\angle A=180^\circ-40^\circ=140^\circ$.

由 $\angle B=\angle C$，得

$2\angle C=140^\circ$，$\angle C=70^\circ$.

例 2 如图 7－30，△ABC 的角平分线 BD、CE 相交于点 P，$\angle A=70^\circ$. 求$\angle BPC$ 的度数.

解： 在△ABC 中，

由 $\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$、$\angle A=70^\circ$，得

$\angle ABC+\angle ACB=180^\circ-\angle A=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.

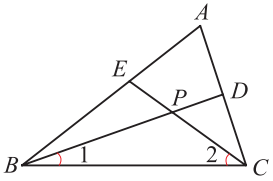


图 7－30

因为 BD、CE 分别平分 $\angle ABC$、$\angle ACB$，

所以 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB$，

$\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}\times 110^\circ=55^\circ$.

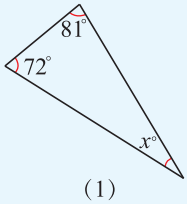
在 △PBC 中，

由 $\angle BPC+\angle 1+\angle 2=180^\circ$、$\angle 1+\angle 2=55^\circ$，得

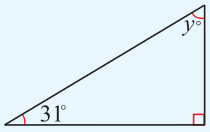
$\angle BPC=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)=180^\circ-55^\circ=125^\circ$.

练一练

1. 求图中 x 和 y 的值.

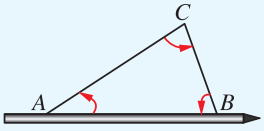


(1)



(2)

（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，铅笔放置在△ABC 的边 AB 上，笔尖方向为点 A 到点 B 的方向. 把铅笔依次绕点 A、点 C、点 B 按逆时针方向旋转$\angle A$、$\angle C$、$\angle B$ 的度数，笔尖方向发生了怎样的变化？这说明了什么？

3. 一个三角形能有两个内角是直角或钝角吗？为什么？

在平面内，由不在同一条直线上的 3 条或 3 条以上的线段首尾依次相接组成的图形叫做多边形.

图 7－31 中的两个图形分别记作四边形 $ABCD$、五边形 $ABCDE$.

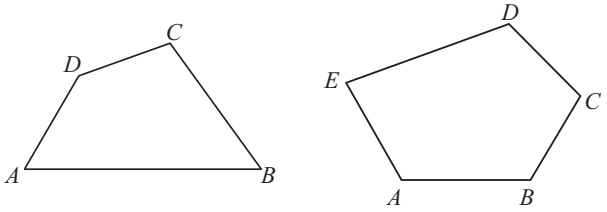
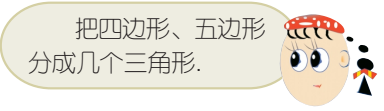
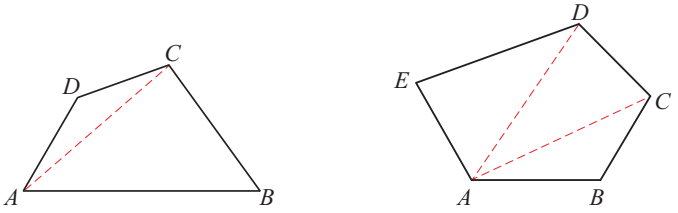


图 7－31

在图 7－31 中，四边形 $ABCD$、五边形 $ABCDE$ 的内角和分别等于多少度？



在四边形 $ABCD$ 中，连接对角线 AC，把它分成 2 个三角形（如图 7－32（1））．这样，你能说出四边形 $ABCD$ 的内角和吗？



（1）　　（2）

图 7－32

在五边形 $ABCDE$ 中，连接对角线 AC、AD，把它分成 3 个三角形（如图 7－32（2））．这样，你能说出五边形 $ABCDE$ 的内角和吗？

仿照上面的方法，图 7－33 中的六边形 $ABCDEF$ 可以分成多少个三角形？它的内角和是多少度？

……

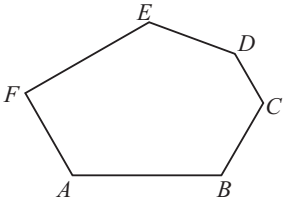


图 7－33

类似地，n 边形可以分成多少个三角形？它的内角和是多少度？

填表：

多边形的边数	3	4	5	6	7	…	n
分成的三角形个数	1	2	3			…	
多边形的内角和	180°	180°×2	180°×3			…	

由此，我们知道：

n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180^\circ$.

试一试

(1) 如图 7－34(1)，点 P 在 n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 内；

(2) 如图 7－34(2)，点 P 在 n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的边 A_2A_3 上.

利用图 7－34，你能计算 n 边形的内角和吗？

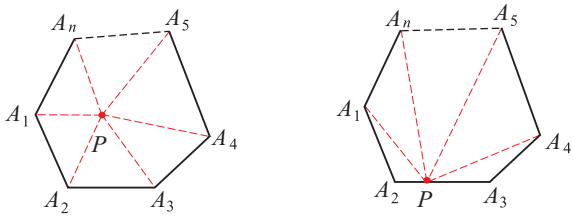


图 7－34

例 3 如图 7－35，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$ 与 $\angle C$ 互补，$\angle ABC$、$\angle ADC$ 的平分线分别交 CD、AB 于点 E、F. $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 有怎样的数量关系？为什么？

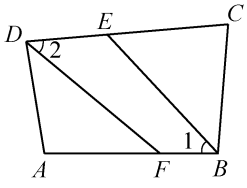


图 7－35

解： $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互余.

在四边形 $ABCD$ 中，

$\angle A+\angle ABC+\angle C+\angle ADC=(4-2)\times 180^\circ=360^\circ$.

由 $\angle A+\angle C=180^\circ$，得

$\angle ABC+\angle ADC=360^\circ-(\angle A+\angle C)=360^\circ-180^\circ=180^\circ$.

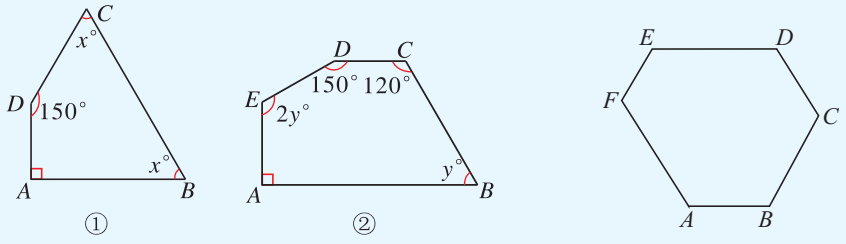
由 BE、DF 分别平分 $\angle ABC$、$\angle ADC$，得

$\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ADC$.

因此，$\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ADC)=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$，即 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互余.

练一练

1. 求图中 x 和 y 的值．



（第 1 题）　　（第 2 题）

2. 如图，六边形 $ABCDEF$ 的内角都相等，求它的每个内角的度数．

3. 一个多边形的内角和为 1 080°，这个多边形是几边形？

在图 7－36 中，把△ABC 的边 AB 延长，得到∠CBD.

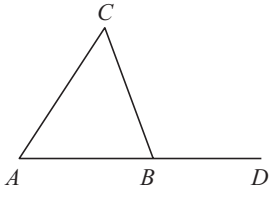


图 7－36

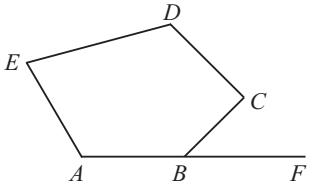


图 7－37

在图 7－37 中，把五边形 $ABCDE$ 的边 AB 延长，得到∠CBF.

像这样，多边形的一边与它的邻边的延长线组成的角，叫做多边形的外角．在图 7－36 中，∠CBD 是△ABC 的一个外角；在图 7－37 中，∠CBF 是五边形 $ABCDE$ 的一个外角．

在多边形的每个顶点处分别取多边形的一个外角，这些外角的和叫做多边形的外角和．

做一做

1. 如图 7－38，∠α、∠β、∠γ 是△ABC 的 3 个外角．

（1）若剪下△ABC 的这 3 个外角，把它们的顶点 A、B、C 重合在同一点 O 上，能拼成图 7－39 的形状吗？由此，你发现了什么？

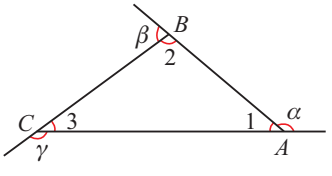


图 7－38

(2) 在图 7－38 中，

$\angle\alpha+\angle1=180^\circ$，

$\angle\beta+\angle2=180^\circ$，

$\angle\gamma+\angle3=180^\circ$，

$\angle1+\angle2+\angle3=180^\circ$，

则 $\angle\alpha+\angle\beta+\angle\gamma=$ _____.

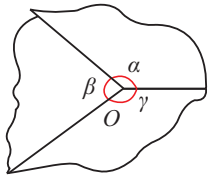


图 7－39

2. 如图 7－40，$\angle\alpha$、$\angle\beta$、$\angle\gamma$、$\angle\delta$ 是四边形 $ABCD$ 的 4 个外角．

(1) 仿照 1(1) 试一试；

(2) 在图 7－40 中，

$\angle\alpha+\angle1=180^\circ$，

$\angle\beta+\angle2=180^\circ$，

$\angle\gamma+\angle3=180^\circ$，

$\angle\delta+\angle4=180^\circ$，

$\angle1+\angle2+\angle3+\angle4=180^\circ\times2$，

则 $\angle\alpha+\angle\beta+\angle\gamma+\angle\delta=$ _____.

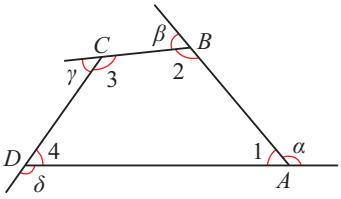
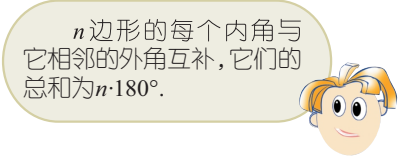


图 7－40

3. 你能说出五边形、六边形的外角和是多少度吗？

想一想

我们已经知道 n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot180^\circ$，根据这个结论，你能求 n 边形的外角和吗？



由此，我们知道：

多边形的外角和等于 360°.

议一议

从图 7－41 的五边形 $ABCDE$ 纸片中剪去一个三角形，剩余的部分是几边形？它们的内角和、外角和分别是多少？

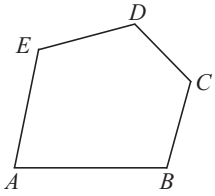
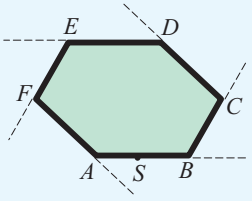


图 7－41

练一练

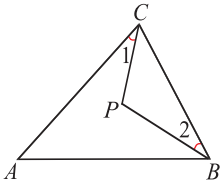
1. 如图，小明从六边形草地 $ABCDEF$ 的边 AB 上一点 S 出发，步行 1 周回到原处．在步行过程中，小明转过的角度的和是多少？这说明了什么？
2. 在一个多边形中，小于 108° 的内角最多有几个？为什么？



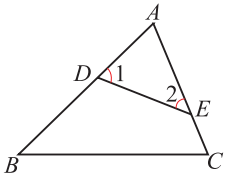
（第 1 题）

7.5 习题

1. 在△ABC 中，根据下列条件，求∠A 的度数：
   (1) ∠C = 20°，∠B = ∠A；
   (2) ∠A、∠B、∠C 的度数之比为 1∶2∶3．
2. 如图，在△ABC 中，∠ACB = 70°，∠1 = ∠2．求∠BPC 的度数．

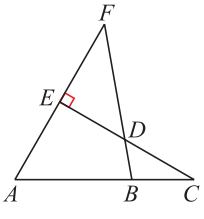


（第 2 题）

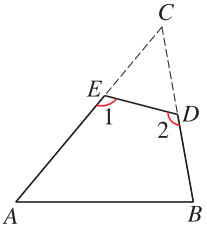


（第 3 题）

3. 如图，在△ABC 中，点 D、E 分别在 AB、AC 上．∠B+∠C 与∠1+∠2 有怎样的数量关系？为什么？
4. 如图，CE ⊥ AF，垂足为 E，CE 与 BF 相交于点 D，∠F = 40°，∠C = 30°．求∠EDF、∠DBC 的度数．



（第 4 题）

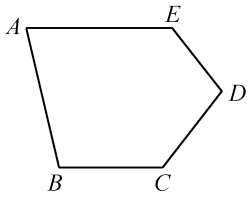


（第 5 题）

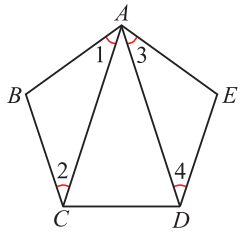
5. 如图，从△ABC 的纸片中剪去△CED，得到四边形 $ABDE$．若∠C = 50°，求∠1 与∠2 的和．

6. 如果一个八边形的内角都相等，那么它的每个内角等于多少度？

7. 如图，在五边形 $ABCDE$ 中，$AE /\!/ BC$. 求$\angle C$、$\angle D$、$\angle E$ 的和.



（第 7 题）



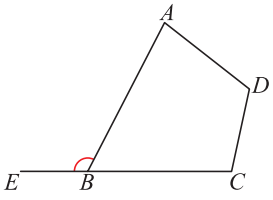
（第 8 题）

8. 如图，五边形 $ABCDE$ 的内角都相等，且 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 求$\angle CAD$ 的度数 .

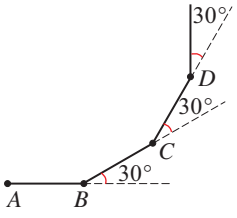
9. 一个多边形的每一个外角都是 45°，这个多边形是几边形？它的内角和为多少度？

10. 有没有这样的多边形，它的内角和是它的外角和的 3 倍？如果有，指出它是几边形，并说明理由 .

11. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A+\angle C=180^\circ$，$\angle ABE$ 是四边形 $ABCD$ 的一个外角 .$\angle ABE$ 与$\angle D$ 相等吗？为什么？



（第 11 题）



（第 12 题）

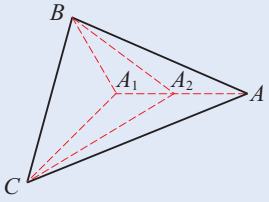
12. 如图，小明从点 A 出发沿直线前进 10 m 到达点 B，向左转 30°后又沿直线前进 10 m 到达点 C，再向左转 30°后沿直线前进 10 m 到达点 D……照这样走下去，小明第一次回到出发点 A，一共走了多少米？

阅读

从特殊情形入手

解决某个问题有困难时，我们可以先考虑问题的特殊情形，然后利用在特殊情形下所获得的结论或解决问题的方法来探索、解决一般情形的问题．这种解决问题的思想称为特殊化．我们可以从下面的两个例子来体会这种思想．

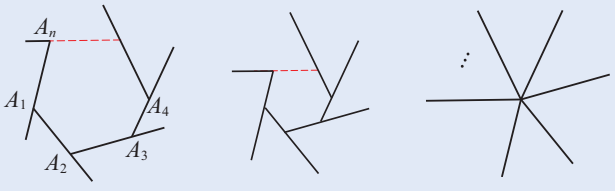
1. 做一个小实验：用橡皮筋构成△ABC，使顶点 B、C 固定，顶点 A 可以移动(如右图)．当顶点 A 运动时，就可以得到不同的三角形．这些三角形的内角和是多少度？



当顶点 A 越靠近 BC 时，$\angle BAC$ 越接近 $180°$，$\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 越来越小，接近于 $0°$，而当顶点 A 落到 BC 上时，这时 $\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180°$.

于是，我们猜想，在一般情形下，△ABC 的内角和可能是 $180°$．当然，我们已经用多种方法证实了这一结论．

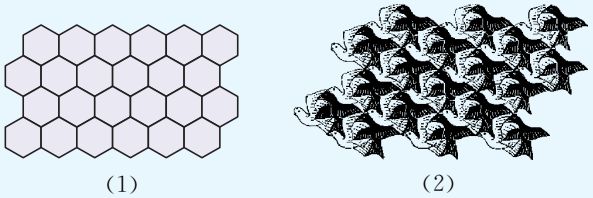
2. “多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外角和是 $360°$”的结论，也可以这样来探索、发现：当多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 逐步“缩小”时(形状不变)，它的外角和不变．若多边形“缩小”成一点，则它的所有外角就组成一个周角，它们的和就是 $360°$．



数学活动

利用平移设计图案

1. 图 7－42 中的两幅图案分别是由怎样的“基本图案”平移得到的？



(1)　　(2)

图 7－42

2. 你能发现图 7－43 的规律吗？请按你发现的规律继续画下去．

图 7－43

3. 图 7－44 是一幅“水兵合唱队”图案．这幅图案是如何利用平移的方法制作的？

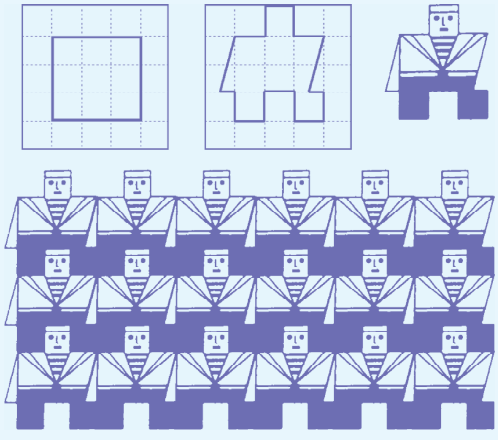


图 7－44

4. 4 个相同的等腰直角三角形纸片按图 7－45 摆放.

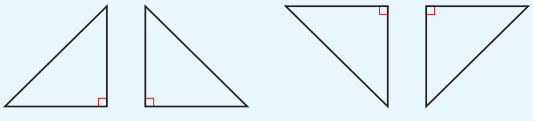


图 7－45

通过平移改变三角形纸片的位置，可以得到不同的图案．例如，小丽得到了图 7－46，并把它命名为“桥”．你也能用这样的方法得到新的图案，并给图案命名吗？

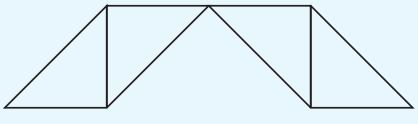


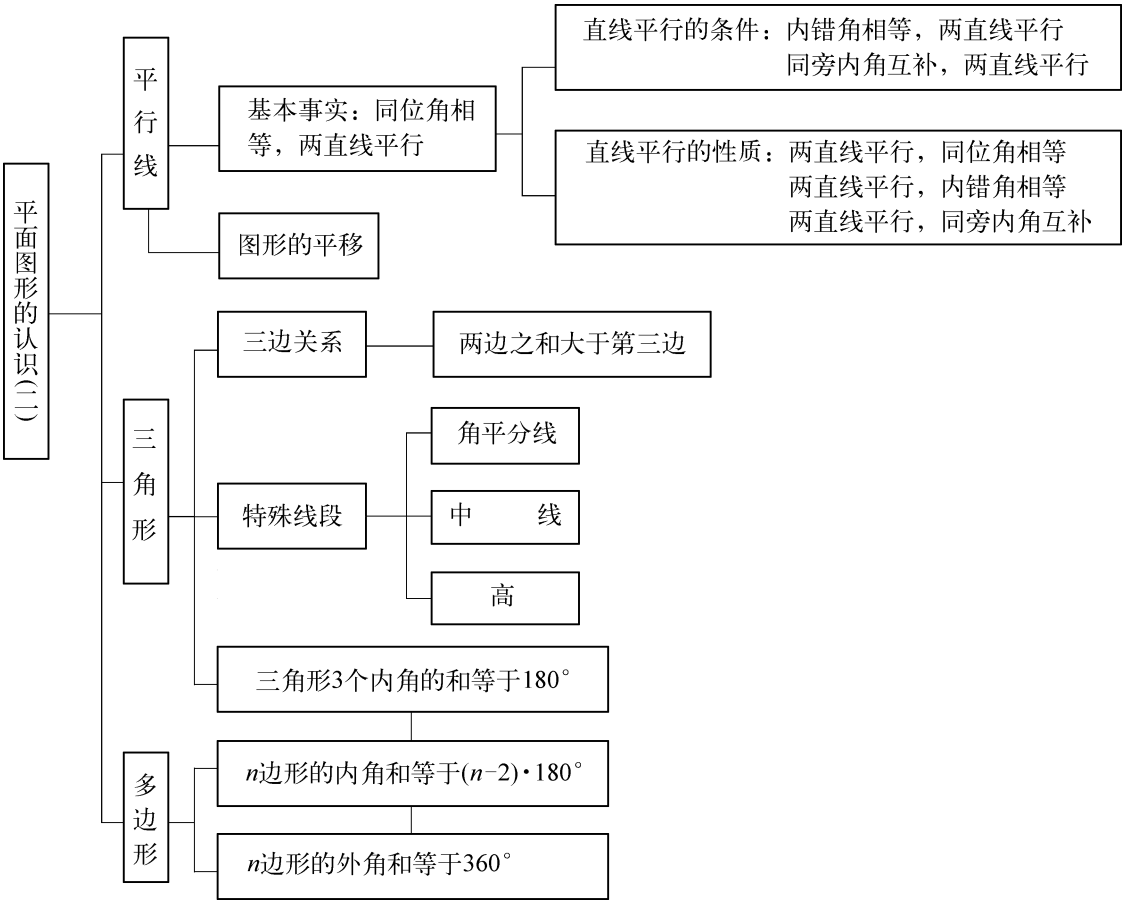
图 7－46

5. 与同学合作，收集几幅利用平移制作的图案，并在全班交流．

6. 利用平移设计一幅图案，并展示你的作品．

小结与思考

1. 本章知识结构



2. 两条直线被第三条直线所截，由同位角相等，或内错角相等，或同旁内角互补，可以判定两条直线平行；反过来，由两条直线平行，可以知道同位角相等、内错角相等、同旁内角互补．由此可以看出，两条直线的位置关系与相应角的数量关系之间有着紧密的内在联系．

3. 一个数学问题的发现、提出和分析、解决，往往要经历观察、归纳、猜想、证实……的过程．例如，本章中“探索直线平行的条件”和“探索平行线的性质”，就经历了这样的过程．

4. 连接多边形不相邻的两个顶点的线段叫做多边形的对角线．如图 7－47，AC、AD 就是五边形 $ABCDE$ 的两条对角线．

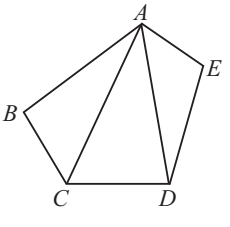


图 7－47

思考下列问题：

(1) 如图 7－48，在 n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 中，过顶点 A_1 可以画_____条对角线，它们分别是：_____；过顶点 A_2 可以画_____条对角线……过顶点 A_n 可以画_____条对角线．

(2) 画出的所有对角线有相同的吗？

(3) 由此可知，n 边形有多少条对角线？

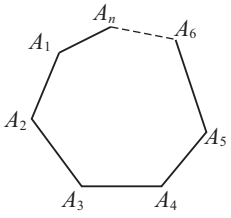
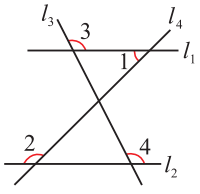


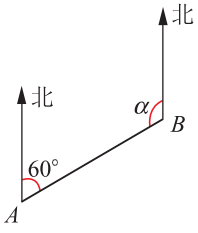
图 7－48

复习巩固

1. 如图，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互为补角，$\angle 3 = 117°$．求 $\angle 4$ 的度数．



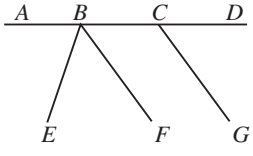
（第 1 题）



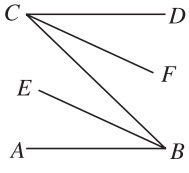
（第 2 题）

2. 如图，在 A、B 两地间修一条笔直的公路，从 A 地测得公路的走向为北偏东 60°．如果 A、B 两地同时开工，那么 $\angle\alpha$ 为多少度时，才能使公路准确接通？

3. 如图，点 B、C 在直线 AD 上，$\angle ABE = 70°$，BF 平分 $\angle DBE$，$CG \parallel BF$．求 $\angle DCG$ 的度数．



（第 3 题）

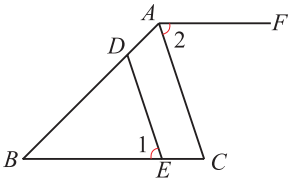


（第 4 题）

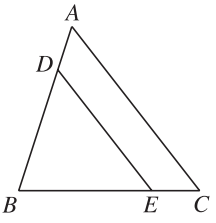
4. 如图，$AB \parallel CD$，要使 $\angle ABE = \angle DCF$，还需要添加什么条件？为什么？

5. 两根木棒分别长 5 cm、7 cm，第三根木棒与这两根木棒首尾依次相接构成三角形．如果第三根木棒的长为偶数(单位：cm)，那么一共可以构成多少个不同的三角形？这些三角形的周长分别是多少？

6. 如图，在△ABC 中，点 D、E 分别在 AB、BC 上，且 $DE \parallel AC$，$\angle 1 = \angle 2$. AF 与 BC 有怎样的位置关系？为什么？



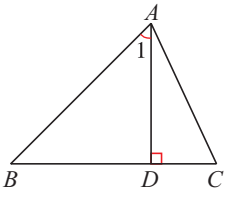
（第 6 题）



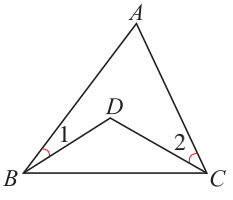
（第 7 题）

7. 如图，在△ABC 中，点 D、E 分别在 AB、BC 上，且 $DE \parallel AC$，$\angle BDE = 56°$，$\angle C = 52°$. 求$\angle B$ 的度数．

8. 如图，AD 是△ABC 的高，$\angle 1 = \angle B$，$\angle C = 65°$. 求$\angle BAC$ 的度数．



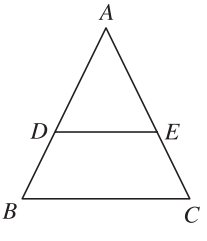
（第 8 题）



（第 9 题）

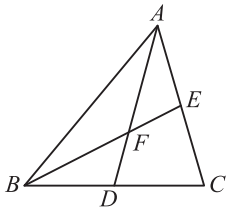
9. 如图，在△ABC 中，$\angle A = 62°$，$\angle 1 = 20°$，$\angle 2 = 35°$. 求$\angle BDC$ 的度数．

10. 如图，在△ABC 中，$\angle B = \angle C$，点 D、E 分别在 AB、AC 上，且 $\angle ADE = \angle AED$. DE 与 BC 平行吗？为什么？

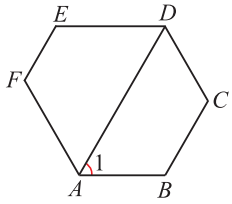


（第 10 题）

11. 如图，$\triangle ABC$ 的中线 AD、BE 相交于点 F. $\triangle ABF$ 与四边形 $CEFD$ 的面积有怎样的数量关系？为什么？



（第 11 题）

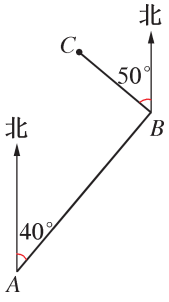


（第 12 题）

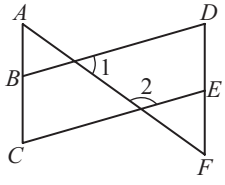
12. 如图，六边形 $ABCDEF$ 的内角都相等，$\angle 1 = 60°$. AB 与 ED、AD 与 FE 有怎样的位置关系？为什么？

灵活运用

13. 如图，点 B 在点 A 北偏东 $40°$ 方向，点 C 在点 B 北偏西 $50°$ 方向，$BC = 10$ m. 求点 C 到直线 AB 的距离．



（第 13 题）

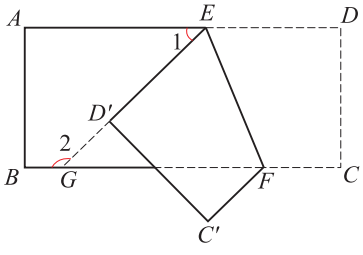


（第 14 题）

14. 如图，$\angle 1 = 52°$，$\angle 2 = 128°$，$\angle C = \angle D$. 探索 $\angle A$ 与 $\angle F$ 的数量关系，并说明理由．

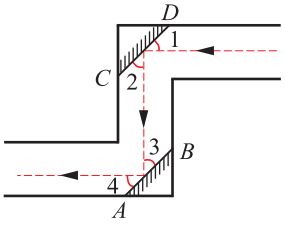
15. 一个四边形的 4 个内角能不能都是直角？能不能都是锐角？最多有几个钝角？为什么？

16. 如图，将长方形纸片 $ABCD$ 沿 EF 折叠后，点 D、C 分别落在点 D'、C' 的位置，ED' 的延长线交 BC 于点 G. 若 $\angle EFG = 68°$，求 $\angle 1$、$\angle 2$ 的度数．



（第 16 题）

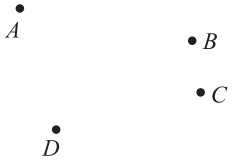
17. 如图，潜望镜中的两面镜子 AB、CD 互相平行，光线经过镜子反射时，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 说明为什么进入潜望镜的光线与离开潜望镜的光线是互相平行的.



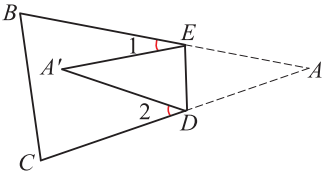
（第 17 题）

探索研究

18. 如图，为解决 A、B、C、D 四个村庄的用水问题，准备修建一个蓄水池，使蓄水池与四个村庄的距离的和最小．请画出蓄水池 H 的位置，并说明理由．



（第 18 题）



（第 19 题）

19. 如图，将△ABC 纸片沿 DE 折叠，使点 A 落在四边形 $BCDE$ 内点 A'的位置．探索$\angle A$ 与 $\angle 1+\angle 2$ 之间的数量关系，并说明理由．

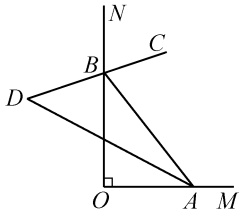
20. 在△ABC 中，$\angle A=n^\circ$.

（1）设$\angle B$、$\angle C$ 的平分线交于点 O，求$\angle BOC$ 的度数；

（2）设△ABC 的外角$\angle CBD$、$\angle BCE$ 的平分线交于点 O'，求$\angle BO'C$ 的度数；

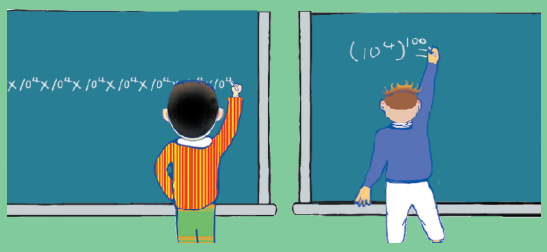
（3）$\angle BOC$ 与$\angle BO'C$ 有怎样的数量关系？

21. 如图，$\angle MON=90^\circ$，点 A、B 分别在 OM、ON 上运动（不与点 O 重合），BC 是 $\angle ABN$ 的平分线，BC 的反向延长线交 $\angle OAB$ 的平分线于点 D. 试问：随着点 A、B 的运动，$\angle D$ 的大小会变吗？如果不会，求 $\angle D$ 的度数；如果会，请说明理由.



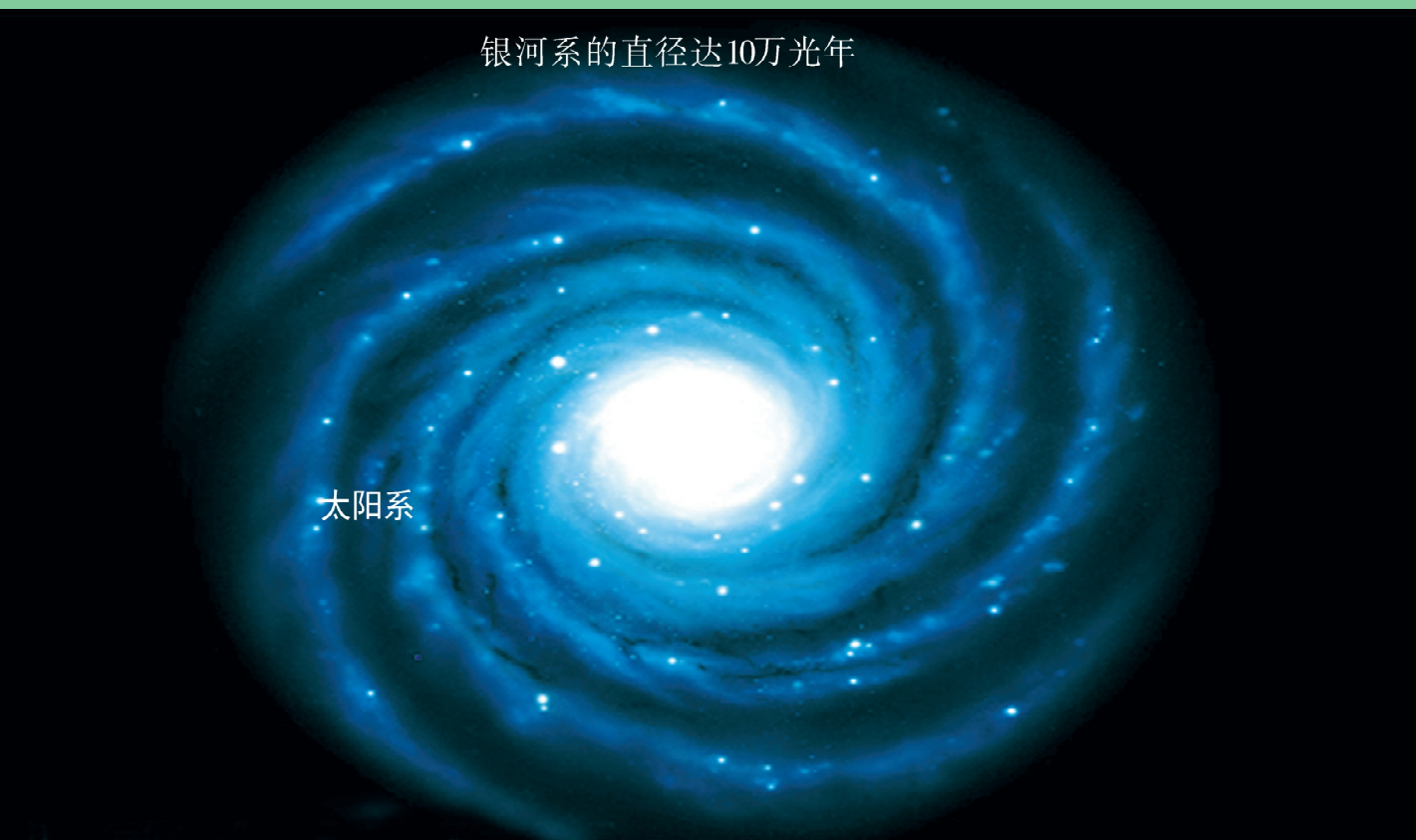
（第 21 题）

第8章　幂的运算



$(10^4)^{100} = 10^{4\times100}$

归纳、推演，得到了幂的运算性质，幂的运算方便了实际问题的解决．



光在真空中的速度约是 3×10^{8} m/s，光在真空中穿行 1 年的距离称为 1 光年.

请你算算：

(1) 1 光年约是多少千米(1 年以 3×10^{7} s 计算)?

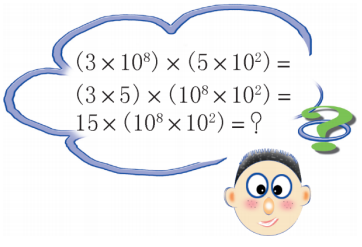
(2) 银河系的直径达 10 万光年，约是多少千米?

(3) 如果一架飞机的飞行速度为 1 000 km/h，那么光的速度是这架飞机速度的多少倍?

本章将学习同底数幂的乘法、除法以及幂的乘方和积的乘方.

8.1　同底数幂的乘法

太阳光照射到地球表面所需的时间约是 5×10^2 s，光的速度约是 3×10^8 m/s. 地球与太阳之间的距离约是多少？



试一试

1. 计算下列各式：

   $10^2\times10^8$；$10^4\times10^5$；$10^3\times10^5$.

2. 计算 $10^m\cdot10^n$（m、n 是正整数）.

3. 当 m、n 是正整数时，$2^m\cdot2^n$ 等于什么？$\left(\frac{1}{2}\right)^m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 呢？

对于任意的底数 a，当 m、n 是正整数时，

$$a^m\cdot a^n=\overbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}^{m个a}\cdot\overbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}^{n个a}=\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{(m+n)个a}=a^{m+n}.$$

于是，我们得到：

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（m、n 是正整数）.
同底数幂相乘，底数不变，指数相加.

根据这个运算性质，可以算得地球与太阳之间的距离约为：

$(3\times10^8)\times(5\times10^2)=(3\times5)\times(10^8\times10^2)=15\times10^{10}=1.5\times10^{11}$(m).

例 1 计算：

(1) $(-3)^{12}\times(-3)^{5}$；　　(2) $x\cdot x^{7}$；

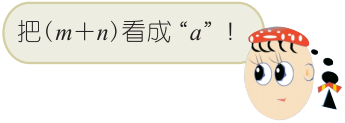
(3) $a^{3m}\cdot a^{2m-1}$（m 是正整数）；　　(4) $(m+n)^{3}\cdot(m+n)^{2}$.

解：(1) $(-3)^{12}\times(-3)^{5}=(-3)^{12+5}=(-3)^{17}=-3^{17}$；

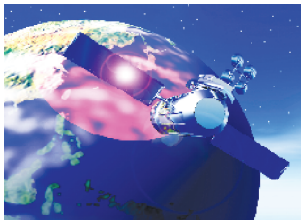
(2) $x\cdot x^{7}=x^{1+7}=x^{8}$；

(3) $a^{3m}\cdot a^{2m-1}=a^{3m+2m-1}=a^{5m-1}$；

(4) $(m+n)^{3}\cdot(m+n)^{2}=(m+n)^{3+2}=(m+n)^{5}$.



例 2 一颗卫星绕地球运行的速度是 7.9×10^{3} m/s，求这颗卫星运行1 h的路程.



解：因为 1 h $=3.6\times10^{3}$ s，所以这颗卫星运行1 h 的路程为：

$$\begin{aligned}&(7.9\times10^{3})\times(3.6\times10^{3})\\=&(7.9\times3.6)\times(10^{3}\times10^{3})\\=&28.44\times10^{6}\\=&2.844\times10^{7}(\text{m}).\end{aligned}$$

答：这颗卫星运行1 h的路程是 2.844×10^{7} m.

试一试

m、n、p 是正整数，你会计算 $a^{m}\cdot a^{n}\cdot a^{p}$ 吗？

练一练

1. 计算：

(1) $a^{8}\cdot a^{3}$；　　(2) $x^{5}\cdot x$；

(3) $(-2)^{10}\times(-2)^{13}$；　　(4) $-b^{6}\cdot b^{6}$；

(5) $(-a)^{2}\cdot(-a)\cdot(-a)^{3}$；　　(6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}$.

2. 下面的计算是否正确？如有错误，请改正.

(1) $x^{3}\cdot x^{3}=2x^{6}$；　　(2) $x^{4}\cdot x^{2}=x^{8}$；

(3) $a^{2}+a^{2}=a^{4}$；　　(4) $3^{m}\times3^{2m}=9^{3m}$（m 是正整数）.

3. 计算：

(1) $x^{4}\cdot x^{6}+x^{5}\cdot x^{5}$；　　(2) $a\cdot a^{7}-a^{4}\cdot a^{4}$.

4. 填空：

(1) $a^{4}\cdot a^{(\quad)}=a^{12}$；　　(2) $a^{(\quad)}\cdot a^{2}\cdot a=a^{8}$；

(3) $x^{(\quad)}\cdot x^{n}=x^{n+2}$（$n$ 是正整数）；

(4) $x\cdot x^{(\quad)}\cdot x^{n+1}=x^{n+5}$（$n$ 是正整数）.

计算器操作

例　计算$(5.6\times10^{8})\times(7.1\times10^{3})$.

解：依次按以下各键：5　·　6　×10^X　8　×　7

·　1　×10^X　3　=

计算器显示的结果为 3.976×10^{12}.

8.1 习题

1. 计算：

(1) $\left(\frac{1}{10}\right)^{5}\times\left(\frac{1}{10}\right)^{7}$；　　(2) $a^{12}\cdot a$；

(3) $-b^{2}\cdot b^{5}$；　　(4) $a^{m+1}\cdot a^{m-1}$（m 是大于 1 的整数）；

(5) $3^{4}\times3^{6}\times3$；　　(6) $a\cdot a^{4}\cdot a^{5}$.

2. 计算：

(1) $(p-q)^{5}\cdot(q-p)^{2}$；

(2) $(s-t)^{m}\cdot(s-t)^{m+n}\cdot(t-s)$（$m$、$n$ 是正整数）；

(3) $x^{n}\cdot x^{n+1}+x^{2n}\cdot x$（$n$ 是正整数）.

3. 填空：

(1) $x^{5}\cdot x\cdot x^{(\quad)}=x^{10}$；

(2) $a\cdot a^{(\quad)}\cdot a^{m}=a^{m+n+1}$（$m$、$n$ 是正整数）；

(3) $x^{2}\cdot x^{(\quad)}=x^{n+1}$（$n$ 是大于 1 的整数）；

(4) $a^{n}\cdot a\cdot a^{(\quad)}=a^{2n}$（$n$ 是大于 1 的整数）.

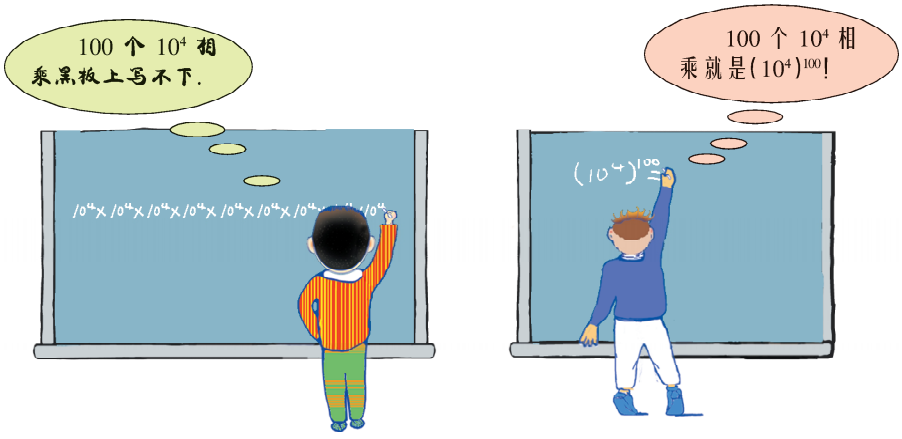
4. 已知 $a^{m}=8$，$a^{n}=32$，求 a^{m+n} 的值.

5. 在银河系中，恒星“心宿二”的体积约是太阳的 2.2×10^{8} 倍，太阳的体积约是地球的 1.3×10^{6} 倍．“心宿二”的体积是地球的多少倍？

6. 健康成年人的心脏每分钟流过的血液约 4.9×10^{3} mL. 如果一年按 5.2×10^{5} min 计算，那么健康成年人的心脏全年流过的血液总量是多少？

8.2 幂的乘方与积的乘方

你会求 100 个 10^4 相乘的积吗？



试一试

计算下列各式：

(1) $(2^3)^2=$ _____，$2^6=$ _____；

(2) $[(-10)^2]^4=$ _____，$(-10)^8=$ _____；

(3) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3=$ _____，$\left(\frac{1}{3}\right)^6=$ _____.

从上面的计算中，你发现了什么？

对于任意的底数 a，当 m、n 是正整数时，

$$(a^m)^n=\overbrace{a^m\cdot a^m\cdot\cdots\cdot a^m}^{n个a^m}=a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n个m}}=a^{mn}.$$

于是，我们得到：

$(a^m)^n=a^{mn}$（m、n 是正整数）.
幂的乘方，底数不变，指数相乘.

根据这个运算性质，可以得到：

$$(10^4)^{100}=10^{4\times100}=10^{400}.$$

例 1　计算：

(1) $(10^6)^2$；　　(2) $(a^m)^4$（m 是正整数）；

(3) $-(y^3)^2$；　　(4) $[(x-y)^n]^2$（n 是正整数）.

解：(1) $(10^6)^2=10^{6\times2}=10^{12}$；

(2) $(a^m)^4=a^{m\times4}=a^{4m}$；

(3) $-(y^3)^2=-y^{3\times2}=-y^6$；

(4) $[(x-y)^n]^2=(x-y)^{2\times n}=(x-y)^{2n}$.

例 2　计算：

(1) $x^2\cdot x^4+(x^3)^2$；　　(2) $(a^3)^3\cdot(a^4)^3$.

解：(1) $x^2\cdot x^4+(x^3)^2=x^{2+4}+x^{3\times2}=x^6+x^6=2x^6$；

(2) $(a^3)^3\cdot(a^4)^3=a^{3\times3}\cdot a^{4\times3}=a^9\cdot a^{12}=a^{9+12}=a^{21}$.

练一练

1. 计算：

(1) $(10^4)^4$；　　(2) $(x^5)^4$；

(3) $-(a^2)^5$；　　(4) $(-2^3)^{20}$；

(5) $(-b^m)^5$（m 是正整数）；　　(6) $-[(2a-b)^4]^2$.

2. 下面的计算是否正确？如有错误，请改正.

(1) $(a^3)^2=a^5$；　　(2) $(b^4)^2=b^{16}$.

3. 计算：

(1) $(m^4)^2+m^5\cdot m^3$；　　(2) $(x^5)^4+(x^{10})^2$；

(3) $(a^3)^5\cdot(a^2)^2$；　　(4) $2^{10}\cdot4^{10}$.

4. 一个正方体的棱长是 10^2 cm，它的体积是多少？

5. 填空：

(1) $8^2=2^{(\quad)}=2^2\times2^{(\quad)}$；

(2) $a^{12}=(a^3)^{(\quad)}=(a^2)^{(\quad)}=a^3\cdot a^{(\quad)}$.

试一试

计算下列各式：

(1) $(3\times4)^2=$ _____，$3^2\times4^2=$ _____；

(2) $[2\times(-5)]^4=$ _____，$2^4\times(-5)^4=$ _____；

(3) $\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)^3=$ _____，$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=$ _____.

从上面的计算中，你发现了什么？

对于任意的底数 a、b，当 n 是正整数时，

$$\begin{aligned}(ab)^n &= \overbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}^{n个ab}\\ &= \overbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}^{n个a}\cdot\overbrace{(b\cdot b\cdot\cdots\cdot b)}^{n个b}\\ &= a^nb^n.\end{aligned}$$

于是，我们得到：

$(ab)^n = a^nb^n$（n 是正整数）．
积的乘方，把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘．

例 3 计算：

（1）$(5m)^3$；　　（2）$(-xy^2)^3$．

解：（1）$(5m)^3 = 5^3\cdot m^3 = 125m^3$；

（2）$(-xy^2)^3 = (-1)^3\cdot x^3\cdot(y^2)^3 = -x^3y^6$．

n 是正整数，你会计算 $(abc)^n$ 吗？

例 4 计算：

（1）$\left(\frac{1}{3}xy^2\right)^2$；　　（2）$(-2ab^3c^2)^4$．

解：（1）$\left(\frac{1}{3}xy^2\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot x^2\cdot(y^2)^2 = \frac{1}{9}x^2y^4$；

（2）$(-2ab^3c^2)^4 = (-2)^4\cdot a^4\cdot(b^3)^4\cdot(c^2)^4 = 16a^4b^{12}c^8$．

例 5 球的体积计算公式为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$（其中 V、r 分别表示球的体积和半径）．木星可以近似地看成球体，半径约是 7.15×10^4 km，求木星的体积．

解：$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi\times(7.15\times10^4)^3$

$$= \frac{4}{3}\pi \times 7.15^3 \times 10^{12}$$

$$\approx 1.53 \times 10^{15}(\text{km}^3).$$

答： 木星的体积大约是 1.53×10^{15} km^3.

练一练

1. 计算：

(1) $(-ab)^3$；　　(2) $(x^2y^3)^4$；

(3) $(2 \times 10^3)^2$；　　(4) $(-2a^3y^4)^3$.

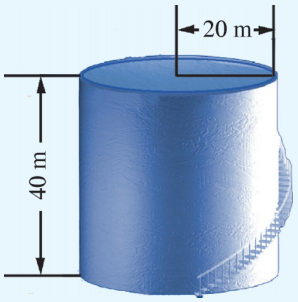
2. 下面的计算是否正确？如有错误，请改正．

(1) $(xy^2)^3 = xy^6$；　　(2) $(-2b^2)^2 = -4b^4$.

3. 计算：

(1) $a^5 \cdot a^3 + (2a^2)^4$；　　(2) $-2x^6 - (-3x^2)^3$.

4. 如图，圆柱体储油罐的半径是 20 m、高是 40 m（不计壁厚），求它的容积．如果该储油罐最大储油高度为 30 m，最多能储油多少（单位：L）？



（第 4 题）

计算器操作

例 1　计算 $(20^5)^2$.

解：依次按以下各键：(2 0 ^ 5) x^2 =，

计算器显示的结果为 1.024×10^{13}.

例 2　计算 $\frac{1}{6}\pi \times (1.4 \times 10^6)^3$.

解：依次按以下各键：1 $a^{b/c}$ 6 × log × (

1 • 4 Exp 6) ^ 3 =.

计算器显示的结果为 $1.436\,755\,04 \times 10^{18}$.

8.2 习题

1. 计算：

(1) $(a^3)^6$；　　(2) $-(x^5)^2$；

(3) $[(-m)^2]^5$；　　(4) $(-a^{2n})^3$（n 是正整数）.

2. 计算：

(1) $(a^4)^2+a^6\cdot a^2$；　　(2) $(m^3)^3\cdot(m^3)^2$；

(3) $(a^2)^3\cdot(a^4)^4$；　　(4) $(b^4)^2\cdot b^2$.

3. 计算：

(1) $(2ab^2)^3$；　　(2) $(-a^3b^2)^2$；

(3) $(-3a^2b^3c)^3$；　　(4) $-(-2x^3y)^4$.

4. 计算：

(1) $(a^3)^2+(a^2)^3-a\cdot a^5$；

(2) $(-a^n)^2\cdot a^{n+1}-a\cdot(-a^n)^3$（$n$ 是正整数）；

(3) $(a\cdot a^4\cdot a^5)^2$；

(4) $(-2a^2)^2\cdot a^4-(-5a^4)^2$.

5. 填空：

(1) $9^3=3^{(\quad)}=3^2\times3^{(\quad)}$；

(2) $3^3\times9^9=3^3\times3^{(\quad)}=3^{(\quad)}$；

(3) $[-a^{(\quad)}]^{(\quad)}=a^6$；

(4) $[a^2b^{(\quad)}]^{(\quad)}=a^4b^6$.

6. 计算：

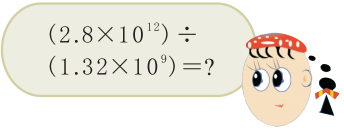
(1) $(0.25)^{100}\times4^{100}$；　　(2) $3^{14}\times\left(-\frac{1}{9}\right)^7$.

7. 哈萨克斯坦原油经新疆阿拉山口计量站输入我国，该站有 2 个直径 60 m、高 20 m 的圆柱体储油罐（不计壁厚），这 2 个储油罐的容积共多少(单位：L)?

（第 7 题）

8.3　同底数幂的除法

我国水资源总量居世界第 6 位，但人均水资源量排在世界第 121 位，是世界上 13 个贫水国家之一．据统计，2007 年我国水资源总量约为 2.8×10^{12} m^3，按全国 1.32×10^9 人计算，人均水资源量为多少？



计算下列各式：

(1) $2^8\div2^3=$ _____，$2^5=$ _____；

(2) $(-3)^5\div(-3)^2=$ _____，$(-3)^3=$ _____；

(3) $\left(\frac{3}{4}\right)^5\div\left(\frac{3}{4}\right)^3=$ _____，$\left(\frac{3}{4}\right)^2=$ _____.

从上面的计算中，你发现了什么？

当 $a\neq0$，m、n 是正整数，且 $m>n$ 时，

$$a^m\div a^n=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{m个a}}{\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个a}}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{(m-n)个a}\cdot\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n个a}}{\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个a}}=a^{m-n}.$$

于是，我们得到：

$a^m\div a^n=a^{m-n}$ ($a\neq0$，m、n 是正整数，$m>n$).
同底数幂相除，底数不变，指数相减．

根据这个运算性质，可以算得 2007 年我国人均水资源量约为

$$(2.8\times10^{12})\div(1.32\times10^9)\approx2.12\times10^3(m^3).$$

例 1　计算：

(1) $a^6\div a^2$；　　(2) $(-b)^8\div(-b)$；

(3) $(ab)^4\div(ab)^2$；　　(4) $t^{2m+3}\div t^2$（m 是正整数）．

解： (1) $a^6\div a^2=a^{6-2}=a^4$；

(2) $(-b)^8\div(-b)=(-b)^{8-1}=(-b)^7=-b^7$；

(3) $(ab)^4 \div (ab)^2 = (ab)^{4-2} = (ab)^2 = a^2b^2$；

(4) $t^{2m+3} \div t^2 = t^{2m+3-2} = t^{2m+1}$.

练一练

1. 计算：

(1) $3^{15} \div 3^{13}$；　　(2) $\left(-\frac{4}{3}\right)^7 \div \left(-\frac{4}{3}\right)^4$；

(3) $y^{14} \div y^2$；　　(4) $(-a)^5 \div (-a)$；

(5) $(-xy)^5 \div (-xy)^2$；　　(6) $a^{10n} \div a^{2n}$（n 是正整数）.

2. 下面的计算是否正确？如有错误，请改正.

(1) $a^8 \div a^4 = a^2$；　　(2) $t^{10} \div t^9 = t$；

(3) $m^5 \div m = m^5$；　　(4) $(-z)^6 \div (-z)^2 = -z^4$.

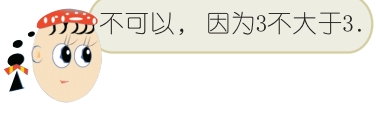
议一议

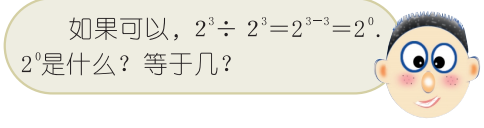
我们知道 $2^3 \div 2^3 = 8 \div 8 = 1$.

前面我们学习了同底数幂相除的运算性质：

$$a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0，m、n \text{ 是正整数}，m > n).$$

$2^3 \div 2^3$ 可以运用这样的运算性质进行计算吗？





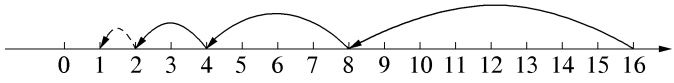
想一想

1 个细胞分裂 1 次变为 2 个，分裂 2 次变为 4 个，分裂 3 次变为 8 个，分裂 4 次变为 16 个……

分裂后的细胞个数与细胞分裂的次数之间的关系，可以记为：$2 = 2^1$，$4 = 2^2$，$8 = 2^3$，$16 = 2^4$……

当这个细胞没有分裂(即分裂次数为 0)时，细胞的个数是几？

观察数轴上表示 2^4、2^3、2^2、2^1 的点的位置是如何随着指数的变化而变化的？



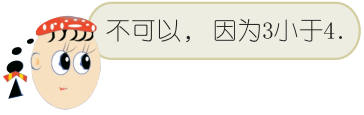
你有什么猜想？

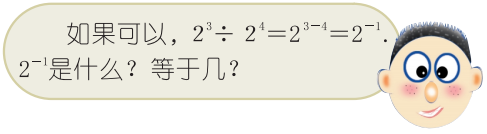
一般地，我们规定：

$a^0 = 1\ (a \neq 0)$.
任何不等于 0 的数的 0 次幂等于 1.

我们知道 $2^3 \div 2^4 = 8 \div 16 = \frac{1}{2}$.

$2^3 \div 2^4$ 可以用同底数幂除法的运算性质进行计算吗？





观察下列式子中指数与幂的变化，你有什么猜想？

$$2^4 = 16,$$

$$2^3 = 8,$$

$$2^2 = 4,$$

$$2^1 = 2,$$

$$2^0 = 1,$$

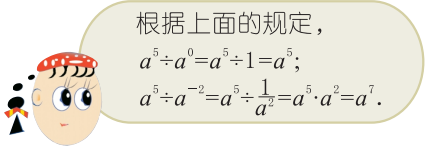
$$2^{(\quad)} = \frac{1}{2}.$$

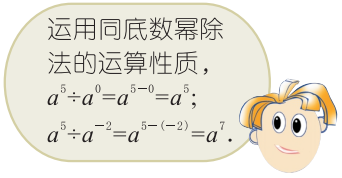
一般地，我们规定：

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ (a \neq 0,\ n$ 是正整数$)$.

任何不等于 0 的数的 $-n$（n 是正整数）次幂，等于这个数的 n 次幂的倒数.

计算：(1) $a^5 \div a^0 (a \neq 0)$；　　(2) $a^5 \div a^{-2} (a \neq 0)$.





规定了零指数幂、负整数指数幂的意义后，同底数幂的除法运算性质扩展为：

$$a^m \div a^n = a^{m-n}\ (a \neq 0,\ m、n\ 为整数).$$

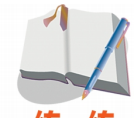
例 2 用小数或分数表示下列各数：

(1) 4^{-2}；　　(2) -3^{-3}；　　(3) 3.14×10^{-5}.

解： (1) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$；

(2) $-3^{-3} = -\frac{1}{3^3} = -\frac{1}{27}$；

(3) $3.14 \times 10^{-5} = 3.14 \times \frac{1}{10^5} = 3.14 \times 0.000\,01 = 0.000\,031\,4$.



练一练

1. 用小数或分数表示下列各数：

(1) 10^{-2}；　　(2) $(-0.1)^5$；

(3) 5^{-1}；　　(4) 2.1×10^{-3}.

2. 把下列各数写成负整数指数幂的形式：

(1) 0.001；　　(2) 0.000 001；

(3) $\frac{1}{64}$；　　(4) $\frac{1}{81}$.

3. 计算：

(1) $(-3)^2 \times (-3)^{-2}$；　　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \div \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$；

(3) $10^{-1} + (-0.3)^0$；　　(4) $5^0 - (-2)^{-4}$.

太阳的半径约为 700 000 000 m. 太阳的主要成分是氢，氢原子的半径约为 0.000 000 000 05 m.

用科学记数法，我们可以把 700 000 000 m 写成 7×10^8 m，0.000 000 000 05 m可以写成 5×10^{-11} m.

一般地，用科学记数法可以把一个正数写成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leqslant a < 10$，n 是整数．类似地，一个负数也可以用科学记数法表示.

例 3　用科学记数法表示下列各数：

0.001 5，0.000 109，−0.000 006 2.

解： $0.001\,5 = 1.5 \times 0.001 = 1.5 \times 10^{-3}$，

$0.000\,109 = 1.09 \times 0.000\,1 = 1.09 \times 10^{-4}$，

$-0.000\,006\,2 = -6.2 \times 0.000\,001 = -6.2 \times 10^{-6}$.

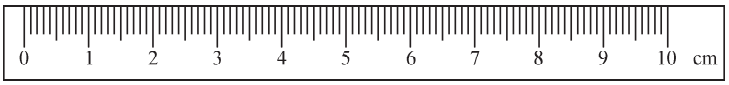
例 4　某种细胞的截面可以近似地看成圆，它的半径约为 7.80×10^{-7} m，求这种细胞的截面面积 S.

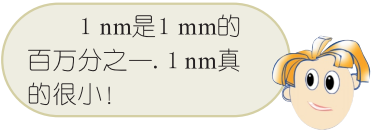
解： $S = \pi \times (7.80 \times 10^{-7})^2 \approx 1.91 \times 10^{-12}\,(\mathrm{m}^2)$.

答： 该细胞的截面面积约为 $1.91 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}^2$.

例 5　随着科学技术的发展，“纳米”常出现在人们的生活中．纳米(记为 nm)是长度单位，它等于 1 m 的十亿分之一．以毫米为长度单位表示 1 nm.

解：
$$\begin{aligned} 1\ \mathrm{nm} &= \frac{1}{1\,000\,000\,000}\ \mathrm{m} \\ &= 10^{-9}\ \mathrm{m} \\ &= 10^{-9} \times 10^{3}\ \mathrm{mm} \\ &= 10^{-6}\ \mathrm{mm}. \end{aligned}$$





练一练

1. 用科学记数法表示下列各数：

   0.000 17，0.000 021 5，0.000 000 608 9，−0.001 000 2.

2. 用科学记数法表示下列结果：

   (1) 肥皂泡的泡壁厚度大约是 0.000 7 mm，换算成以米为单位是多少？

   (2) 蚕丝是最细的天然纤维，它的截面可以近似地看成圆，直径约为 10 μm[注]，以平方厘米为单位表示蚕丝截面的面积．

[注] μm 是长度单位之一，表示微米．$1\ \mu\mathrm{m} = 10^{-6}$ m.

计算器操作

例　计算 $\pi\times(7.80\times10^{-7})^2$.

解：依次按以下各键：SHIFT ● ×10^X × (7 · 8 ×10^X (−) 7) x² =

计算器显示的结果为 $1.911\,344\,97\times10^{-12}$.

8.3 习题

1. 计算：

(1) $a^5\div a^3$；　(2) $m^{10}\div m$；

(3) $(s^5)^2\div s^5$；　(4) $(-s)^7\div(-s)^2$；

(5) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3\div\left(-\frac{1}{3}\right)$.

2. 填空：

(1) $2^3\times(\quad)=2^6$；　(2) $(\quad)\cdot a^2=a^6$；

(3) $3^{10}\div(\quad)=3^4$；　(4) $(\quad)\div a^2=a^6$.

3. 用小数或分数表示下列各数：

(1) 4^{-2}；　(2) $\left(\frac{15}{16}\right)^{-1}$；

(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$；　(4) 1.027×10^{-6}.

4. 计算：

(1) $5^{-2}\div2^{-3}$；　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^0-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$；

(3) $\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^0+\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$；　(4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2\div(-2)^3\times(-2)^{-2}$.

5. 用科学记数法表示下列各数：

0.056，0.000 182，−0.000 061 2，−0.000 009 001.

6. 鸵鸟是世界上最大的鸟，每枚鸵鸟蛋的质量约 8×10^2 g；蜂鸟是世界上最小的鸟，每枚蜂鸟蛋的质量约 2×10^2 mg. 1 枚鸵鸟蛋的质量相当于多少枚蜂鸟蛋的质量？

7. 水珠不断地滴在一块石头上，经过 40 年，石头上形成了一个深为 4×10^{-2} m 的小洞．用科学记数法表示平均每月小洞增加的深度（单位：m）.

8. 5 万粒芝麻质量约 200 g，用科学记数法表示 1 粒芝麻的质量（单位：g）.

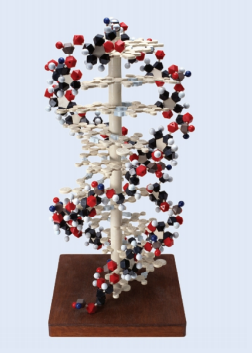
阅读

有关人体的一些数据

你知道吗？在人体自身的生命现象中，也存在着许多很大的数和很小的数．

基因是决定一个生物物种的所有生命现象的遗传因子，它控制生物的生长发育，直至死亡．

每个生物携带自身基因的载体是生物细胞的 DNA. DNA 分子的直径只有 2×10^{-7} cm，它们在细胞核的染色体上，按一定顺序排列成螺旋形的独特结构(如右图)．



DNA 的双螺旋结构模型

在人体血液中，红细胞直径约为 7.7×10^{-4} cm，每立方毫米血液里有 5×10^{6} 个；白细胞直径约为 1.0×10^{-3} cm，每立方毫米血液里有 5.0×10^{3} 到 1.0×10^{4} 个．

人脑有 1.2×10^{10} 到 1.4×10^{10} 个细胞，婴幼儿的脑细胞以每分钟 2.0×10^{5} 个的惊人速度递增，8 岁可达到成人脑细胞数量．

关于人体自身的其他方面，你还知道哪些有趣的数据？

数学活动

生活中的“较大数”与“较小数”

活动一

1. 分别估测自己走路、跑步的步长.
2. 估计你 1 h 大约走多少步，走 10^{6} 步大约要多少小时？
3. 南京到北京的路程约 1 160 km. 估计你 1 h 大约跑多少步，如果你参加“南京—北京”的象征性长跑活动，大约要跑多少小时？

活动二

1. 测量数学课本的厚度.
2. 估算数学课本一张纸的厚度．

活动三

1. 测量教室的面积.
2. 10^{6} m^{2} 相当于多少间教室的面积？根据你班的学生数，估计这么多间教室可供多少学生上课？

请你通过各种方式(上网、查阅资料等)收集生活中的“较大数”和“较小数”，用你熟悉的事例描述这些数，并与同学交流．

小结与思考

1. 在本章里，我们学习了同底数幂的乘法和除法、幂的乘方和积的乘方的运算性质. 在规定了零指数幂、负整数指数幂的意义后，这些运算性质扩展为：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}\ (m、n\text{ 是整数})；$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}\ (a \neq 0,\ m、n\text{ 是整数})；$$

$$(a^m)^n = a^{mn}\ (m、n\text{ 是整数})；$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n\ (n\text{ 是整数}).$$

2. 运用上述幂的运算性质，同底数幂的乘、除运算就转化为幂指数的加、减运算，幂的乘方运算就转化为幂指数的乘法运算.

3. 在本章里，推导幂的运算性质经历了如下过程：通过具体的数字运算发现规律，提出猜想，然后用字母代替数运用有关的运算法则证实猜想.

在研究同底数幂除法的过程中，我们先后规定了零指数幂、负整数指数幂的意义，使幂的运算性质适用于一切整数指数幂. 你能体会这两个规定的合理性吗？

4. 幂的运算性质的适用范围扩展到整数指数幂后，可以发现同底数幂的乘法、除法法则本质上是一致的. 你能用同底数幂的乘法法则推导出同底数幂的除法法则吗？你能推导“$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ ($a \neq 0$，n 是整数)”吗？

复习题

复习巩固

1. 计算：

(1) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^2$；　　(2) $(a-b)^4 \cdot (a-b)^2$；

(3) $(-x^3)^4$；　　(4) $(-3x)^5 \div (-3x)$；

(5) $(3x^2)^3$；　　(6) $(-2xy^2z)^2$；

(7) $m^3 \cdot m \cdot (m^2)^3$；　　(8) $(-a^2)^3 \cdot (-a^3)^2$；

(9) $t^{m+1} \cdot t + (-t)^2 \cdot t^m$ (m 是整数)；

(10) $(x^n)^2 + (x^2)^n - x^n \cdot x^2$ (n 是整数).

2. 计算：

(1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\times 2^{-4}$；　　(2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\div\left(\frac{3}{4}\right)^{0}$；

(3) $(-9)^{-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$；　　(4) $2^{-2}\times(4^{3}\times 8^{0})$.

3. “神威·太湖之光”超级计算机运算速度达每秒 9.3×10^{16} 次．它工作 1 h 可进行多少次运算？

4. 1 cm^3 空气的质量约为 1.293×10^{-3} g，1 m^3 空气的质量是多少（单位：kg）？

5. 地球上海洋总面积约为 3.6×10^{8} km^2．按海洋的海水平均深度 3.7×10^{3} m 计算，海水的体积约是多少？

6. 某种花粉颗粒的直径约为 30 μm．多少颗这样的花粉颗粒紧密排成一列的长度为 1 m？

7. 生物芯片是 20 世纪 80 年代末在生命科学领域中迅速发展起来的一项高新技术．通俗地说，就是在一块指甲大小的芯片上集成大量探针单元，构成一个微型生物化学分析系统，以实现对生物样品准确、迅速、大信息量的检测．已知一块 1.28×1.28 cm^2 的芯片上集成了 10^6 个探针，求每个探针单元的面积．

灵活运用

8. 计算：

(1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{100}\times 3^{101}$；　　(2) $0.2^{4}\times0.4^{4}\times12.5^{4}$.

9. 已知 $a=-(0.3)^2$，$b=-3^{-2}$，$c=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$，$d=\left(-\frac{1}{3}\right)^{0}$，比较 a、b、c、d 的大小，并用“<”号连接起来．

探索研究

10. (1) 计算：1^5，2^5，3^5，4^5，5^5，…，19^5. 你能发现什么？

(2) 127^5、58^{11}的个位上的数字分别是几？

11. (1) 填空：

$2^1-2^0=$ _____ $=2^{(\quad)}$，

$2^2-2^1=$ _____ $=2^{(\quad)}$，

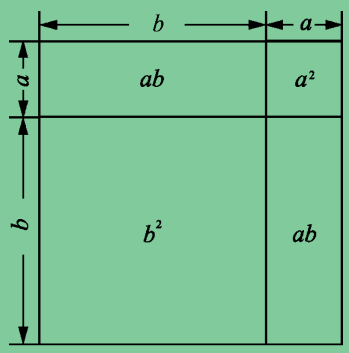
$2^3-2^2=$ _____ $=2^{(\quad)}$，

⋮

(2) 探索(1)中式子的规律，试写出第 n 个等式，并说明第 n 个等式成立；

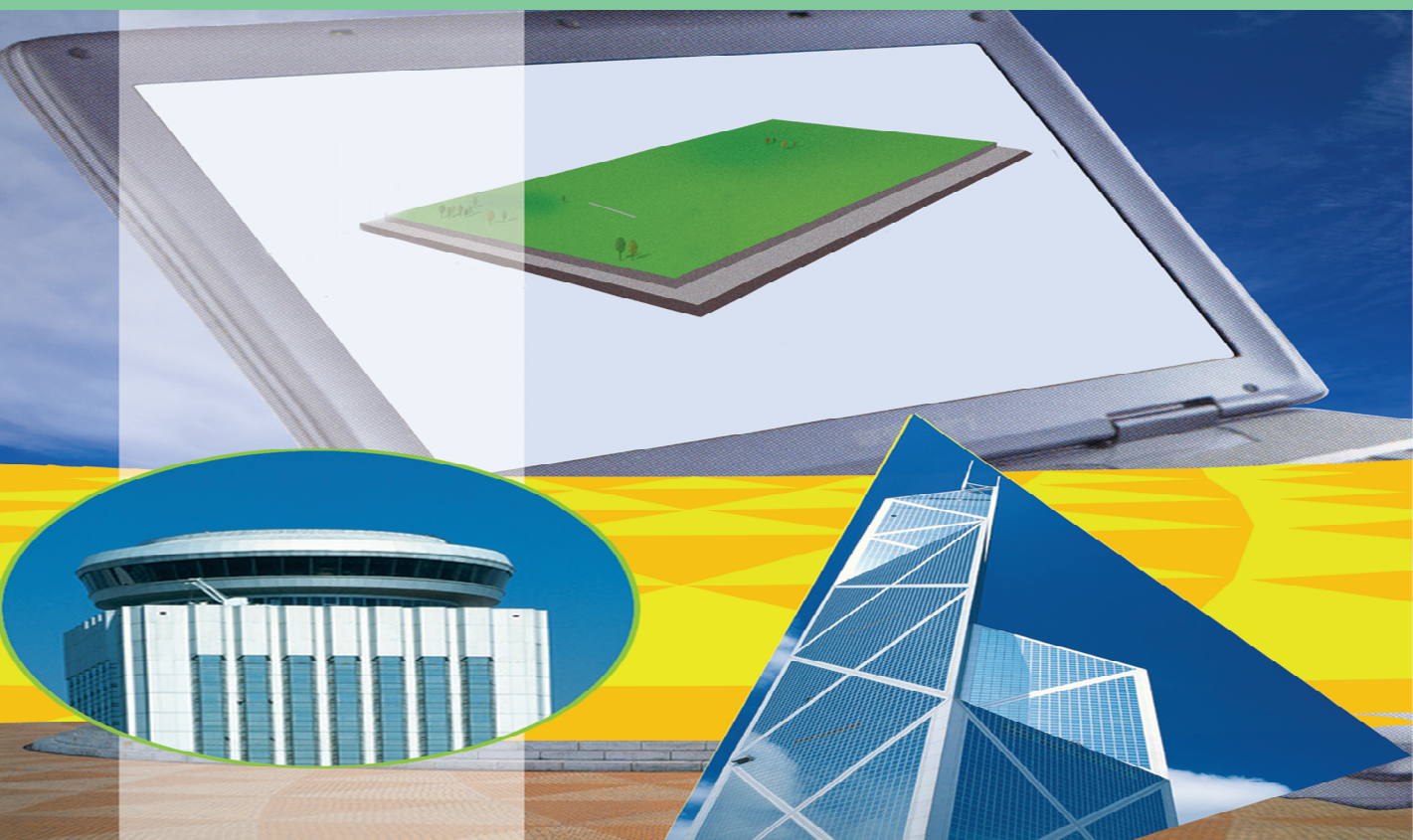
(3) 计算 $2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{1\,000}$.

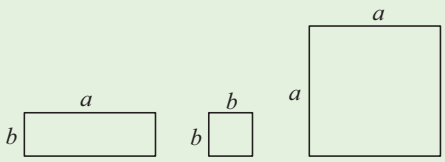
第9章　整式乘法与因式分解



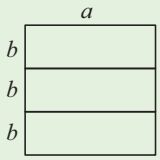
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

拼图、推演，得到了整式乘法法则和公式；逆向思考，得到了多项式因式分解的方法．

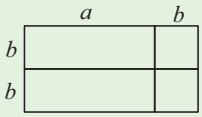




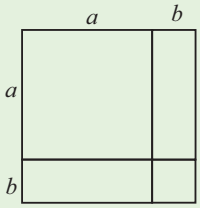
1. 用若干块如上图所示的长方形和正方形硬纸片，拼成图(1)～(3)，它们的面积分别是多少？



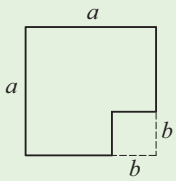
(1)



(2)



(3)



(4)

2. 如图(4)，在边长为 a 的正方形硬纸片上剪去一个边长为 b 的正方形，剩下部分的面积是多少？

本章将学习单项式乘法、多项式乘法、乘法公式及多项式的因式分解．

9.1　单项式乘单项式

如图 9－1，几台型号相同的电视机叠放在一起组成“电视墙”，计算这块“电视墙”的面积．

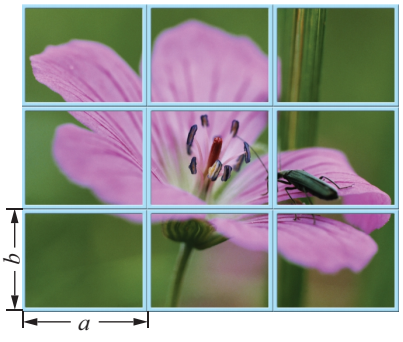
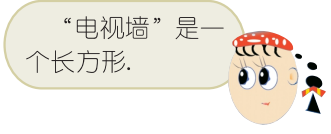
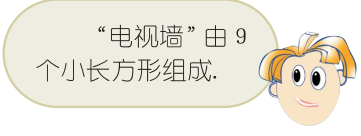


图 9－1





如果把图 9－1 的“电视墙”看成一个大长方形，那么它的长为 $3a$、宽为 $3b$，面积为 $3a \cdot 3b$.

如果把图 9－1 的“电视墙”看成是由 9 个小长方形组成的，那么它的面积为 $9ab$.

由此得到 $3a \cdot 3b = 9ab$.

一般地，对于任意 a、b，运用乘法交换律、结合律，我们可以计算两个单项式的乘积．例如，

$3a \cdot 3b$

$= 3 \times 3 \cdot a \cdot b$　　乘法交换律

$= (3 \times 3) \cdot (a \cdot b)$　　乘法结合律

$= 9ab$.

试一试

计算下列各式，并说明理由．

(1) $2a^2b \cdot 3ab^2$；　(2) $4ab^2 \cdot 5b$；　(3) $6x^3 \cdot (-2x^2y)$.

单项式与单项式相乘，把它们的系数、相同字母的幂分别相乘，对于只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式．

例 计算：

(1) $-\frac{1}{3}a^2\cdot(-6ab)$；　　(2) $(2x)^3\cdot(-3xy^2)$.

解：(1) $-\frac{1}{3}a^2\cdot(-6ab)$

$=\left[\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-6)\right]\cdot(a^2\cdot a)\cdot b$

$=2a^3b$；

(2) $(2x)^3\cdot(-3xy^2)$

$=8x^3\cdot(-3xy^2)$

$=[8\times(-3)](x^3\cdot x)y^2$

$=-24x^4y^2$.

练一练

1. 计算：

(1) $0.25a^2\cdot 4a$；　　(2) $\frac{3}{4}a^2b^3\cdot\left(-\frac{8}{9}abc\right)$；

(3) $3a^2bc\cdot\left(-\frac{1}{7}ab\right)$；　　(4) $-0.1abc\cdot 10ab^2c$；

(5) $(-x^2)^2\cdot(2xy^2)^2$；　　(6) $-8a^2b\cdot(-a^3b^2)\cdot\frac{1}{4}b^2$.

2. 一个正方体的棱长是 $1.5a$，求它的表面积和体积.

9.1 习题

1. 下面的计算是否正确？如有错误，请改正.

(1) $3x^3\cdot(-2x^2)=5x^5$；　　(2) $3a^2\cdot 4a^2=12a^2$；

(3) $3b^3\cdot 8b^3=24b^9$；　　(4) $-3x\cdot 2xy=6x^2y$.

2. 计算：

(1) $(a^2)^2\cdot(-2ab)$；

(2) $5m\cdot\left(-\frac{9}{4}abm\right)\cdot(-am)$；

(3) $0.5a^3b^2c\cdot(-0.2a^2b^3)$；

(4) $\frac{1}{4}x^3y^2\cdot(-2xy^2)+(-2x^2y)\cdot\left(-\frac{1}{2}xy\right)\cdot 3xyz$.

3. 填空：

(1) (　　) · $(-3xy) = -12x^2y$；

(2) $2ab$ · (　　) $= -6a^2bc$；

(3) $(-2x)$ · (　　) $= 10xy$；

(4) $(2\times10^2)\times$ (　　) $= 3\times10^6$.

9.2 单项式乘多项式

计算图 9－2 的面积，并把你的算法与同学交流．

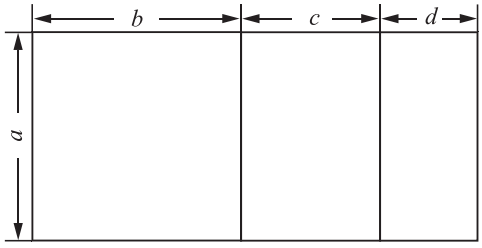


图 9－2

如果把图 9－2 看成一个大长方形，那么它的长为 $b+c+d$、宽为 a，面积为 $a(b+c+d)$.

如果把图 9－2 看成是由 3 个小长方形组成的，那么它的面积为 $ab+ac+ad$.

由此得到

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad.$$

一般地，对于任意的 a、b、c、d，由乘法分配律可以得到

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad.$$

计算下列各式，并说明理由．

(1) $a(5a+3b)$；　　(2) $(x-2y)\cdot 2x$.

单项式与多项式相乘，先用单项式乘多项式的每一项，再把所得的积相加．

例 1　计算：

(1) $(-3x^2)\cdot(4x-3)$；　　(2) $\left(\frac{3}{4}ab^2-3ab\right)\cdot\frac{1}{3}ab$.

解：(1)
$$\begin{aligned}&(-3x^2)\cdot(4x-3)\\=&(-3x^2)\cdot 4x+(-3x^2)\cdot(-3)\\=&-12x^3+9x^2;\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\left(\frac{3}{4}ab^2-3ab\right)\cdot\frac{1}{3}ab\\=&\frac{3}{4}ab^2\cdot\frac{1}{3}ab+(-3ab)\cdot\frac{1}{3}ab\\=&\frac{1}{4}a^2b^3-a^2b^2.\end{aligned}$$

例 2　如图 9－3，在长方形地块上建造住宅、广场、商厦，计算这块地的面积．

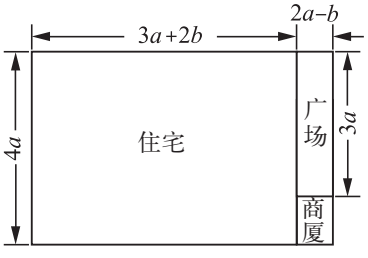


图 9－3

解：长方形地块的长为 $(3a+2b)+(2a-b)$、宽为 $4a$，这块地的面积为

$$\begin{aligned}&4a\cdot[(3a+2b)+(2a-b)]\\=&4a\cdot(5a+b)\\=&4a\cdot 5a+4a\cdot b\\=&20a^2+4ab.\end{aligned}$$

答：这块地的面积为 $20a^2+4ab$.

练一练

1. 计算：

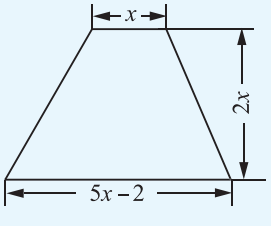
(1) $(q+r-13)\cdot a$；　　(2) $-3xy\cdot(4y-2x-1)$；

(3) $-\frac{1}{2}x^3y^2\cdot(4y+8xy^3)$；　(4) $(3a^3b-2ab^2+ab^3)\cdot(-2ab)$；

(5) $x(y-5)+y(3-x)$；

(6) $a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$.

2. 计算图中梯形的面积．



（第 2 题）

3. 填空：

(1) (　　)$\cdot(3x-4)=3x^2-4x$；

(2) $2x\cdot$(　　)$=2x^2+14x$.

9.2 习题

1. 计算：

(1) $\frac{1}{2}ab^2(2a^2b-3ab^2)$；

(2) $x(2x-5)+3x(x+2)-5x(x-1)$；

(3) $a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)$；

(4) $a(a^2-3)+a^2(a+3)-3a(a^2-a-1)$.

2. 已知 $A=-2ab$，$B=4ab(a-b)$，求 $A\cdot B$.

3. 填空：

(1) (　　)$(-2a+3b)=12a^2b-18ab^2$；

(2) $ab(a^2+$____$+3)=a^3b+2a^2b+3ab$；

(3) $2ab^2(3a^2-$____$+$____$)=6a^3b^2-4a^2b^3+10ab^4$；

(4) $2a^2b^2($____$+$____$-$____$)=2a^2b^2+8a^3b^3-16a^4b^4$.

4. 在 $m(c+d)=mc+md$ 中，如果将 m 换成 $(a+b)$，你能计算 $(a+b)(c+d)$ 吗？

9.3　多项式乘多项式

计算图 9－4 的面积，并把你的算法与同学交流．

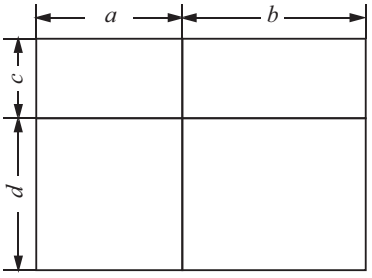


图 9－4

如果把图 9－4 看成 1 个大长方形，那么它的面积为

$$(a+b)\cdot(c+d).$$

如果把图 9－4 看成是由 4 个小长方形组成的，那么它的面积为

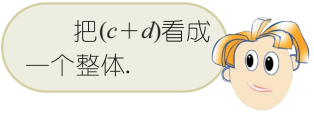
$$ac+ad+bc+bd.$$

由此得到

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

一般地，对于任意的 a、b、c、d，利用单项式乘多项式法则可以得到

$$\begin{aligned}&(a+b)(c+d)\\&=a(c+d)+b(c+d)\\&=ac+ad+bc+bd.\end{aligned}$$



上面的运算过程，也可以表示为

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

计算下列各式，并说明理由．

(1) $(a+4)(a+3)$；　　(2) $(x-2)(x-3)$.

多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加．

例 1 计算：

(1) $(x+2)(x-3)$；　　(2) $(3x-1)(x-2)$.

解：(1) $(x+2)(x-3)$

$= x\cdot x+x\cdot(-3)+2\cdot x+2\cdot(-3)$

$= x^2-3x+2x-6$

$= x^2-x-6$；

(2) $(3x-1)(x-2)$

$= 3x\cdot x+3x\cdot(-2)+(-1)\cdot x+(-1)\cdot(-2)$

$= 3x^2-6x-x+2$

$= 3x^2-7x+2$.

例 2 计算：

(1) $(3m+n)(m-2n)$；　　(2) $n(n+1)(n+2)$.

解：(1) $(3m+n)(m-2n)$

$= 3m^2-6mn+mn-2n^2$

$= 3m^2-5mn-2n^2$；

(2) $n(n+1)(n+2)$

$= n(n^2+2n+n+2)$

$= n(n^2+3n+2)$

$= n^3+3n^2+2n$.

练一练

1. 计算：

(1) $(x+1)(2x-3)$；　　(2) $(7-3x)(7+3x)$；

(3) $(3m+2n)(7m-6n)$；　　(4) $n(n+2)(2n+1)$.

2. 一块长方形地砖的长、宽分别为 a cm、b cm ($a>2, b>2$). 如果长、宽各裁去 2 cm，那么剩余部分的面积是多少？

9.3 习题

1. 计算：

(1) $(x-3)(2x+5)$；　　(2) $(2a+1)(-a-2)$；

(3) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$；　　(4) $(x^2-10)(x^2-12)$；

(5) $(xy+1)(xy-4)$；　　(6) $(5m-4n)(4m-5n)$.

2. 计算：

(1) $(2a-b)(a+2b-3)$；

(2) $(x+y+5)(x+y+4)$.

3. 求 $(x-1)(2x+1)-2(x-5)(x+2)$ 的值，其中 $x=\frac{1}{5}$.

4. 太阳能电池板可以将太阳的光能转化为电能，在相同光照条件下，面积越大，输出的电能越大．现将一块长 90 cm、宽 60 cm 的长方形太阳能电池板的长和宽都增加 a cm，它的面积将增加多少？

9.4 乘法公式

计算图 9－5 的面积，并把你的算法与同学交流．

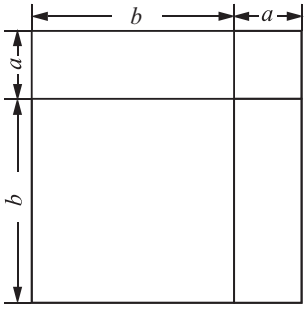


图 9－5

如果把图 9－5 看成一个大正方形，那么它的面积为 $(a+b)^2$.

如果把图 9－5 看成是由 2 个小长方形和 2 个小正方形组成的，那么它的面积为 $a^2+2ab+b^2$.

由此得到

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

一般地，对于任意的 a、b，由多项式乘法法则可以得到

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2,$$

即 $$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

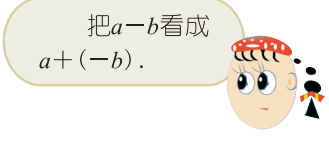
例 1 计算：$(a-b)^2$.

解： $(a-b)^2$

$=[a+(-b)]^2$

$=a^2+2\cdot a\cdot(-b)+(-b)^2$

$=a^2-2ab+b^2$.



于是，我们得到**完全平方公式**(complete square formula)：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

议一议

你能说出完全平方公式的特点吗？

例 2　用完全平方公式计算：

(1) $(5+3p)^2$；　　(2) $(2x-7y)^2$；

(3) $(-2a-5)^2$.

解：(1)　$(5+3p)^2$

$=5^2+2\cdot5\cdot3p+(3p)^2$

$=25+30p+9p^2$；

(2)　$(2x-7y)^2$

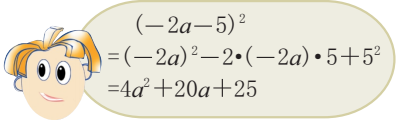
$=(2x)^2-2\cdot2x\cdot7y+(7y)^2$

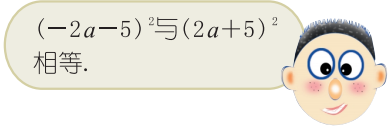
$=4x^2-28xy+49y^2$；

(3)　$(-2a-5)^2$

$=(-2a)^2+2\cdot(-2a)\cdot(-5)+(-5)^2$

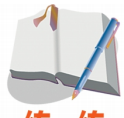
$=4a^2+20a+25$.





试一试

计算 $(a+b+c)^2$.



练一练

1. 用完全平方公式计算：

(1) $(1+x)^2$；　　(2) $(y-4)^2$；

(3) $(-3x+2)^2$；　　(4) $\left(\frac{3}{2}x-\frac{4}{3}y\right)^2$.

2. 下面的计算是否正确？如有错误，请改正．

(1) $(x+y)^2=x^2+y^2$；　(2) $(-a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

3. 填空：

(1) $(a+$_____$)^2=a^2+4ab+4b^2$；

(2) $(2a+$_____$)^2=4a^2+4ab+b^2$；

(3) $(3x-$_____$)^2=9x^2-12xy+$_____；

(4) $(-x-$_____$)^2=x^2+$_____$+1$.

4. 一个正方形的边长为 a cm $(a>6)$. 若边长减少 6 cm，则这个正方形的面积减少了多少？

数学实验室

在边长为 a 的正方形纸片上剪去一个边长为 $b(b<a)$ 的小正方形（如图 9－6(1)），怎样计算图中阴影部分的面积？

沿图 9－6(1)中的虚线将阴影部分剪开拼成图 9－6(2)．由此，你发现了什么？

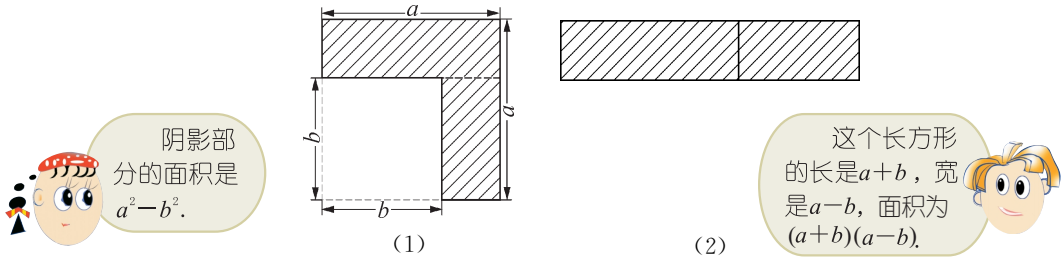


图 9－6

你还有其他方法计算图 9－6(1)中阴影部分的面积吗？

一般地，对于任意的 a、b，由多项式乘法法则可以得到

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2,$$

即

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

于是，我们得到**平方差公式**(difference of square formula)：

$$\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2.}$$

议一议

你能说出平方差公式的特点吗？

例 3 用平方差公式计算：

(1) $(5x+y)(5x-y)$；　　(2) $(m+2n)(2n-m)$.

解：(1) $(5x+y)(5x-y)$

$=(5x)^2-y^2$

$=25x^2-y^2$；

(2) $(m+2n)(2n-m)$

$=(2n+m)(2n-m)$

$=(2n)^2-m^2$

$=4n^2-m^2$.

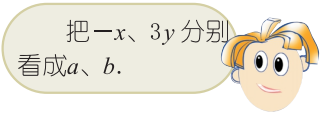
例 4　计算：$(3y-x)(-x-3y)$.

解：　$(3y-x)(-x-3y)$

$=(-x+3y)(-x-3y)$

$=(-x)^2-(3y)^2$

$=x^2-9y^2$.



完全平方公式、平方差公式通常叫做乘法公式，在计算时可以直接使用.

1. 用平方差公式计算：

(1) $(1+x)(1-x)$；

(2) $(a+3b)(a-3b)$；

(3) $(3+2a)(3-2a)$；

(4) $\left(\frac{1}{2}x-2y\right)\left(-\frac{1}{2}x-2y\right)$.

2. 下面的计算是否正确？如有错误，请改正.

(1) $(x+2)(x-2)=x^2-2$；

(2) $(a+b)(b-a)=a^2-b^2$.

3. 填空：

(1) $(x+\_\_)(x-\_\_)=x^2-36$；

(2) $(m+\_\_)(m-\_\_)=m^2-25n^2$；

(3) $(a+b)(\_\_\_\_\_)=b^2-a^2$；

(4) $(\_\_\_\_\_)(1-x^2)=x^4-1$.

例 5　计算：

(1) $(x-3)(x+3)(x^2+9)$；　　(2) $(2x+3)^2(2x-3)^2$.

解：(1)　$(x-3)(x+3)(x^2+9)$

$=(x^2-9)(x^2+9)$

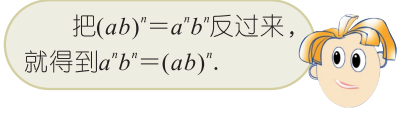
$=x^4-81$；

(2)　$(2x+3)^2(2x-3)^2$

$=[(2x+3)(2x-3)]^2$

$=(4x^2-9)^2$

$=16x^4-72x^2+81$.

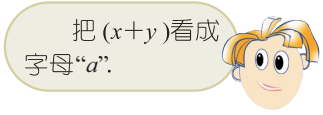


例 6 计算：$(2a+b)(b-2a)-(a-3b)^2$.

解：
$$\begin{aligned}&(2a+b)(b-2a)-(a-3b)^2\\=&(b+2a)(b-2a)-(a-3b)^2\\=&b^2-4a^2-(a^2-6ab+9b^2)\\=&b^2-4a^2-a^2+6ab-9b^2\\=&-5a^2+6ab-8b^2.\end{aligned}$$

例 7 计算：$(x+y+4)(x+y-4)$.

解：
$$\begin{aligned}&(x+y+4)(x+y-4)\\=&[(x+y)+4][(x+y)-4]\\=&(x+y)^2-4^2\\=&x^2+2xy+y^2-16.\end{aligned}$$



想一想

你能用平方差公式计算 $(x+y-3)(x-y+3)$ 吗？

练一练

1. 计算：

(1) $a^2+(b-a)(b+a)$；　(2) $(a-1)(a+1)(a^2-1)$；

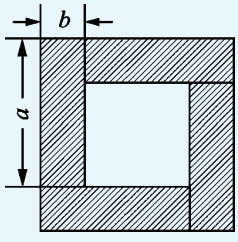
(3) $(3a+1)^2(3a-1)^2$；　(4) $(a-b+c)(a-b-c)$.

2. 计算：

(1) $\left(\frac{a}{2}-b\right)^2-\frac{1}{4}(a+b)(a-b)$；

(2) $2(x+y)(-x-y)-(2x+y)(-2x+y)$.

3. 如图，4 块完全相同的长方形围成一个正方形．用不同的代数式表示图中阴影部分的面积，由此，你能得到怎样的等式？试用乘法公式说明这个等式成立．



（第 3 题）

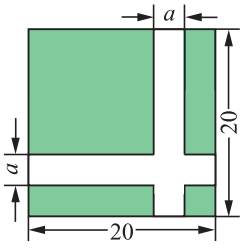
9.4 习题

1. 计算：

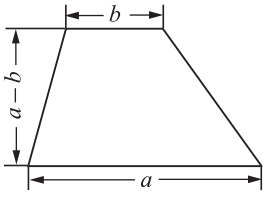
(1) $(2a+3b)^2$；　(2) $(4x-5y)^2$；

(3) $3\left(\frac{1}{3}a-b\right)^2$；　(4) $(-a-2b)^2$.

2. 用不同的代数式表示图中草坪的面积. 由此，你能得到怎样的等式？试用整式乘法法则说明这个等式成立.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 求图中梯形的面积.

4. 计算：

(1) $(2m-3n)(2m+3n)$；　　(2) $(2a-5b)(5b+2a)$；

(3) $(-2+3x)(-2-3x)$；　　(4) $\left(\frac{1}{3}x-y\right)\left(-\frac{1}{3}x-y\right)$.

5. 用乘法公式计算：

(1) 998^2；　　(2) $1\,007\times993$.

6. 计算：

(1) $(x-y)^2-(x+y)^2$；

(2) $(3a-b)^2+(b+3a)^2$；

(3) $(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$；

(4) $(2m+3n)^2(3n-2m)^2$；

(5) $4(a+2)^2-7(a+3)(a-3)+3(a-1)^2$；

(6) $(2a-b-3)(2a+b-3)$.

7. 求下列代数式的值：

(1) $(3-4y)(3+4y)+(3+4y)^2$，其中 $y=0.4$；

(2) $(2a+b)^2-(3a-b)^2+5a(a-b)$，其中 $a=\frac{7}{15}$、$b=\frac{3}{14}$.

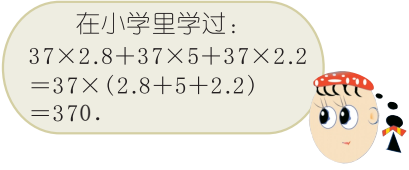
9.5 多项式的因式分解

我们学习了单项式乘多项式的法则

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad.$$

把上述法则反过来，就得到

$$ab+ac+ad=a(b+c+d).$$



这个式子的左边是多项式 $ab+ac+ad$，右边是 a 与 $(b+c+d)$ 的乘积．

多项式 $ab+ac+ad$ 各项都含有因式“a”，像这样的因式称为多项式各项的**公因式**(common factor)．

找出下列多项式各项的公因式．

(1) a^2b+ab^2；

(2) $3x^2-6x^3$；

(3) $9abc-6a^2b^2+12abc^2$．

一个多项式各项的公因式常常不止一个．通常，当多项式的各项系数都是整数时，公因式的系数应取各项系数的最大公约数；字母应取各项相同的字母，而且各字母的指数取次数最低的．

例如，多项式 $9abc-6a^2b^2+12abc^2$ 各项有公因式 $3ab$，它可以写成 $3ab\cdot 3c-3ab\cdot 2ab+3ab\cdot 4c^2$，于是

$$9abc-6a^2b^2+12abc^2=3ab(3c-2ab+4c^2).$$

像这样，把一个多项式写成几个整式的积的形式，叫做多项式的**因式分解**(factoring)．

例 1　把 $5x^3-10x^2$ 分解因式．

解：
$$\begin{aligned}&5x^3-10x^2\\=&5x^2\cdot x-5x^2\cdot 2\\=&5x^2(x-2).\end{aligned}$$

例 2　把下列各式分解因式：

(1) $12ab^2c-6ab$；　　(2) $-2m^3+8m^2-12m$.

解：(1)
$$\begin{aligned}&12ab^2c-6ab\\=&6ab\cdot 2bc-6ab\cdot 1\\=&6ab(2bc-1);\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&-2m^3+8m^2-12m\\=&-2m\cdot m^2-2m\cdot(-4m)-2m\cdot 6\\=&-2m(m^2-4m+6).\end{aligned}$$

当多项式的第一项系数为负数时，通常把“－”号作为公因式的符号进行因式分解．如例2(2)中，把“$-2m$”作为 $-2m^3+8m^2-12m$ 各项的公因式，分解因式后的另一个因式“m^2-4m+6”第一项的系数就为正数．

想一想

如何把多项式 $3a(x+y)-2b(x+y)$ 分解因式？

如果多项式的各项含有公因式，那么就可以把这个公因式提到括号外，把多项式写成公因式与另一个多项式的积的形式，这种分解因式的方法叫做**提公因式法**．

练一练

1. 下列各式由左边到右边的变形，哪些是因式分解，哪些不是？
   (1) $ab+ac+d=a(b+c)+d$；
   (2) $a^2-1=(a+1)(a-1)$；
   (3) $(a+1)(a-1)=a^2-1$.
2. 把下列各式分解因式：
   (1) $4x^2-12x^3$；
   (2) $-x^2y+4xy-5y$.

3. 求代数式 $IR_1+IR_2+IR_3$ 的值，其中 $R_1=25.4$、$R_2=39.2$、$R_3=35.4$、$I=2.5$.

我们学习了乘法公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

把上述公式反过来，就得到

$$\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b).}$$

议一议

这个等式有什么特点？

这个等式从左边到右边的变形是多项式的因式分解.

等式的左边是两个数的平方差，右边是这两个数的和与这两个数的差的积.

做一做

(1) $a^2-16=a^2-(\quad)^2=(a+\_\_)(a-\_\_)$；

(2) $64-b^2=(\quad)^2-b^2=(\_\_+b)(\_\_-b)$.

例 3 把下列各式分解因式：

(1) $36-25x^2$；　　(2) $16a^2-9b^2$；

(3) $9(a+b)^2-4(a-b)^2$.

解： (1) $36-25x^2=6^2-(5x)^2=(6+5x)(6-5x)$；

(2) $16a^2-9b^2=(4a)^2-(3b)^2=(4a+3b)(4a-3b)$；

(3) $9(a+b)^2-4(a-b)^2$

$=[3(a+b)]^2-[2(a-b)]^2$

$=[3(a+b)+2(a-b)][3(a+b)-2(a-b)]$

$=(5a+b)(a+5b)$.

例 4　求图 9－7 中圆环形绿地的面积 S(结果保留 π)．

解： $S=\pi\times 32^2-\pi\times 18^2$

$=\pi(32^2-18^2)$

$=\pi(32+18)(32-18)$

$=700\pi(\mathrm{m}^2)$.

答： 圆环形绿地的面积是 $700\pi\ \mathrm{m}^2$.

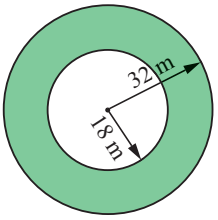


图 9－7

练一练

把下列各式分解因式：

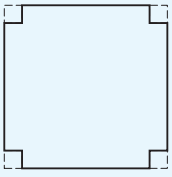
1. (1) x^2-25；　　(2) x^2-16y^2；

   (3) $a^2-\frac{1}{9}b^2$；　　(4) $x^2y^2-z^2$；

   (5) $(x+2)^2-9$；　　(6) $(x+a)^2-(y-b)^2$.

2. 在边长为 16.4 cm 的正方形纸片的 4 角各剪去一个边长为 1.8 cm 的正方形，求余下纸片的面积．

3. 写出一个单项式 M，使多项式 $4a^2+M$ 能用平方差公式分解因式．


(第 2 题)

我们学习了乘法公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

把上述公式反过来，就得到

$$\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,}$$
$$\boldsymbol{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.}$$

议一议

这两个等式有什么特点？

这两个等式从左边到右边的变形都是多项式的因式分解.

第1个等式的左边是两个数的平方和加上这两个数乘积的2倍，右边是这两个数和的平方.
第2个等式……

做一做

填空：

(1) $a^2+6a+9=a^2+2\cdot(\quad)\cdot(\quad)+(\quad)^2=(\qquad)^2$；

(2) $a^2-6a+9=a^2-2\cdot(\quad)\cdot(\quad)+(\quad)^2=(\qquad)^2$；

(3) $a^2+(\quad)+4b^2=a^2+2\cdot(\quad)\cdot(\quad)+(\quad)^2=(\qquad)^2$；

(4) $a^2-8a+(\quad)=a^2-2\cdot(\quad)\cdot(\quad)+(\quad)^2=(\qquad)^2$.

例 5 把下列各式分解因式：

(1) $x^2+10x+25$；　　(2) $4a^2-36ab+81b^2$.

解：(1) $x^2+10x+25$

$=x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2$

$=(x+5)^2$；

(2) $4a^2-36ab+81b^2$

$=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 9b+(9b)^2$

$=(2a-9b)^2$.

例 6 把下列各式分解因式：

(1) $25a^4+10a^2+1$；　　(2) $(m+n)^2-4(m+n)+4$.

解：(1) $25a^4+10a^2+1$

$=(5a^2)^2+2\cdot 5a^2\cdot 1+1^2$

$=(5a^2+1)^2$；

(2) $(m+n)^2-4(m+n)+4$

$=(m+n)^2-2\cdot(m+n)\cdot 2+2^2$

$=[(m+n)-2]^2$

$=(m+n-2)^2$.

运用平方差公式、完全平方公式，把一个多项式分解因式的方法叫做**运用公式法**.

练一练

1. 下列多项式能否分解因式？如果能，把它们分解因式：

(1) $a^2+8a+16$；　　(2) $9a^2-3a+1$；

(3) $4a^2+4a-1$；　　(4) $a^2-ab+\frac{1}{4}b^2$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $25x^2+10xy+y^2$；　　(2) $a^2-12ab+36b^2$；

(3) $16a^4+24a^2b^2+9b^4$　　(4) $(x+y)^2-10(x+y)+25$.

3. 填空：

(1) $4m^2-$____$+9n^2=($____$m-$____$n)^2$；

(2) $9x^2+$_____$+1=($____$+1)^2$.

例 7　把下列各式分解因式：

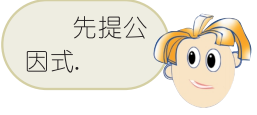
(1) $18a^2-50$；　　(2) $2x^2y-8xy+8y$；

(3) $a^2(x-y)-b^2(x-y)$.

解：(1)　$18a^2-50$

$=2(9a^2-25)$

$=2(3a+5)(3a-5)$；



(2)　$2x^2y-8xy+8y$

$=2y(x^2-4x+4)$

$=2y(x-2)^2$；

(3)　$a^2(x-y)-b^2(x-y)$

$=(x-y)(a^2-b^2)$

$=(x-y)(a+b)(a-b)$.

例 8　把下列各式分解因式：

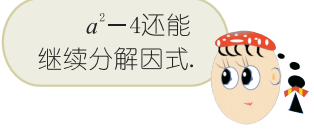
(1) a^4-16；　　(2) $81x^4-72x^2y^2+16y^4$.

解：(1)　a^4-16

$=(a^2)^2-4^2$

$=(a^2+4)(a^2-4)$

$=(a^2+4)(a+2)(a-2)$；



(2)　$81x^4-72x^2y^2+16y^4$

$=(9x^2)^2-2\cdot 9x^2\cdot 4y^2+(4y^2)^2$

$=(9x^2-4y^2)^2$

$=[(3x+2y)(3x-2y)]^2$

$=(3x+2y)^2(3x-2y)^2$.

通常，把一个多项式分解因式，应先提公因式，再运用公式．进行多项式因式分解时，必须把每一个因式都分解到不能再分解为止．

练一练

1. 把下列各式分解因式：

(1) $2ax^2-2ay^4$；　　(2) $-2xy-x^2-y^2$；

(3) $3ax^2+6axy+3ay^2$；　　(4) $(a+b)-a^2(a+b)$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) x^4-81；　　(2) $(x^2-2y)^2-(1-2y)^2$；

(3) x^4-2x^2+1；　　(4) $x^4-8x^2y^2+16y^4$.

9.5 习题

把下列各式分解因式：

1. (1) $ap-aq+am$；　　(2) $4x^2-8xy+2x$；

(3) $12xyz-9x^2y$；　　(4) $3y^4+9y^3$；

(5) $6a^2b-9ab^2+15ab$；　　(6) $-4a^4-6a^3+2a^2$.

2. (1) $4ab(2x-y)+b(2x-y)$；(2) $6a(1-b)^2-2(b-1)^2$.

3. (1) $1-16a^2$；　　(2) m^2-9n^2；

(3) $4x^2-81y^2$；　　(4) $9a^2x^2-b^2y^2$.

4. (1) $(x+5)^2-4$；　　(2) $(a+b)^2-a^2$；

(3) $(a^2+b^2)^2-a^2b^2$；　　(4) $49(a-b)^2-16(a+b)^2$.

5. (1) $a^2b^2-2ab+1$；　　(2) $9-12a+4a^2$；

(3) $4x^2+4x+1$；　　(4) $x^2-6xy+9y^2$.

6. (1) $(a+b)^2+6(a+b)+9$；　　(2) $16-24(x-y)+9(x-y)^2$；

(3) $a^2-2a(b+c)+(b+c)^2$；(4) $4x^2-4x(y-1)+(y-1)^2$.

7. (1) $-a+2a^2-a^3$；　　(2) $3ax^2-3ay^2$；

(3) $16a^2b-16a^3-4ab^2$；　　(4) $x^2(y^2-1)+(1-y^2)$.

8. (1) a^4-1；　　(2) x^4-18x^2+81；

(3) $x^4y^4-8x^2y^2+16$；　　(4) $x^6-x^2y^4$.

阅读

整式乘法与多项式因式分解的关系

整式乘法与多项式因式分解是既有联系又有区别的两种变形．例如，$a(b+c+d)=ab+ac+ad$ 是单项式乘多项式的法则；把这个法则反过来，得到 $ab+ac+ad=a(b+c+d)$，这是运用提公因式法把多项式分解因式．又如 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$、$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 是多项式的乘法公式；把这些公式反过来，得到 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$、$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，这是运用公式法把多项式分解因式．

把多项式乘多项式法则 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 反过来，将得到什么呢？

事实上，$ac+ad+bc+bd=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)$．这样多项式 $ac+ad+bc+bd$ 就分解为两个因式 $(a+b)$ 与 $(c+d)$ 的乘积．

类似地，$ac+bc+3a+3b=c(a+b)+3(a+b)=(a+b)(c+3)$．

数学活动

拼图·公式

活动材料　若干块如图 9－8 所示的长方形和正方形硬纸片．

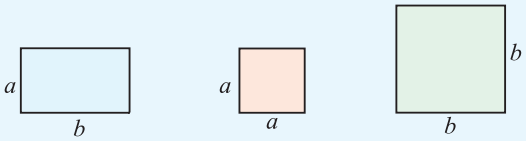


图 9－8

活动要求　1．请你用若干块这样的长方形和正方形硬纸片拼成一个新的长方形，并用不同的方法计算它的面积，从而得出相应的等式．

例如，小明拼成的长方形如图 9－9．这个长方形的面积为 $a^2+3ab+2b^2$；也可以表示为 $(a+2b)(a+b)$．

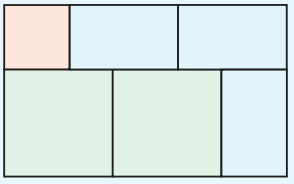


图 9－9

于是，可得：

$a^2+3ab+2b^2=(a+2b)(a+b)$，

$(a+2b)(a+b)=a^2+3ab+2b^2$．

2．试借助拼图的方法，把二次三项式 $a^2+4ab+3b^2$ 分解因式．

小结与思考

1. 在本章里，我们从计算图形面积入手，得到了单项式与单项式、单项式与多项式、多项式与多项式的乘法法则和完全平方公式、平方差公式，并且通过推演证实了这些法则和公式．

2. 整式乘法与因式分解是既有联系又有区别的两种变形：

$$a(b+c+d)\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftharpoons}}ab+ac+ad$$

$$(a+b)(a-b)\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftharpoons}}a^2-b^2$$

$$(a\pm b)^2\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftharpoons}}a^2\pm 2ab+b^2$$

这两种变形具有互逆的关系．利用这种关系，可以由整式乘法的法则和公式得到因式分解的一些方法，并能检验因式分解的结果是否正确．

整式乘法、因式分解的功能不同，应当根据需要选择恰当的变形方法．

3. 两个边长分别为 a、b、c 的直角三角形和一个两条直角边都是 c 的直角三角形拼成图 9－10．试用不同的方法计算这个图形的面积，你能发现什么？

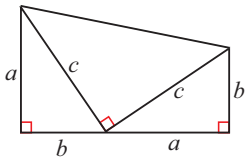


图 9－10

复习题

复习巩固

1. 计算：

(1) $5a^2b\cdot(-2ab^3)$；　　(2) $(-2x^3y)^2\cdot(-x^2y^2)$；

(3) $4x^2y(3xy^2z-7xz)$；　　(4) $(2a^2+ab-2b^2)\cdot\left(-\frac{1}{2}ab\right)$；

(5) $(2x+3y)(4x+7y)$；　　(6) $(a+9)(a+1)$.

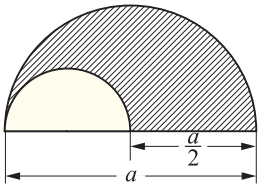
2. 计算：

(1) $(5-2x)(2x+5)$；　　(2) $(-3a+2b)(-3a-2b)$；

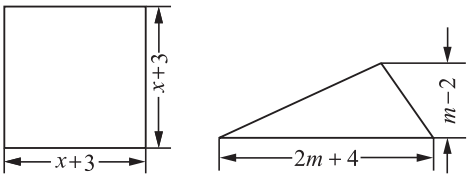
(3) $\left(\frac{3}{4}x-\frac{4}{3}y\right)^2$；　　(4) $\left(0.5a+\frac{1}{3}b\right)^2$；

(5) $(-2a^2-7b)^2$；　　(6) $\left(-8b+\frac{1}{4}\right)^2$.

3. 求图中阴影部分的面积.



(第 3 题)



①　　②

(第 4 题)

4. 求图中正方形、三角形的面积：

5. 一个长方体的高是 8 cm，它的底面是边长为 3 cm 的正方形. 如果底面正方形的边长增加 a cm，那么它的体积增加多少？

6. 求下列代数式的值：

(1) $a(b-c)-b(c-a)+c(a-b)$，其中 $a=\frac{1}{4}$、$b=\frac{1}{2}$、$c=-\frac{3}{4}$；

(2) $(x-1)(x-2)-3x(x+3)+2(x+2)(x-1)$，其中 $x=\frac{1}{3}$.

7. 把下列各式分解因式：

(1) $4x^2-64$；　　(2) $9x^2-6x+1$；

(3) $3x(a-b)-6y(b-a)$；　　(4) $a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$；

(5) $2x^3y+4x^2y^2+2xy^3$；　　(6) $4ab^2-4a^2b-b^3$.

8. 用简便方法计算：

(1) $500^2-499\times501$；　　(2) $\frac{1}{4}\times6.16^2-4\times1.04^2$.

灵活运用

9. 已知 $(a+b)^2=7$，$(a-b)^2=3$. 求 a^2+b^2、ab 的值.

10. 观察下列式子：

$2\times4+1=9$，

$4\times6+1=25$，

$6\times8+1=49$，

⋮

探索以上式子的规律，试写出第 n 个等式，并说明第 n 个等式成立.

11. 写出两个多项式，使它们都有因式 x 和 $x+2$.

12. 计算下列各式，你得到什么结论？试用字母表示数说明结论的正确性．

$8\times8-7\times9$；

$11\times11-10\times12$；

$80\times80-79\times81$.

探索研究

13. 已知两个正方形的边长的和是 20 cm，它们面积的差是 40 cm^2. 求这两个正方形的边长．

14. 用两根同样长的铁丝分别围成一个长方形和一个正方形．

(1) 设长方形的长为 x m、宽为 y m，用含 x、y 的代数式表示正方形的边长；

(2) 已知长方形的长比宽多 a m，用含 a 的代数式表示正方形面积与长方形面积的差．

第10章　二元一次方程组

今有鸡兔同笼，
上有三十五头，
下有九十四足．
问鸡兔各几何？

$$\begin{cases} x+y=35, \\ 2x+4y=94. \end{cases}$$

从“一元”到“二元”，建立了新的数学模型．
从“二元”到“一元”，用转化思想解决问题．

学校举行环保知识竞赛，规则如下：

答对 1 题得 4 分，答错 1 题扣 1 分 .

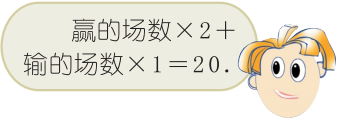
(1) 小亮在这次竞赛中共回答了 10 个问题，答对 5 题，答错 5 题，小亮得了多少分？

(2) 小明在这次竞赛中也回答了 10 个问题，共得 25 分，小明答对了几题？答错了几题？

本章将学习二元一次方程组的建立、解法和应用 .

10.1　二元一次方程

篮球比赛规则规定：赢一场得 2 分，输一场得 1 分．在中学生篮球联赛中，某球队赛了若干场，积 20 分．怎样描述该球队输赢场数与积分之间的相等关系？



设该球队赢了 x 场，输了 y 场，则有

$$2x+y=20.$$

你能列出输赢场数的所有可能情况吗？

x						5					
y						10					

某球员在一场篮球比赛中共得 35 分，其中罚球得 10 分．怎样描述该球员投中的两分球、三分球个数与得分之间的相等关系？

设该球员投中了 x 个两分球、y 个三分球，则有

$$2x+3y+10=35.$$

1．设计一张表格，列出这名球员投中的两分球、三分球个数的各种可能情况．

2．根据所列的表格，回答下列问题：

（1）这名球员最多投中了多少个三分球？

（2）这名球员除罚球外最多投中了多少个球？

（3）如果这名球员除罚球外投中了 10 个球，那么他投中的两分球、三分球各几个？

议一议

方程 $2x+y=20$ 和 $2x+3y+10=35$ 有哪些共同的特点？

方程 $2x+y=20$、$2x+3y+10=35$，它们都含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是 1．像这样的方程，叫做**二元一次方程**(linear equation with two unknowns)．

适合二元一次方程的一对未知数的值叫做这个二元一次方程的一个解．如 $x=8$、$y=3$ 是方程 $2x+3y+10=35$ 的一个解，记作

$$\begin{cases} x=8, \\ y=3. \end{cases}$$

练一练

1. 下面 3 对数值，哪几对是二元一次方程 $2x+y=3$ 的解？哪几对是二元一次方程 $3x+4y=2$ 的解？

$\begin{cases} x=-2, \\ y=2; \end{cases}$　　$\begin{cases} x=2, \\ y=-1; \end{cases}$　　$\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=2. \end{cases}$

2. 把下列方程写成用含 y 的代数式表示 x 的形式，并求方程的正整数解：

(1) $x+3y=7$；　　(2) $4x+3y=32$.

10.1 习题

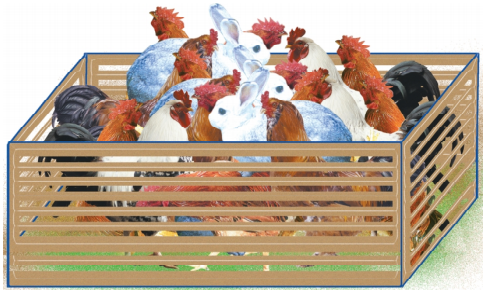
1. 某公园的门票价格为：成人票 8 元/张，儿童票 3 元/张．现有 x 名成人、y 名儿童，买门票共花了 44 元．列出关于 x、y 的二元一次方程．
2. 二元一次方程 $x-y=5$ 的解有多少个？写出这个方程的 3 个解．
3. 把下列方程写成用含 x 的代数式表示 y 的形式，并写出这个方程的一个解：

(1) $5x+y=15$；　　(2) $3x-4y=12$.

4. 盒子里有若干个大小相同的白球和红球，从中摸到 1 个红球得 2 分，摸到 1 个白球得 3 分．某人摸到 x 个红球、y 个白球，共得 12 分．列出关于 x、y 的方程，并写出这个方程符合实际意义的所有的解．

10.2　二元一次方程组

“鸡兔同笼”是我国古代数学名著《孙子算经》中的第 31 题：“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足．问鸡兔各几何?”



设鸡有 x 只，兔有 y 只，可以得到关于 x、y 的两个方程：

$$x+y=35,$$
$$2x+4y=94.$$

鸡和兔的只数必须同时满足这两个方程．

把这两个方程联立在一起，可写成

$$\begin{cases} x+y=35, \\ 2x+4y=94. \end{cases}$$

像这样，把含有两个未知数的两个一次方程联立在一起，就组成了一个**二元一次方程组**(system of linear equations with two unknowns).

想一想

设摸到 1 个红球得 x 分，摸到 1 个绿球得 y 分，可以得到方程：

$$x+3y=11,$$
$$3x+2y=12.$$

这两个方程组成二元一次方程组

$$\begin{cases}x+3y=11, & ①\\ 3x+2y=12. & ②\end{cases}$$

方程①的解是

$$\begin{cases}x=2,\\ y=3;\end{cases}\begin{cases}x=5,\\ y=2;\end{cases}\begin{cases}x=8,\\ y=1\end{cases}\cdots\cdots$$

方程②的解是

$$\begin{cases}x=0,\\ y=6;\end{cases}\begin{cases}x=2,\\ y=3;\end{cases}\begin{cases}x=4,\\ y=0\end{cases}\cdots\cdots$$

可以看出 $\begin{cases}x=2,\\ y=3\end{cases}$ 是这两个方程的公共解．

我们把二元一次方程组中两个方程的公共解叫做**二元一次方程组的解**．例如，$\begin{cases}x=2,\\ y=3\end{cases}$ 是二元一次方程组 $\begin{cases}x+3y=11,\\ 3x+2y=12\end{cases}$ 的解．因此，我们知道，摸到 1 个红球得 2 分，摸到 1 个绿球得 3 分．

做一做

你能找出“鸡兔同笼”问题中二元一次方程组 $\begin{cases}x+y=35,\\ 2x+4y=94\end{cases}$ 的解吗？

练一练

1. 足球表面由黑色五边形和白色六边形共 32 块皮块围成，且白皮块数是黑皮块数的 $\frac{5}{3}$ 倍．设黑皮块数为 x，白皮块数为 y，列出关于 x、y 的二元一次方程组．

（第 1 题）

2. 苹果的单价为 x 元/千克，梨的单价为 y 元/千克，苹果的单价比梨的单价贵 2 元/千克，买 5 千克苹果和 4 千克梨共花去 46 元．列出关于 x、y 的二元一次方程组．

3. 下列 4 对数值，哪几对是二元一次方程 $x+y=3$ 的解？哪几对是二元一次方程 $x-y=-1$ 的解？哪 1 对是二元一次方程组 $\begin{cases}x+y=3,\\x-y=-1\end{cases}$ 的解？

$\begin{cases}x=2,\\y=1;\end{cases}$　$\begin{cases}x=1,\\y=2;\end{cases}$　$\begin{cases}x=0,\\y=-1;\end{cases}$　$\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=\frac{3}{2}.\end{cases}$

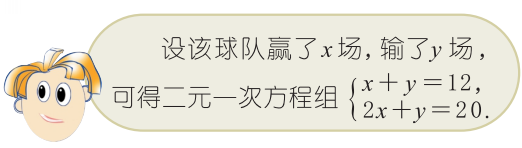
10.2 习题

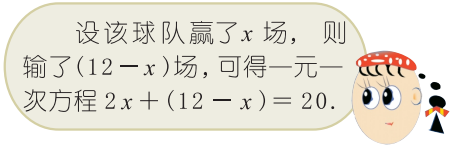
1. 地球的表面积约为 5.1 亿平方千米，其中海洋面积约为陆地面积的 2.4 倍．设地球上的海洋面积为 x 亿平方千米，陆地面积为 y 亿平方千米，列出关于 x、y 的二元一次方程组．
2. 我国古代《算法统宗》里有这样一首诗："我问开店李三公，众客都来到店中．一房七客多七客，一房九客一房空．"诗中后面两句的意思是：如果每一间客房住 7 人，那么有 7 人无房可住；如果每一间客房住 9 人，那么就空出一间客房．设该店有客房 x 间、房客 y 人，列出关于 x、y 的二元一次方程组．
3. 已知 $\begin{cases}x=-2,\\y=1\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}x-2y=2m,\\nx+y=-3\end{cases}$ 的解，求 m、n 的值．
4. 用一根长 80 cm 的绳子围成一个长方形，且这个长方形的长比宽多 10 cm. 设这个长方形的长为 x cm、宽为 y cm，列出关于 x、y 的二元一次方程组．你知道这个长方形的长和宽吗？

10.3 解二元一次方程组

议一议

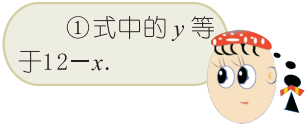
篮球比赛规则规定：赢一场得 2 分，输一场得 1 分．在中学生篮球联赛中，某球队赛了 12 场，共得 20 分．该球队赢了几场？输了几场？





小明设了两个未知数，列出了二元一次方程组；小丽设了一个未知数，列出了一元一次方程．从小明、小丽所列的方程组或方程中，你得到什么启发？

例 1 解方程组 $\begin{cases} x+y=12, & ① \\ 2x+y=20. & ② \end{cases}$

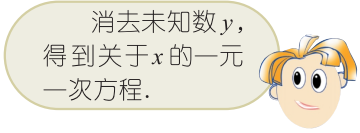


解： 由①，得

$$y=12-x. \quad ③$$

将③代入②，得

$$2x+12-x=20.$$



解这个一元一次方程，得

$$x=8.$$

将 $x=8$ 代入③，得

$$y=4.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=8, \\ y=4. \end{cases}$

做一做

1. 将例 1 中方程①变形为 $x=12-y$，代入方程②解方程组．

2. 解方程组 $\begin{cases} x+3y=11, \\ 3x+2y=12. \end{cases}$

将方程组的一个方程中的某个未知数用含有另一个未知数的代数式表示，并代入另一个方程，消去这个未知数，从而把解二元一次方程组转化为解一元一次方程．这种解方程组的方法称为**代入消元法**(elimination by substitution)，简称**代入法**．

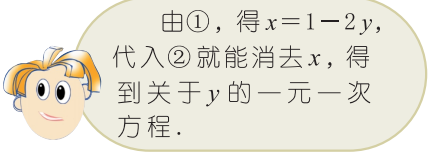
练一练

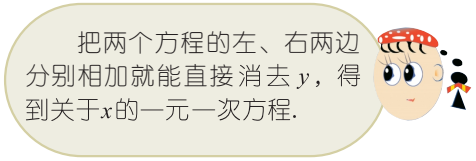
用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} y = x, \\ y + 4x = 15; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x - 7y = 0, \\ x - 9y + 8 = 0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 5. \end{cases}$

例 2　解方程组 $\begin{cases} x + 2y = 1, & ① \\ 3x - 2y = 5. & ② \end{cases}$





解：由①＋②，得

$$4x = 6.$$

$$x = \frac{3}{2}.$$

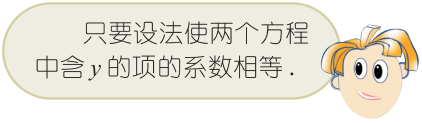
将 $x = \frac{3}{2}$ 代入①，得

$$\frac{3}{2} + 2y = 1.$$

$$y = -\frac{1}{4}.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = -\frac{1}{4}. \end{cases}$

例 3 解方程组 $\begin{cases} 5x-2y=4, & ① \\ 2x-3y=-5. & ② \end{cases}$



解： ①×3，得

$$15x-6y=12. \quad ③$$

②×2，得

$$4x-6y=-10. \quad ④$$

③－④，得

$$11x=22.$$

$$x=2.$$

将 $x=2$ 代入 ①，得

$$5\times2-2y=4.$$

$$y=3.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$

想一想

可以消去 x，解例 3 中的方程组吗？

把方程组的两个方程（或先做适当变形）的左、右两边分别相加或相减，消去其中一个未知数，从而把解二元一次方程组转化为解一元一次方程．这种解方程组的方法称为**加减消元法**（elimination by addition or subtraction），简称**加减法**．

练一练

解下列方程组：

(1) $\begin{cases}2x+y=32,\\2x-y=0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3x-y=-4,\\x-2y=-3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}6x+5z=25,\\3x+4z=20;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}3s+4t=7,\\3t-2s=1.\end{cases}$

10.3 习题

1. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}2x+4y=5,\\x=1-y;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}-x+3y=7,\\2x=5y;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}u+v=10,\\3u-2v=5;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}3x+2z=11,\\3x-5z=4.\end{cases}$

2. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x-4y=1,\\5x+2y=6;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3x+5y=25,\\4x+3y=15;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x-3y=8,\\7x-5y=-5;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=16,\\\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=5.\end{cases}$

3. 在等式 $y=ax+b$ 中，当 $x=5$ 时，$y=6$；当 $x=-3$ 时，$y=-10$. 求 a、b 的值.

*10.4 三元一次方程组

足球比赛规则规定：胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分．某足球队赛了 22 场得 47 分，且胜的场数比负的场数的 4 倍还多 2．该球队胜、平、负各多少场？

设该球队胜 x 场、平 y 场、负 z 场，可以得到关于 x、y、z 的三个方程：

$$x+y+z=22,$$
$$3x+y=47,$$
$$x=4z+2.$$

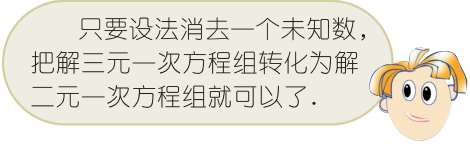
这个问题的解必须同时满足上面的三个方程，把它们联立在一起，可写成

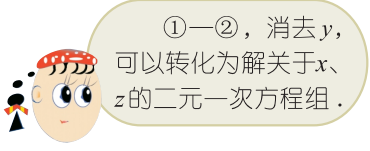
$$\begin{cases} x+y+z=22, & ① \\ 3x+y=47, & ② \\ x=4z+2. & ③ \end{cases}$$

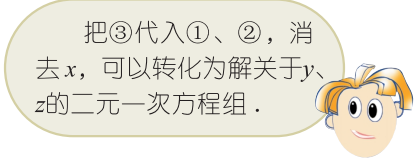
像这样，把含有三个未知数的三个一次方程联立在一起，就组成了一个三元一次方程组．

试一试

试解这个方程组，并说出该球队胜、平、负各多少场.







标有 * 的内容为选学内容，不作考试要求．

例　解方程组 $\begin{cases} x-y+z=7, & ① \\ x+y=-1, & ② \\ 2x-y-z=0. & ③ \end{cases}$

分析： 方程②中只含 x、y．因此，只要由方程①、③消去 z，得到一个只含 x、y 的方程，将所得方程与方程②联立，就能组成一个二元一次方程组．

解： ①＋③，得

$$3x-2y=7. \quad ④$$

②与④联立，得方程组

$$\begin{cases} x+y=-1, \\ 3x-2y=7. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$$

把 $x=1$、$y=-2$ 代入①，得

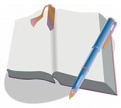
$$z=4.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=-2, \\ z=4. \end{cases}$

想一想

还有其他方法解这个方程组吗？

用代入消元法或加减消元法消去一个未知数，就可以把解三元一次方程组转化为解二元一次方程组．



练一练

解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x+y+z=22, \\ 3x+y=47, \\ x=4z+2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x-y-z=0, \\ x+z=5, \\ 3x+y-2z=1. \end{cases}$

10.4 习题

1. 解下列方程组：

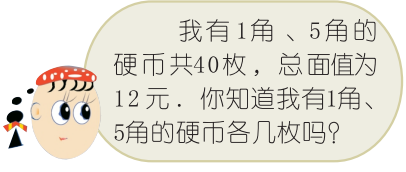
(1) $\begin{cases} 3x-y+z=10, \\ x+2y-z=6, \\ x+y+z=12; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x+4y+3z=9, \\ 3x-2y+5z=11, \\ 5x-6y+7z=13. \end{cases}$

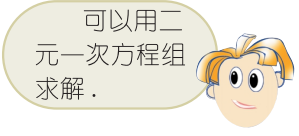
2. 在等式 $y=ax^2+bx+c$ 中，当 $x=-1$ 时，$y=5$；当 $x=1$ 时，$y=1$；当 $x=2$ 时，$y=2$. 求 a、b、c 的值.

10.5　用二元一次方程组解决问题

数学实验室

准备若干枚 1 角、5 角的硬币，两人一组做游戏．





问题 1　国庆长假期间，某旅行社接待 1 日游和 3 日游的旅客共 2 200 人，收旅游费 200 万元，其中 1 日游每人收费 200 元，3 日游每人收费 1 500 元．该旅行社接待的 1 日游和 3 日游旅客各有多少人？

分析：问题 1 中包括两个相等关系：

1 日游旅客人数 + 3 日游旅客人数 = 2 200；

所收的 1 日游旅游费 + 所收的 3 日游旅游费 = 200 万元．

解：设接待 1 日游旅客 x 人，3 日游旅客 y 人，那么所收的 1 日游旅游费为 $200x$ 元，3 日游旅游费为 $1\,500y$ 元．

根据题意，得

$$\begin{cases} x+y=2\,200, \\ 200x+1\,500y=2\,000\,000. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=1\,000, \\ y=1\,200. \end{cases}$$

答：该旅行社接待 1 日游旅客 1 000 人，3 日游旅客 1 200 人．

问题 2　为保护环境，某校环保小组成员收集废旧电池．第一天收集 5 节 1 号电池，6 节 5 号电池，总质量为 500 g；第二天收集 3 节 1 号电池，4 节 5 号电池，总质量为 310 g．1 节 1 号电池和 1 节 5 号电池的质量分别是多少？

分析： 问题 2 中包括两个相等关系：

5 节 1 号电池的质量 + 6 节 5 号电池的质量 = 500 g；

3 节 1 号电池的质量 + 4 节 5 号电池的质量 = 310 g.

解： 设 1 节 1 号电池的质量为 x g，1 节 5 号电池的质量为 y g. 根据题意，得

$$\begin{cases} 5x+6y=500, \\ 3x+4y=310. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=70, \\ y=25. \end{cases}$$

答： 1 节 1 号电池质量为 70 g，1 节 5 号电池质量为 25 g.

读一读

废旧电池的危害

1 节 1 号废旧锌锰电池的质量为 70 g，其中含碳棒 5.2 g、锌皮7.0 g、锰粉 25 g、铜帽 0.5 g，其他物质 32.3 g. 废旧电池的危害主要集中在它所含的少量重金属上，如铅、汞、镉等．由于机械磨损和腐蚀，使得废旧电池内部的重金属和酸、碱等泄漏出来，进入土壤或水源．有资料表明，一粒纽扣大的废旧电池，大约会污染水 600 000 L. 如这些有毒物质通过各种途径进入人体内，长期积累难以排除，会损害人体的神经系统、造血功能和骨骼，甚至致癌．

练一练

1. 某停车场的收费标准如下：中型汽车的停车费为10 元/辆，小型汽车的停车费为 6 元/辆．现在停车场内停有 50 辆中、小型汽车，这些车共缴纳停车费 360 元，中、小型汽车各有多少辆？
2. 一个两位数的十位数字与个位数字的和是 7，如果把它的个位数字与十位数字互换，那么所得的两位数比原数大 45. 求这个两位数.

问题 3　某厂生产甲、乙两种型号的产品，生产 1 个甲种产品需用时 8 s、铜 8 g；生产 1 个乙种产品需用时 6 s、铜 16 g. 如果生产甲、乙两种产品共用时 1 h、用铜 6.4 kg，那么甲、乙两种产品各生产多少个？

分析：

	甲种产品 x 个	乙种产品 y 个	总　计
用时/s			
用铜/g			

解：设生产甲种产品 x 个，乙种产品 y 个.

根据题意，得

$$\begin{cases}8x+6y=3\ 600,\\8x+16y=6\ 400.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=240,\\y=280.\end{cases}$$

答：生产甲种产品 240 个，乙种产品 280 个.

问题 4　为了增强公民的节水意识，合理利用水资源，某市采用价格调控手段来引导市民节约用水：每户居民每月用水不超过 15 立方米时，按基本价格收费；超过 15 立方米时，超过的部分要加价收费. 该市某户居民今年 4、5 月份的用水量和水费如下表所示：

月　份	用水量/立方米	水费/元
4	16	50
5	20	70

求该市居民用水的两种收费价格.

解：设该市居民用水的基本价格为 x 元/立方米，超过 15 立方米部分的价格为 y 元/立方米.

根据题意，得

$$\begin{cases}15x+(16-15)y=50,\\15x+(20-15)y=70.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 5. \end{cases}$$

答：该市居民用水的基本价格为 3 元/立方米，超过 15 立方米部分的价格为 5 元/立方米．

做一做

在问题 4 中，如果某户居民某月交水费 80 元，那么该户居民这个月的用水量为多少立方米？

练一练

1. 运输两批救灾物资，第一批 360 t，用 6 节火车车皮和 15 辆汽车正好装完；第二批 440 t，用 8 节火车车皮和 10 辆汽车正好装完．每节火车车皮和每辆汽车平均各装物资多少(单位：t)？
2. 邮购每册 6 元的某种杂志，邮寄费和优惠率如下表：

邮购册数	1～99	100 以上(含 100)
邮寄费用	书价的 10%	免费邮寄
书价优惠	不优惠	优惠 10%

两次邮购这种杂志共 200 册，总计金额 1 140 元．两次邮购杂志各多少册？

问题 5 制作甲、乙两种无盖的长方体纸盒(如图 10－1)，需用正方形和长方形两种硬纸片，且长方形的宽与正方形的边长相等．现有 150 张正方形硬纸片和 300 张长方形硬纸片，可制作甲、乙两种纸盒各多少个？

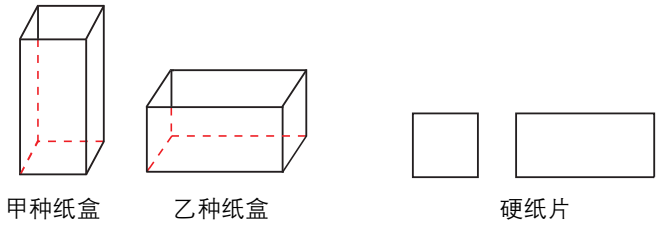


图 10－1

分析：每个甲种纸盒用正方形硬纸片 1 张，长方形硬纸片 4 张；每个乙种纸盒用正方形硬纸片 2 张，长方形硬纸片 3 张．

解：设可制作甲种纸盒 x 个，乙种纸盒 y 个．

根据题意，得

$$\begin{cases} x+2y=150, \\ 4x+3y=300. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=30, \\ y=60. \end{cases}$$

答：可制作甲种纸盒 30 个，乙种纸盒 60 个．

问题 6　某铁路桥长 1 000 m，现有一列火车从桥上通过，测得该火车从开始上桥到完全过桥共用了 1 min，整列火车完全在桥上的时间共 40 s. 求火车的速度和长度．

分析：如果设火车的速度为 x m/s，火车的长度为 y m，用线段表示大桥和火车的长度，根据题意可画出图 10－2.

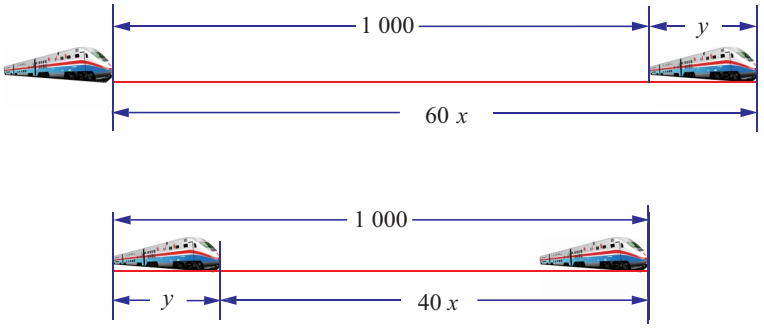


图 10－2

由图 10－2 可知：火车 1 min 行驶的路程等于桥长与火车长的和，火车 40 s 行驶的路程等于桥长与火车长的差．

解：设火车的速度为 x m/s，火车的长度为 y m.

根据题意，得

$$\begin{cases} 60x=1\,000+y, \\ 40x=1\,000-y. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = 20, \\ y = 200. \end{cases}$$

答：火车的速度为 20 m/s，火车的长度为 200 m.

练一练

1. 已知梯形的高是 4 cm，面积是 18 cm^2，上底比下底的 $\frac{1}{3}$ 多 1 cm. 求梯形上、下底的长度．
2. 甲、乙两人沿 400 m 的环形跑道同时同地出发跑步．如果同向而行，那么经过 200 s 两人相遇；如果背向而行，那么经过 40 s 两人相遇．求甲、乙两人的跑步速度．

10.5 习题

1. 为缓解甲、乙两地旱情，某水库计划向甲、乙两地送水．第一次往甲地送水 3 天，往乙地送水 2 天，共送水 84 万立方米；第二次往甲地送水 5 天，往乙地送水 2 天，共送水 120 万立方米．往甲、乙两地平均每天各送水多少？
2. 一家公司加工蔬菜，有粗加工和精加工两种方式．如果进行粗加工，每天可加工 15 t；如果进行精加工，每天可加工 5 t．该公司从市场上收购蔬菜 150 t，并用 14 天加工完这批蔬菜．精加工和粗加工蔬菜各多少(单位：t)？
3. 某次篮球、排球比赛，共有 24 个队、260 名运动员参加，其中篮球队每队 10 名，排球队每队 12 名．参赛的篮球队、排球队各有多少个？
4. 食堂的存煤计划用若干天，若每天用 130 kg，则缺少 60 kg；若每天用 120 kg，则还剩余 60 kg．食堂里的存煤共有多少？计划用多少天？
5. 《希腊文选》中有这样一题：“驴和骡驮着货物并排走在路上，驴子不停地埋怨驮的货物太重，压得受不了．骡子对它说：‘你发什么牢骚啊！我驮的比你驮的更重．倘若你的货给我一口袋，我驮的货比你驮的货重 1 倍；而我若给你一口袋，咱俩才刚好一样多．’驴和骡各驮几口袋货物？”

6. 某校组织学生乘汽车去自然保护区野营．汽车先以 60 km/h 的速度在平路上行驶，后又以 30 km/h 的速度爬坡到达目的地，共用了 6.5 h；返回时，汽车以 40 km/h 的速度下坡，又以 50 km/h 的速度在平路上行驶，共用了6 h. 学校距自然保护区有多远？

7. 一玻璃厂熔炼玻璃液，其原料由石英砂和长石粉混合而成，要求原料中含二氧化硅 70%．经过化验，石英砂中含二氧化硅 95%，长石粉中含二氧化硅 63%．要配制 3.2 t 原料，需石英砂、长石粉各多少？

8. 现有一块质量为 10 kg 的甲、乙两种金属的合金. 用甲种金属若干与这块合金重新熔炼，所得的新合金中甲种金属占 3 份，乙种金属占 2 份. 如果再用相同数量的甲种金属与新合金重新熔炼，那么所得合金中甲种金属占 7 份，乙种金属占 3 份．每次所用的甲种金属有多少？原来这块合金中含甲种金属的百分比是多少？

阅读

转　化

举办运动会，参赛运动员都有一个号码，这样就把运动员的姓名转化为数字，给比赛带来了许多方便．

用数轴上的点表示数，一个数的绝对值等于数轴上表示这个数的点到原点的距离……这些都是数与形的转化. 根据有理数运算法则，减法可以转化为加法，除法可以转化为乘法……这些都是运算的转化．像这样，把复杂问题转化为简单问题，把未知转化为已知，是解决问题的一种常用的思想方法．

本章里，用二元一次方程组解决问题时，要把实际问题转化为方程组，这是实际问题到数学问题的转化；用代入消元法或加减消元法，可以把解二元一次方程组转化为解一元一次方程，这是从“二元”到“一元”的转化．类似地，消去三元一次方程组中的某个未知数，就可以把解三元一次方程组转化为解二元一次方程组．

数学活动

算年龄

1. 今年，小明与他妈妈的年龄和是 50 岁．3 年后，小明妈妈的年龄是小明年龄的 2.5 倍，利用二元一次方程组求小明和他妈妈的年龄．

2. 根据自己和父母(或祖父母、外祖父母)的年龄或收集其他的数据，编一个可以利用二元一次方程组解决的问题，请同学求解．

3. 观察、收集日常生活或生产实践中的一些数据，参照 10.5 节中提出问题、解决问题的全过程，提出一个可以用二元一次方程组解决的实际问题，再解这个方程组，并对解的实际意义做出解释.

4. 课堂交流，汇报活动过程、感受和成果，并发表你的看法.

小结与思考

1. 从“一元”到“二元”，我们建立了新的数学模型．用二元一次方程组解决问题的关键，是找出实际问题中数量之间的两个相等关系．

2. 一个二元一次方程组常常可以有不同的实际意义．例如，二元一次方程组$\begin{cases}2x+y=110,\\x+3y=180\end{cases}$的实际意义可以是：甲、乙两人加工零件，甲做 2 h，乙做1 h，共加工 110 个零件；甲做 1 h，乙做 3 h，共加工 180 个零件．甲、乙两人每小时各加工多少个零件？

你能给出这个方程组不同的实际意义吗？

3. 从“二元”到“一元”，我们用转化思想解决问题．解二元一次方程组的基本思路是：消去一个未知数，把它转化为解一元一次方程：

二元一次方程组 $\xrightarrow[\text{代入法或加减法}]{\text{消　元}}$ 一元一次方程

解三元一次方程组的基本思路是：消去一个未知数，把它转化为解二元一次方程组：

三元一次方程组 $\xrightarrow[\text{代入法或加减法}]{\text{消　元}}$ 二元一次方程组

如果一个方程组中有 4 个未知数，并且每个方程中含有未知数的项的次数都是 1，你能解这样的方程组吗？说说你的想法．

复习巩固

1. 把二元一次方程 $2x+3y-4=0$ 化为 $y=kx+m$ 的形式，并写出 k、m 的值．

2. 方程 $5x-3y=4$ 有没有正整数解？如果有，写出其中的几个．

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x+2y=0, \\ 3x+4y=6; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5x+6y=16, \\ 7x-9y=5; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 9x-11y+1=0, \\ 4x-5y-3=0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 0.8x-0.9y=2, \\ 6x-3y=2.5; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=\dfrac{2y+4}{3}, \\ y=\dfrac{3x-4}{3}; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x+y=300, \\ 5\%x+53\%y=300\times 25\%. \end{cases}$

4. 已知关于 x、y 的方程组 $\begin{cases} 3x-ay=16, \\ 2x+by=15 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=7, \\ y=1. \end{cases}$ 求 a、b 的值．

5. 已知 x 与 y 互为相反数，并且 $2x-y=3$. 求 x、y 的值．

6. 已知梯形的面积是 42 cm^2，高是 6 cm，下底比上底的 2 倍多 2 cm. 求梯形上、下底的长．

7. 现有 100 元和 20 元的人民币共 33 张，总面额 1 620 元．这两种币值的人民币各有多少张？

8. 某商店分别以标价的 8 折和 9 折卖了两件不同品牌的衬衫，共收款 364 元．已知这两件衬衫标价的和是 420 元，这两件衬衫的标价各多少元？

9. 师徒两人检修一条长 270 m 的自来水管道，师傅每小时比徒弟多检修10 m，两人从管道两端同时开始检修，3 h 后完成任务．师傅与徒弟每小时各检修多少？

10. 某农户在一荒坡上种植了杨树和松树，已知种植的杨树棵数比总数的一半多 11 棵，种植的松树棵数比总数的三分之一少 2 棵．两种树各种植了多少棵？

11. 把一堆书分给学生，如果每名学生分 4 本，那么多 4 本；如果每名学生分 5 本，那么最后 1 名学生只有 3 本．问：有多少名学生？有多少本书？

灵活运用

12. A、B 两地之间的路程是 36 km，小丽从 A 地骑自行车去 B 地，小明从 B 地骑自行车去 A 地，两人同时出发，相向而行，经过 1 h 后两人相遇；再过 0.5 h，小丽还需行驶的路程是小明的 2 倍．小丽和小明骑车的速度各是多少？

13. 美术小组共有 30 名同学，准备到文具店购买铅笔和橡皮．如果全组每人各买 2 支铅笔和 1 块橡皮，那么需按零售价购买，共支付 60 元；如果全组每人各买 3 支铅笔和 2 块橡皮，那么可按批发价购买，共支付 81 元．已知 1 支铅笔的批发价比零售价低 0.1 元，1 块橡皮的批发价比零售价低 0.2 元．这家文具店的铅笔和橡皮的批发价各是多少？

探索研究

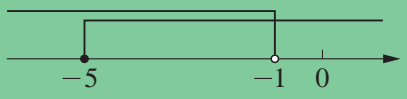
14. 编一个二元一次方程组，使它的解是 $\begin{cases} x=-1, \\ y=4. \end{cases}$

15. 小亮在匀速行驶的汽车里，注意到公路里程碑上的数是一个两位数；1 h 后，看到里程碑上的两位数与第一次看到的两位数恰好互换了两个数字的位置；再过 1 h，看到里程碑上的数是第一次看到的两位数的两个数字之间添加一个 0 所得的三位数．这 3 块里程碑上的数各是多少？

16. 探索下列二元一次方程组解的情况：

(1) $\begin{cases} x-y=1, \\ 2x-y=3; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x-y=1, \\ 2x-2y=2; \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x-y=1, \\ 2x-2y=4. \end{cases}$

第11章　一元一次不等式



$-5 \leqslant x < -1$

生活中处处都有数量之间的不等关系，
不等式是刻画这种数量关系的数学模型 .

一只纸箱质量为 1 kg．当放入一些苹果(每个苹果的质量为 0.25 kg)后，纸箱和苹果的总质量不超过 10 kg．

1. 填表：

苹果数	20	25	30	35	
总质量/kg					

2. 估计这只纸箱内最多能装多少个苹果．

本章将学习一元一次不等式(组)的建立、解法和应用．

11.1　生活中的不等式

在日常生活中，同类量(如长度与长度、质量与质量)之间常常存在不等关系，这种数量之间的不等关系，可以用数学式子来表示．

图中的交通图标表示该公路某路段上汽车的最高时速不得超过 100 km. 如果一辆汽车的行驶速度是 a km/h，那么 a 与 100 之间的关系表示为

$$a \leqslant 100.$$

试一试

用数学式子表示下列数量之间的关系：

(1) 某种袋装牛奶中，每 100 g 牛奶所含的蛋白质（x g）不少于 2.9 g，脂肪（y g）不少于 3.1 g.

(2) 一辆 48 座的旅游车载有游客 x 人，途中上来 2 人后，车内仍有空座位；

(3) 边长为 a m 的正方形桌面的面积大于 1 m^2；

(4) m ($m \neq 0$) 的倒数不大于 5.

议一议

举出具有不等关系的实例，并与同学交流．

像 $a \leqslant 100$、$x \geqslant 2.9$、$y \geqslant 3.1$、$x+2<48$、$a^2>1$、$\frac{1}{m} \leqslant 5$ 等，用不等号表示不等关系的式子叫做**不等式**(inequality).

想一想

如何表示下列问题中的不等关系？

1. 某市某天的气温是 t ℃，该市这天的最低气温是 -2 ℃，最高气温是 6 ℃.

2. 小丽种了一棵高 70 cm 的小树，假设小树平均每周长高 3 cm，x 周后这棵小树的高度不超过100 cm.

练一练

1. (口答)用不等式表示：
   (1) a 是负数；
   (2) x 与 5 的和大于 2；
   (3) x 与 a 的差小于 2；
   (4) x 与 y 的差是非负数．
2. 根据下列含有“最”字的实例，写出不等式：
   (1) 火车提速后，速度(v)最高可达 350 km/h；
   (2) 某班学生的身高(h)最高为 1.74 m；
   (3) 某班学生从家到校的路程(s)最短是 1 km.

11.1 习题

1. 用“>”或“<”号填空：

(1) 0 ____ -2；　　(2) -1 ____ -5；

(3) -4 ____ 2；　　(4) $\frac{1}{3}$ ____ $\frac{1}{2}$；

(5) $-\frac{2}{3}$ ____ $-\frac{3}{4}$.

2. 用不等式表示下列数量之间的关系：

(1) 某种小客车载有乘客 x 人，它的最大载客量为 14 人；

(2) 小明今天锻炼身体用了 t min，他每天锻炼身体的时间不少于 30 min；

(3) 小丽每天睡眠时间超过 8 h，昨天她的睡眠时间是 t h；

(4) 某校男子跳高纪录是 1.75 m，在今年的校田径运动会上，小明的跳高成绩是 h m，打破了该项纪录；

(5) 某校男子 100 m 跑的纪录是 12 s，在今年的校田径运动会上，小刚的 100 m 跑成绩是 t s，打破了该项纪录．

3. 用不等式表示：

(1) x 与 6 的差大于 2；

(2) x 的 2 倍与 5 的和是负数；

(3) x 的 3 倍与 2 的差是正数；

(4) y 的三分之一与 4 的和是非负数．

11.2 不等式的解集

议一议

为了保障交通安全、畅通，隧道入口处常有汽车限高标识（如图 11－1）．高度为 3 m、3.5 m、4 m、4.5 m 的汽车可以通过这条隧道吗？

图 11－1

图 11－1 中的标识，表示可以通过该隧道的汽车的高度不能超过 4.2 m．显然，高度为 3 m、3.5 m、4 m 的汽车都可以通过这条隧道；高度为 4.5 m 的汽车不可以通过这条隧道．

设汽车的高度为 x m，x 与 4.2 之间的关系可以用不等式 $x \leqslant 4.2$ 表示．当 $x=3$、$x=3.5$、$x=4$ 时，这个不等式成立；当 $x=4.5$ 时，这个不等式不成立．

试一试

分别说出使下列不等式成立的 x 的值：

(1) $x-3>0$；　　(2) $x-4 \leqslant 0$.

能使不等式成立的未知数的值叫做**不等式的解**(solution of inequality).

例如，$x=3.5$、4、5 都是不等式 $x-3>0$ 的解；$x=-1$、0、$\frac{1}{2}$、2、3、3.5、4 都是不等式 $x-4 \leqslant 0$ 的解．

想一想

1. 不等式 $x-3>0$ 和 $x-4 \leqslant 0$ 的解各有多少个？
2. 不等式的解与方程的解有什么不同？

一个含有未知数的不等式的所有的解，组成这个不等式的解的集合，简称这个不等式的**解集**(solution set)．例如，比 3 大的数都是不等式 $x-3>0$ 的解，不等式 $x-3>0$ 的解集是 $x>3$;类似地,不等式 $x-4\leqslant 0$ 的解集是 $x\leqslant 4$.

求不等式解集的过程叫做**解不等式**(solving inequality).

不等式的解集常常可以借助数轴直观地表示出来．

例如，不等式 $x-3>0$ 的解集 $x>3$ 可以用数轴上表示 3 的点的右边部分来表示(如图 11－2)．

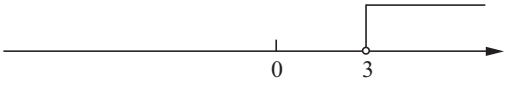


图 11－2

这里在数轴上表示 3 的点的位置画空心圆圈，表示不等式的解集不包含 3 这个数．

又如，不等式 $x-4\leqslant 0$ 的解集 $x\leqslant 4$ 可以用数轴上表示 4 的点以及它的左边部分来表示(如图 11－3).

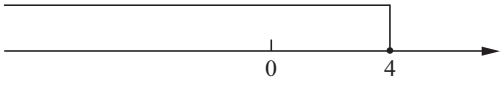


图 11－3

这里在数轴上表示 4 的点的位置画实心圆点，表示不等式的解集包含 4 这个数．

说出一个不等式，使它的解集在数轴上表示如下(图 11－4)：

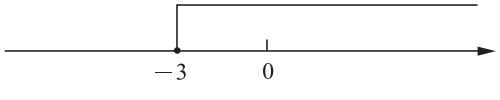


图 11－4

练一练

1. 下列数值中，哪些是不等式 $x+2>4$ 的解？

   -5，-3，-1.5，0，1，2，3.4，4，5，6.2，9.

2. 在数轴上表示下列不等式的解集：

   (1) $x\leqslant 2$；　　(2) $x\geqslant -2$；

   (3) $x<\frac{2}{3}$；　　(4) $x>-\frac{1}{4}$.

3. x 取任意负数时，不等式 $x-2<0$ 都成立，能说这个不等式的解集是 $x<0$ 吗？

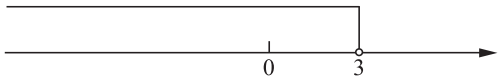
11.2 习题

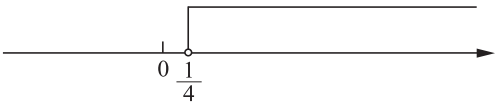
1. 在数轴上表示下列不等式的解集：

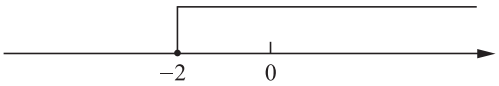
   (1) $x>2$；　　(2) $x\geqslant 3$；

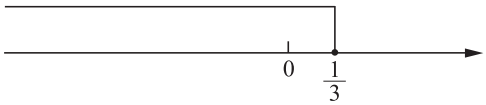
   (3) $x<-\frac{1}{2}$；　　(4) $x\leqslant \frac{3}{4}$.

2. 写出下列各数轴上所表示的不等式的解集：

   (1)
   

   (2)
   

   (3)
   

   (4)
   

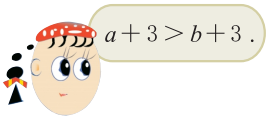
3. 写出不等式 $2x+1>3$ 的 5 个解，并比较它们与方程 $2x+1=3$ 的解的大小．

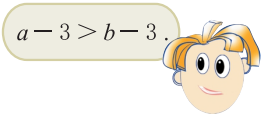
11.3　不等式的基本性质

前面我们已经学过等式的性质．类似地，不等式具有什么性质呢？

小明的年龄比小丽大．设今年小明 a 岁，小丽 b 岁，那么 $a>b$.

事实上，3 年后或 3 年前小明的年龄也比小丽大，你能写出相应的不等式吗？





一般地，如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$ 或 $a-c>b-c$.

不等式的基本性质 1　不等式的两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式，不等号的方向不变．

用不等号填空：

5×1 ____ 3×1,

5×2 ____ 3×2,

5×3 ____ 3×3,

5×4 ____ 3×4,

⋮

$5\times(-1)$ ____ $3\times(-1)$,

$5\times(-2)$ ____ $3\times(-2)$,

$5\times(-3)$ ____ $3\times(-3)$,

$5\times(-4)$ ____ $3\times(-4)$,

⋮

议一议

不等式 $5>3$ 的两边都乘同一个正数或负数时，不等号方向有没有变化？

一般地，如果 $a>b$，并且 $c>0$，那么 $ac>bc$；如果 $a>b$，并且 $c<0$，那么 $ac<bc$.

不等式的基本性质 2　不等式的两边都乘(或除以)同一个正数，不等号的方向不变；不等式的两边都乘(或除以)同一个负数，不等号的方向改变.

想一想

1. 不等式的两边都乘 0，结果怎样？
2. 不等式的基本性质与等式的基本性质有什么相同点、不同点？

根据不等式的基本性质，我们可以对不等式进行适当的变形，把它化为 $x>a(x\geqslant a)$ 或 $x<a(x\leqslant a)$ 的形式.

例如，在不等式 $x+1<4$ 的两边都减去 1，得 $x+1-1<4-1$，即 $x<3$；在不等式 $-x>-6$ 的两边都乘 -1，得 $-x\times(-1)<-6\times(-1)$，即 $x<6$.

练一练

1. 已知 $a>b$，用“>”或“<”号填空：

(1) $a+2$ ____ $b+2$；　　(2) $a-5$ ____ $b-5$；

(3) $4a$ ____ $4b$；　　(4) $-a$ ____ $-b$；

(5) $4a-3$ ____ $4b-3$；　　(6) $3-2a$ ____ $3-2b$.

2. 说出下列不等式变形的依据：

(1) 由 $x-1>2$，得 $x>3$；　　(2) 由 $-2x>-4$，得 $x<2$；

(3) 由 $-\frac{1}{2}x<-1$，得 $x>2$；　　(4) 由 $3x<x$，得 $2x<0$.

11.3 习题

1. 把下列不等式化成 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式：

(1) $x+2>4$；　　(2) $2x<x-3$；

(3) $\frac{1}{3}x<-\frac{4}{3}$；　　(4) $-6x>8$.

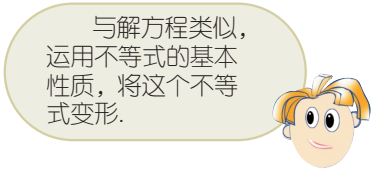
2. 小明到离家 6 km 的活动基地参加社会实践，早晨 7 时出发，要在 9 时前到达．如果他每小时走 x km，可以得到怎样的不等式？指出所得不等式中 x 的取值范围.

11.4 解一元一次不等式

不等式 $x \geqslant 2.9$、$x+2<48$、$2x<x-3$、$\frac{1}{3}y+4 \geqslant 0$，它们都只含有一个未知数，并且未知数的次数都是 1，系数不等于 0. 像这样的不等式，叫做**一元一次不等式**(linear inequality with one unknown).

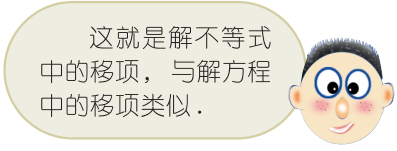
议一议

怎样求一元一次不等式 $3x+70>100$ 的解集？



根据不等式的基本性质 1，不等式的两边都减去 70，得

$$3x>100-70.$$



合并同类项，得

$$3x>30.$$

根据不等式的基本性质 2，不等式的两边都除以 3，得

$$x>10.$$

这个不等式的解集在数轴上表示如下(图 11－5)：

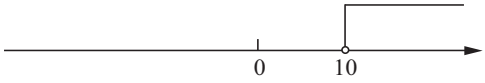


图 11－5

例 1 解不等式 $14-2x>6$，并把它的解集在数轴上表示出来.

解： 移项，得

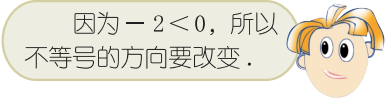
$$-2x>6-14.$$

合并同类项，得

$$-2x>-8.$$

根据不等式的基本性质 2，不等式的两边都除以－2，得

$$x<4.$$



这个不等式的解集在数轴上表示如下(图 11－6)：

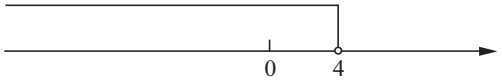


图 11－6

练一练

解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $2+2a>6$；　　(2) $5-x<1$；

(3) $4x\leqslant 2x+3$；　　(4) $-\frac{1}{2}x-1>2$.

例 2　解不等式 $2x-1\geqslant\frac{3x-1}{2}$，并把它的解集在数轴上表示出来．

解：根据不等式的基本性质 2，不等式的两边都乘 2，得

$$2(2x-1)\geqslant 3x-1.$$

去括号，得

$$4x-2\geqslant 3x-1.$$

移项，得

$$4x-3x\geqslant -1+2.$$

合并同类项，得

$$x\geqslant 1.$$

这个不等式的解集在数轴上表示如下(图 11－7)：

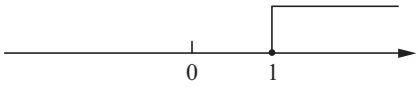


图 11－7

例 3 解不等式 $1-\frac{x+6}{2}<\frac{2x+1}{3}$，并把它的解集在数轴上表示出来．

解： 去分母，得

$$6-3(x+6)<2(2x+1).$$

去括号，得

$$6-3x-18<4x+2.$$

移项、合并同类项，得

$$-7x<14.$$

两边都除以－7，得

$$x>-2.$$

这个不等式的解集在数轴上表示如下(图 11－8)：

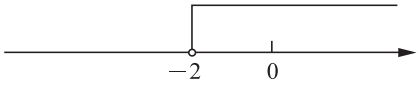


图 11－8

议一议

1. 解一元一次不等式的一般步骤是什么？
2. 比较一元一次不等式的解法与一元一次方程的解法的相同点和不同点．

解一元一次不等式的一般步骤与解一元一次方程类似．但是，在不等式两边都乘(或除以)同一个不等于 0 的数时，必须分清这个数是正数还是负数，正确地运用不等式的基本性质 2．特别要注意，在不等式两边都乘(或除以)同一个负数时，要改变不等号的方向．

练一练

解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $2(x-2)>4$；　　(2) $10-3(x+6)\leqslant 1$；

(3) $\frac{x+2}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$；　　(4) $\frac{x}{3}>4-\frac{x-2}{2}$.

11.4 习题

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $\frac{x}{2}\geqslant 2$；　　(2) $-\frac{3x}{4}>-3$；

(3) $12x-3\leqslant 5$；　　(4) $2x<1-4x$；

(5) $6a+8<7a-6$；　　(6) $12b+6\geqslant 3b-27$.

2. 解下列不等式：

(1) $3(y-2)+1<-2$；　　(2) $4-2(x-3)\geqslant 4(x+1)$；

(3) $\frac{2x+3}{5}\leqslant\frac{3x+1}{4}$；　　(4) $\frac{2x-1}{3}-4<-\frac{x+4}{2}$.

3. 求不等式 $2x-3\leqslant 5$ 的正整数解.

4. 当代数式 $\frac{x-4}{3}$ 的值小于代数式 $\frac{2x+1}{2}$ 的值时，求 x 的取值范围.

11.5 用一元一次不等式解决问题

议一议

按图 11－9 的搭法，用少于 50 根的火柴棒最多可以搭多少条“小鱼”？

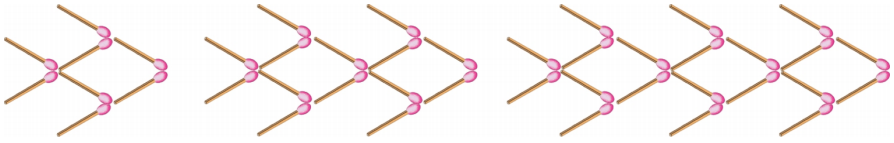
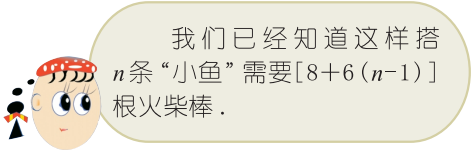
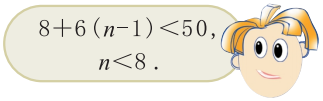


图 11－9





问题 1 一只纸箱质量为 1 kg，放入一些苹果后，纸箱和苹果的总质量不超过 10 kg. 假设每个苹果的质量为 0.25 kg，这只纸箱内最多能装多少个苹果？

解： 设这只纸箱内能装 x 个苹果．

根据题意，得

$$0.25x+1\leqslant 10.$$

解这个不等式，得

$$x\leqslant 36.$$

答： 这只纸箱内最多能装 36 个苹果．

问题 2 某种杜鹃花适宜生长在平均气温为 17℃到 20℃之间[注]的山区．已知某山区山脚下的平均气温为 20℃，并且每上升100 m，气温下降 0.6℃，要在该山区种植这种杜鹃花，应种在比山脚的海拔最多高多少米的山坡上？

[注]“17℃到 20℃之间”表示大于等于 17℃，且小于等于 20℃.

解： 设这种杜鹃花应种在比山脚的海拔高 x m 的山坡上，那么这个区域的平均气温是 $\left(20-\frac{x}{100}\times 0.6\right)$℃.

根据题意，得

$$20-\frac{x}{100}\times 0.6\geqslant 17.$$

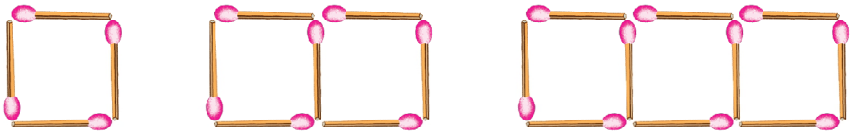
解这个不等式，得

$$x\leqslant 500.$$

答： 这种杜鹃花应种在比山脚的海拔最多高 500 m 的山坡上．

数学实验室

搭一搭，算一算：



（1）　（2）　（3）

图 11－10

如图 11－10，用 4 根火柴棒可以搭 1 个正方形，用 7 根火柴棒可以搭 2 个正方形，用 10 根火柴棒可以搭 3 个正方形，照此搭法，用少于 50 根的火柴棒最多可以搭多少个正方形？

练一练

1. 解答本节“数学实验室”中的问题．
2. 某工程队计划在 10 天内整修河堤 600 m. 施工 2 天修了 120 m 后，该工程需要比原计划提前 2 天完成，此后平均每天至少要整修河堤多少米？

问题 3　某人骑一辆变速自行车，如果行驶速度增加 4 km/h，那么 2 h 所行驶的路程不少于以原来速度 2.5 h 所行驶的路程．原来行驶的速度最大是多少？

解： 设原来行驶的速度是 x km/h.

根据题意，得

$$2(x+4)\geqslant 2.5x.$$

解这个不等式，得

$$x \leqslant 16.$$

答： 原来行驶的速度最大是 16 km/h.

问题 4 小明有 1 元和 5 角的硬币共 13 枚，这些硬币的总币值小于 8.5 元．问小明可能有几枚 1 元的硬币？

解： 设小明有 1 元的硬币 x 枚．

根据题意，得

$$x+0.5(13-x)<8.5.$$

解这个不等式，得

$$x<4.$$

因为 x 是自然数，所以 x 可取 0，1，2，3.

答： 小明可能有 1 元硬币 0 枚，1 枚，2 枚，3 枚．

练一练

1. 某工地要实施爆破，导火线的燃烧速度是 0.8 cm/s，引爆人在点燃导火线后要跑到 200 m 以外的安全区域．如果引爆人跑步的速度是 5 m/s，那么导火线的长度应大于多少？
2. 甲、乙两队进行足球对抗赛，比赛规则规定每队胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分．两队一共比赛了 10 场，甲队保持不败，得分超过 22 分．甲队至少胜了多少场？

11.5 习题

1. 一个 n 边形的内角和比它的外角和至少大 120°，n 的最小值是多少？
2. 某茶叶商店销售一批袋装茶叶，第一个月以 50 元/袋的价格售出 80 袋，第二个月以 40 元/袋的价格将这批茶叶全部售出，销售收入不超过 8 000 元．这批茶叶最多有多少袋？
3. 某校七年级 406 名师生外出春游，租用 44 座和 40 座的两种客车．如果 44 座的客车租用了 2 辆，那么 40 座的客车至少需租用多少辆？
4. 甲、乙两种糖果的价格分别为每千克 10 元和每千克 14 元，现将两种糖果共 20 千克混合，总价不超过 240 元，混合的糖果中甲种糖果最少多少千克？

11.6　一元一次不等式组

小丽早晨 7 时 30 分骑自行车上学，要在 7 时 50 分至 7 时 55 分之间到达离家 3 400 m 的学校，小丽骑自行车的速度应在什么范围内？

设小丽骑自行车的速度为 x m/min.

根据题意，得

$$20x \leqslant 3\,400,$$

且

$$25x \geqslant 3\,400.$$

这个问题的解必须使上面的两个不等式都成立，把它们联立在一起，可以记作

$$\begin{cases} 20x \leqslant 3\,400, \\ 25x \geqslant 3\,400. \end{cases}$$

像这样，把几个含有同一个未知数的一次不等式联立在一起，就组成了一个**一元一次不等式组**(system of linear inequalities with one unknown).

如何找出使

$$20x \leqslant 3\,400 \quad ①$$

与

$$25x \geqslant 3\,400 \quad ②$$

都成立的未知数 x 的值？

解不等式①，得

$$x \leqslant 170.$$

解不等式②，得

$$x \geqslant 136.$$

在数轴上表示这两个不等式的解集(图11-11)：

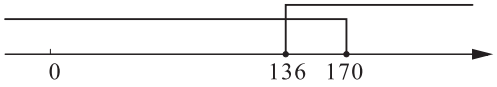


图 11－11

由图 11－11 可以看出，使不等式①和②都成立的未知数 x 的值，应是这两个不等式解集的公共部分，即

$$136 \leqslant x \leqslant 170.$$

所以，小丽骑自行车的速度应在 136 m/min 至 170 m/min 之间．

不等式组中所有不等式的解集的公共部分叫做这个**不等式组的解集**．例如，不等式组 $\begin{cases} 20x \leqslant 3\,400, \\ 25x \geqslant 3\,400 \end{cases}$ 的解集是 $136 \leqslant x \leqslant 170$．

求不等式组解集的过程叫做**解不等式组**．

例 1 利用数轴确定不等式组 $\begin{cases} x \leqslant -1, \\ x < 2 \end{cases}$ 的解集．

解： 在数轴上表示不等式 $x \leqslant -1$ 和 $x < 2$ 的解集(图 11－12)：

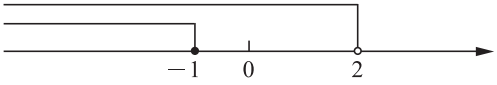


图 11－12

由图 11－12 可知，不等式组的解集是

$$x \leqslant -1.$$

1. 根据数轴上表示的不等式组中两个不等式的解集，写出不等式组的解集：

①　　②

(第 1 题)

2. 利用数轴确定下列不等式组的解集：

(1) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x > 1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x < -1, \\ x \geqslant -2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x > 0, \\ x \leqslant 4; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x + 2 < 0, \\ 2x \leqslant 0. \end{cases}$

例 2　解不等式组 $\begin{cases} 3x - 1 \geqslant x + 1, & ① \\ x + 4 < 4x - 2. & ② \end{cases}$

解： 解不等式①，得

$$x \geqslant 1.$$

解不等式②，得

$$x > 2.$$

在数轴上表示不等式①、②的解集(图11-13)：

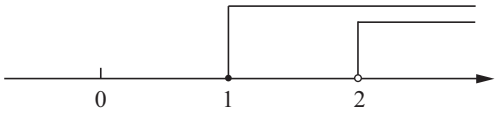


图 11 - 13

由图 11 - 13 可知，不等式组的解集是

$$x > 2.$$

议一议

解一元一次不等式组的一般步骤是什么？

例 3　解不等式组 $\begin{cases} 5x - 2 < 3(x - 2), & ① \\ \frac{1}{2}x - 5 \geqslant 1 - \frac{3}{2}x. & ② \end{cases}$

解： 解不等式①，得

$$x < -2.$$

解不等式②，得

$$x \geqslant 3.$$

在数轴上表示不等式①、②的解集(图11-14)：

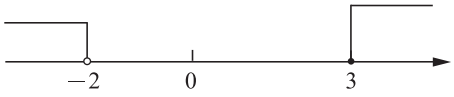


图 11－14

由图 11－14 可知，不等式①、②的解集没有公共部分，不等式组无解.

试一试

当代数式 $2x-1$ 的值大于 -3 且小于 1 时，求 x 的取值范围.

练一练

1. 解下列不等式组：

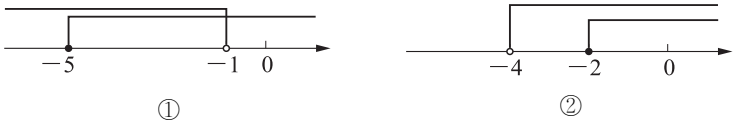
(1) $\begin{cases} 2x+1<0, \\ 3-x \geqslant 0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} -2x \leqslant 0, \\ 4x+1<5; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2(x+1)>4, \\ 3x \leqslant x+5; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-2(x-1) \geqslant 1, \\ \dfrac{1+x}{3}<x-1. \end{cases}$

2. 已知二元一次方程 $x+2y=-5$. 当 x 取什么值时，y 的值是大于 -1 的负数？

11.6 习题

1. 根据数轴上表示的不等式组中两个不等式的解集，写出不等式组的解集：



(第 1 题)

2. 利用数轴确定下列不等式组的解集：

(1) $\begin{cases} x<0, \\ x\geqslant -1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x\geqslant -2, \\ x>-1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x\leqslant 3, \\ x<2; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x>2, \\ 2x+5\leqslant 1. \end{cases}$

3. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x+4>3, \\ 3x<7+x; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5x-10\leqslant 0, \\ x+3>-2x; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-1>-3, \\ 4-2x<x-2; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-1>2x, \\ \frac{1}{2}x+3<-1. \end{cases}$

4. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 3x-2<x+2, \\ 5x+5\geqslant 2x-7; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x-3<9-x, \\ 2x-5>10-3x; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-8>5x+1, \\ 11-2x<21-4x; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \frac{2}{5}(3-x)+2<-2, \\ -\frac{2}{3}(x+5)-1<3. \end{cases}$

5. 在△ABC 中，$AB=AC$，$BC=10$ cm. 设这个三角形的周长大于 34 cm 且小于 44 cm，求 AB 的长度范围．

6. 已知一个钝角为 $(5x-35)^\circ$，求 x 的取值范围．

阅读

利用不等式进行估算

某房地产开发商用 2 600 万元购买了一块地用于建造居民住宅楼．如果住宅楼每平方米的造价约为 1 400 元，那么建筑面积必须超过多少平方米才能将建楼成本控制在每平方米 4 000 元以下？

设建筑面积是 x m^2.

根据题意得

$$1\,400x+26\,000\,000<4\,000x.$$

解这个不等式，得

$$x > 10\,000.$$

所以建筑面积必须超过 10 000 m^2 才能将建楼成本控制在每平方米 4 000 元以下．

在日常生活和生产实践中，我们常常利用不等式(组)进行估算．如核定价格范围、投资决策、工程预算以及生活中的支出比较等．

数学活动

一元一次不等式问题的调查

进行一次有关一元一次不等式问题的调查．

1. 可以采访周围熟悉的有关人员，也可以去工厂、农村、商店、农贸市场、银行、邮局等，观察和收集日常生活、生产实践中你所需要的一些数据和数量关系．

2. 参照本章 11.5 节中提出问题、解决问题的全过程，根据你调查、收集的材料，发现和提出一个可以用一元一次不等式解决的实际问题，然后解这个不等式，并对解的实际意义做出解释．

3. 课堂交流，汇报活动过程、感受和成果．

4. 对课堂交流的内容发表你的看法．

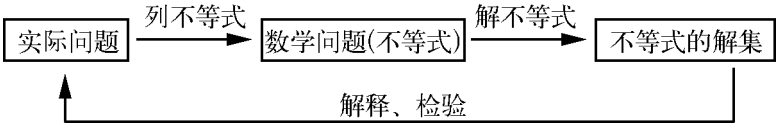
小结与思考

1. 解一元一次不等式就是要把它转化为 $x > a$ $(x \geqslant a)$ 或 $x < a$ $(x \leqslant a)$ 的形式．解一元一次不等式的一般步骤是什么?把它与解一元一次方程的步骤进行比较,它们有什么相同点和不同点?

2. 解一元一次不等式组的一般步骤是：先求出不等式组中各个不等式的解集，再把它们分别表示在数轴上，然后利用数轴确定不等式组的解集．

本章求解的不等式组中都只含有两个不等式．如果一个不等式组中含有两个以上的不等式，我们同样可以先求出各个不等式的解集，并利用数轴确定这个不等式组的解集．你能解一元一次不等式组 $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ x < 3, \\ x > -2 \end{cases}$ 吗?

3. 生活中处处都有数量之间的不等关系．用不等式解决实际问题，一般要经历以下过程：



用一元一次不等式解决实际问题时，要恰当地选择未知数，通过分析把实际问题抽象成一元一次不等式，解这个不等式并对解的结果进行解释和检验．

4. 一个不等式常常可以有不同的实际意义．例如，不等式 $3x+4\leqslant 21$ 的实际意义可以是：小明准备用 21 元买笔和笔记本．已知笔每支 3 元，笔记本每本 4 元，如果小明买了 1 本笔记本，那么他最多还可以买几支笔？

你能给出这个不等式不同的实际意义吗？

复习题　复习巩固

1. 解下列不等式：

(1) $8x-5\geqslant x+16$；　　(2) $6x+1\leqslant 2x-3$；

(3) $3(x-3)<x-15$；　　(4) $\dfrac{x-1}{2}<\dfrac{7x+2}{5}$；

(5) $2(x+3)-4x>-(x-3)$；

(6) $\dfrac{1}{2}(2-x)>\dfrac{1}{4}(3-x)+\dfrac{1}{4}$.

2. 求下列不等式的最大整数解：

(1) $-\dfrac{1}{3}(x-7)\geqslant\dfrac{1}{2}(3x+1)$；　　(2) $3x-\dfrac{10}{3}<-4(x-5)$.

3. 求下列不等式的最小整数解：

(1) $5x-2\geqslant\dfrac{2}{3}(5x-13)$；　　(2) $\dfrac{x-3}{4}<6-\dfrac{3-4x}{2}$.

4. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}2x+4>0,\\1-2x>0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3x-6<4-x,\\x-1>4x-10;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2(x-3)\leqslant 3(1-x)+1,\\3x-5(x-1)>2(3-2x);\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\dfrac{2x-1}{3}>\dfrac{3x-5}{4},\\\dfrac{x+2}{4}-\dfrac{x}{5}>1.\end{cases}$

5. 求不等式 $4x-2>2(x+1)$ 与 $x-3<5-x$ 的解集的公共部分．

6. 某商店以每件 80 元的价格购进衬衫 50 件，现以每件 95 元的价格销售，这家商店至少销售多少件衬衫，销售收入才能超过进货总金额？

7. 某商品的成本为 2 000 元，标价为 2 800 元，如果商店要以利润不低于 5%的价格销售，那么最低可以打几折出售这些商品？

8. 某车工计划在 15 天内至少加工零件 408 个，前 3 天每天加工零件 24 个．此后，该车工平均每天至少需要加工零件多少个，才能在规定的时间内完成任务？

灵活运用

9. 已知 $4x+y=1$，且 $-1<x\leqslant 2$，求 y 的取值范围．

10. 已知方程 $x-(2x-a)=2$ 的解是正数，求 a 的取值范围．

11. 已知 $2-a$ 和 $3-2a$ 的值的符号相反，求 a 的取值范围．

12. 一个三角形的 3 边长分别是 x cm、$(x+1)$ cm、$(x+2)$ cm，它的周长不超过 39 cm. 求 x 的取值范围．

探索研究

13. 用等号或不等号填空：

(1) 比较 $2x$ 与 x^2+1 的大小：

① 当 $x=2$ 时，$2x$ _____ x^2+1，

② 当 $x=1$ 时，$2x$ _____ x^2+1，

③ 当 $x=-1$ 时，$2x$ _____ x^2+1；

(2) 任意取几个 x 的值，计算并比较 $2x$ 与 x^2+1 的大小；

(3) 无论 x 取什么值，$2x$ 与 x^2+1 总有这样的大小关系吗？试说明理由.

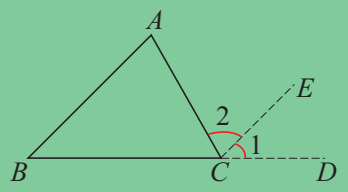
14. 已知不等式组 $\begin{cases} x>1, \\ x<a. \end{cases}$

(1) 如果这个不等式组无解，求 a 的取值范围；

(2) 如果这个不等式组有解，求 a 的取值范围．

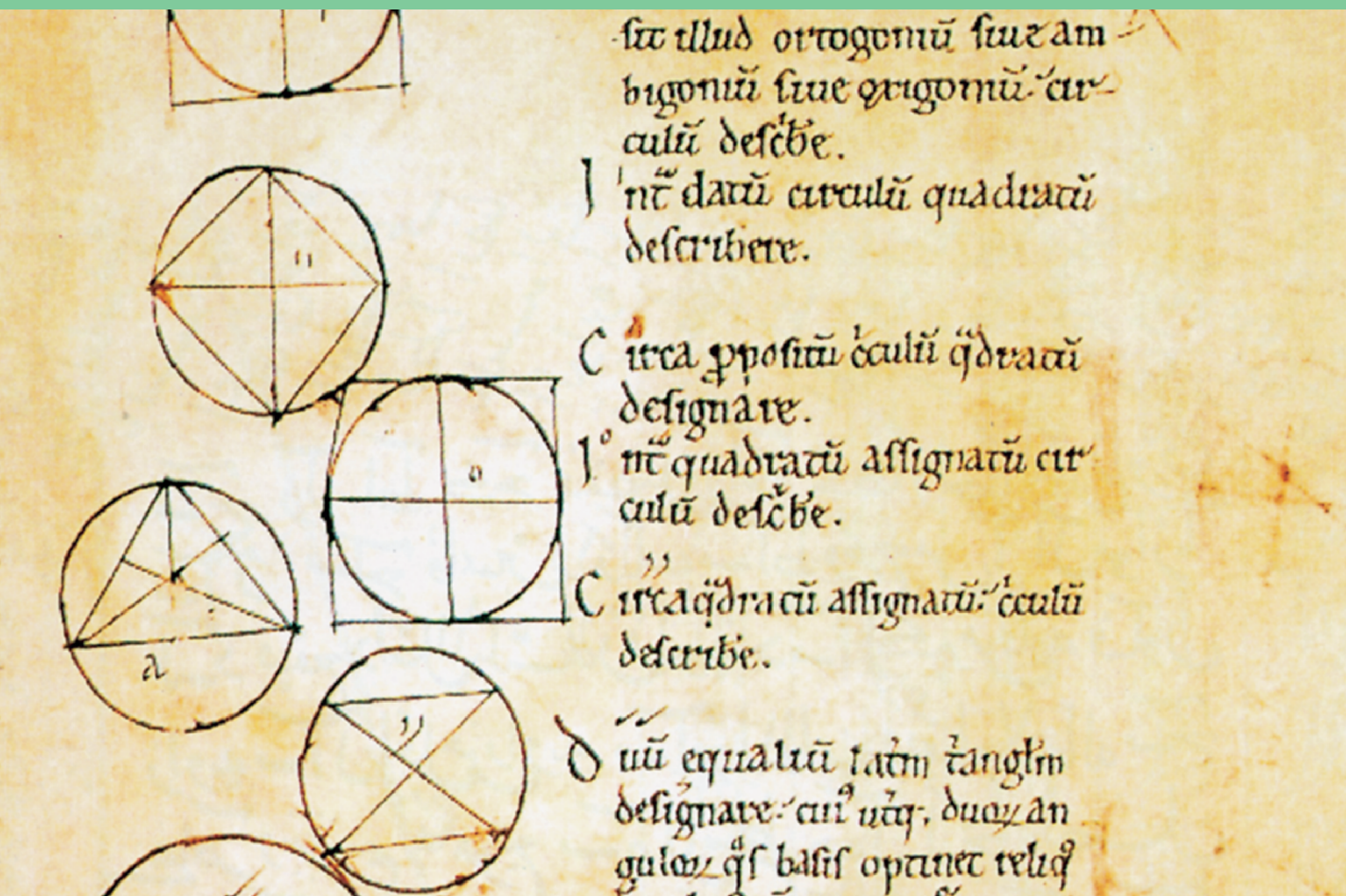
15. 构造一个一元一次不等式组，使它的解集是 $-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{2}{3}$.

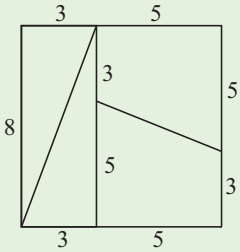
第12章　证　明



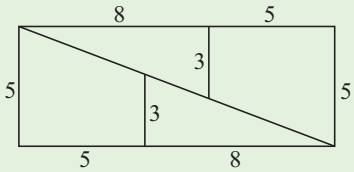
$\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$

探索中，发现结论，丰富对事物的认识；
证明中，证实结论，学会有条理地思考．





(1)

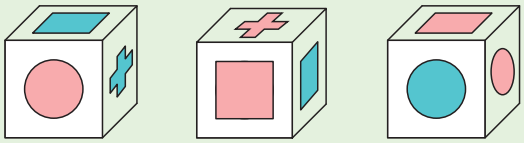


(2)

图(1)是面积为 64 的正方形纸片，把它剪成 4 块，按图(2)所示重新拼合．

这 4 块纸片恰好能拼成一个长为 13、宽为 5 的长方形吗？

用三种不同的方法摆放同一个正方体（如图），你能说出这个正方体相对两面上的图案和颜色吗？



本章中，学习定义、命题、定理，以及逆命题、互逆命题等概念，并且从基本事实出发证明有关图形的一些结论．

12.1　定义与命题

人们在说理的时候，常常使用一些名称或术语．

对名称或术语的含义进行描述或做出规定，就是给出它们的**定义**（definition）．

例如：

“在同一平面内，不相交的两条直线”是“平行线”的定义．

“数轴上表示一个数的点与原点的距离”是“一个数的绝对值”的定义．

“能使方程两边的值相等的未知数的值”是“方程的解”的定义．

我们还经常要判断事物的对与错、是与非、可能与不可能等．

判断一件事情的句子叫做**命题**（proposition）．

例如，下面的句子都是命题：

如果 O 是线段 AB 的中点，那么 $AO = BO$.

等角的余角相等．

无论 x 是什么实数，代数式 $(x-1)^2$ 的值都不是负数．

三角形中最大的内角是直角．

还有一些句子，例如：

同位角相等吗？

过一点画已知直线的垂线．

像这样的句子，它们没有对某一件事情做出判断，就不是命题．

在数学中，命题一般都由条件和结论两部分组成．例如：

命 题	条 件	结 论
如果 $a>0$，$b<0$，那么 $\lvert a\rvert=\lvert b\rvert$	$a>0$，$b<0$	$\lvert a\rvert=\lvert b\rvert$
同位角相等，两直线平行	同位角相等	两直线平行
对顶角相等	两个角是对顶角	这两个角相等

议一议

1. 下列各命题的条件是什么？结论是什么？

(1) 如果 a、b 两数的积为 0，那么 a、b 两数都为 0；

(2) 如果两个角互为补角，那么这两个角的和是 180°；

(3) 两直线平行，同旁内角互补；

(4) 两条直线相交，只有一个交点；

(5) 有公共顶点的两个角是对顶角．

2. 上面 5 个命题做出的判断正确吗？

上面的命题(2)、(3)、(4)都是正确的，就是说，如果条件成立，那么结论成立．像这样的命题叫做**真命题**(true proposition).

还有一些命题，如上面的命题(1)、(5)，这些命题的条件成立时，不能保证结论总是正确的，也就是说结论不成立．像这样的命题叫做**假命题**(false proposition).

练一练

1. 下列各命题的条件是什么？结论是什么？

(1) 如果 $a<0$，$b<0$，那么 $a+b<0$；

(2) 如果 $n<1$，那么 $n^2-1<0$；

(3) 同角的补角相等；

(4) 直角都相等．

2. 在第 1 题的命题中，哪些是真命题？哪些是假命题？

12.1 习题

1. 下列句子是不是命题？
   (1) 延长线段 AB 到点 C；
   (2) 两点之间线段最短；
   (3) $\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 不相等；
   (4) 2 月份有 4 个星期日；
   (5) 用量角器画 $\angle AOB = 90^\circ$；
   (6) 任何数的平方都不小于 0 吗？
2. 下列命题的条件是什么？结论是什么？
   (1) 如果 $a = c$，$b = c$，那么 $a = b$；
   (2) 如果 $a < -1$，那么 $ab < -b$；
   (3) 两直线平行，内错角相等；
   (4) 平方后等于 4 的数是 2；
   (5) 垂直于同一条直线的两条直线平行．
3. 第 2 题的命题中，哪些是真命题？哪些是假命题？

12.2 证 明

观察、操作、实验是人们认识事物的重要手段．通过观察、操作、实验，常常可以探索发现一些结论，但是这些结论不一定都正确．

数学中，探索发现的结论常常需要加以证实．

试一试

在图 12－1 中，两条线段 AB 与 CD 哪一条长一些？

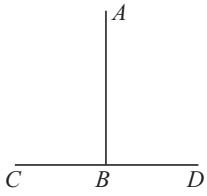
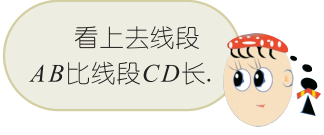


图 12－1



通过度量线段 AB、CD 的长度，可以证实：线段 CD 比线段 AB 长.

议一议

把图 12－2(1)长方形草坪中间 1 m 宽的直道，改成图 12－2(2)中处处 1 m 宽的“曲径”．

这两条小道的面积相等吗？

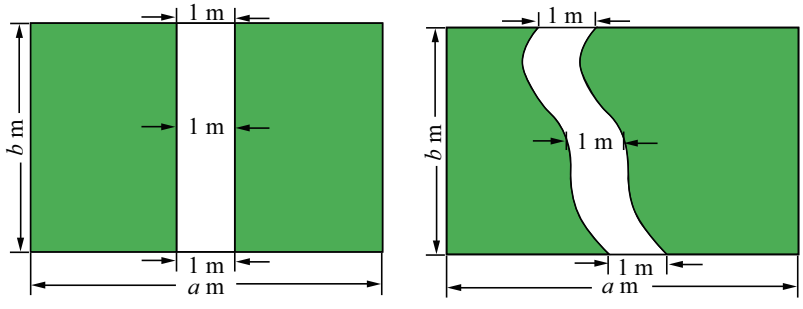


图 12－2

如果将图 12－2(2)中小道左边的草坪向右平移 1 m，那么得到一个长为 $(a-1)$ m、宽为 b m 的长方形(如图 12－3)，它的面积为 $b(a-1)$ m^2.

于是，“曲径”的面积为 $ab-b(a-1)=ab-ab+b=b(m^2)$.

由图 12－2(1) 可知直道的面积为 $1\times b=b(m^2)$.

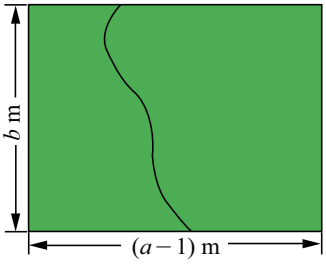


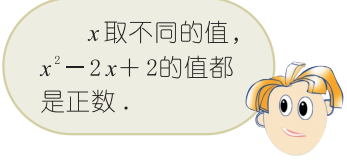
图 12－3

通过图形的平移和计算，可以证实：两条小道的面积相等.

做一做

1. 当 $x=-5$、$-\frac{1}{2}$、0、2、3 时，分别计算代数式 x^2-2x+2 的值.

2. 换几个数再试试，你发现了什么？



因为 $x^2-2x+2=(x^2-2x+1)+1=(x-1)^2+1$，$(x-1)^2\geqslant 0$，所以 $(x-1)^2+1\geqslant 1$.

通过把 x^2-2x+2 变形为 $(x-1)^2+1$，可以证实：无论 x 取什么值，代数式 x^2-2x+2 的值都不小于 1.

数学实验室

1. 图 12－4(1)是一张 8×8 的正方形纸片，把它剪成 4 块，按图 12－4(2) 重新拼合.

这 4 块纸片恰好能拼成一个长为 13、宽为 5 的长方形吗？

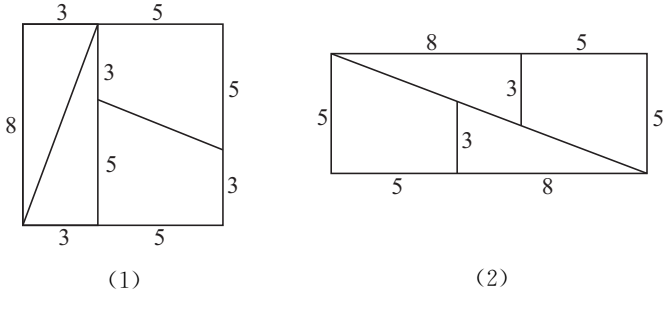


图 12－4

2. 画 $\angle AOB = 90°$，并画 $\angle AOB$ 的平分线 OC.

(1) 把三角尺的直角顶点落在 OC 的任意一点 P 上，并使三角尺的两条直角边分别与 OA、OB 垂直，垂足分别为 E、F（如图 12－5（1）). 度量 PE、PF 的长度，这两条线段相等吗？

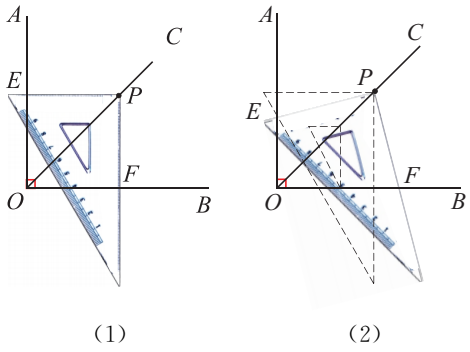


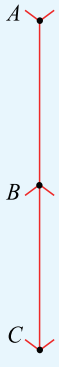
图 12－5

(2) 把三角尺绕点 P 旋转，三角尺的两条直角边分别交 OA、OB 于点 E、F(如图 12－5(2))，PE 与 PF 相等吗？

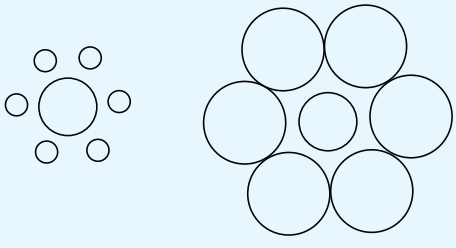
在后续的学习中，可以证实：图 12－4(2)不是长方形；图 12－5 中 PE 与 PF 相等.

练一练

1. 图中线段 AB 与线段 BC 的长度相等吗？请你先观察，再度量.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 图中两组圆的中央各有一个圆，这两个圆一样大吗？请你先观察，再度量.

3. (1) 任意写 2 个相邻偶数，计算较大偶数的平方减去较小偶数的平方的差；

(2) 换 2 个相邻偶数，仿照(1)再试试，你发现了什么？

(3) 证实你发现的结论.

2 000 多年前，古希腊数学家欧几里得(Euclid)对前人在数学上的成果进行了系统整理，把人们公认的一些真命题作为公理，并以此为出发点，用推理的方法证实了一系列命题，编纂成了人类文明史上具有里程碑意义的数学巨著——《原本》.

前面，我们曾把一些真命题作为基本事实，并从基本事实出发证实了有关余角、补角、对顶角、平行线的一些结论 .

根据已知的真命题，确定某个命题真实性的过程叫做**证明**(proof). 经过证明的真命题称为**定理**(theorem).

下面，我们从基本事实出发，证明“垂直于同一条直线的两条直线平行”.

已知：如图 12－6，$a \perp c$，$b \perp c$.

求证：$a \parallel b$.

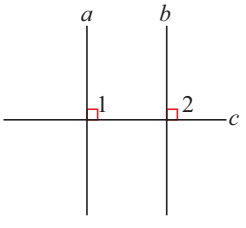


图 12－6

证明： ∵ $a \perp c$(已知)，

∴ $\angle 1 = 90°$(垂直的定义).

∵ $b \perp c$(已知)，

∴ $\angle 2 = 90°$(垂直的定义).

∵ $\angle 1 = 90°$，$\angle 2 = 90°$(已证)，

∴ $\angle 1 = \angle 2$(等量代换)[注].

∵ $\angle 1 = \angle 2$(已证)，

∴ $a \parallel b$(同位角相等，两直线平行).

证明过程必须做到言必有据. 证明过程通常包含几个推理，每个推理应包括因、果和由因得果的依据 . 其中，“因”是已知事项；“果”是推得的结论；“由因得果的依据”是基本事实、定义、已学过的定理以及等式性质、不等式性质等 .

[注] 一个量用与它相等的量代替叫“等量代换”.

为了使证明过程表达得更加简明，像上面证明过程中虚线方框内所写的内容(前面推理所得的“果”作为后面推理的“因”)，通常可以省略不写．

证明与图形有关的命题，一般有以下步骤：

(1) 根据题意，画出图形；

(2) 根据命题的条件、结论，结合图形，写出已知、求证；

(3) 写出证明过程．

例 1 已知：如图 12－7，直线 EF 分别交直线 AB、CD 于点 M、N，$AB \parallel CD$，MG 平分 $\angle EMB$，NH 平分 $\angle END$.

求证：$MG \parallel NH$.

证明： ∵ $AB \parallel CD$(已知)，

∴ $\angle EMB = \angle END$(两直线平行，同位角相等)．

∵ MG 平分 $\angle EMB$，NH 平分 $\angle END$(已知)，

∴ $\angle EMG = \frac{1}{2}\angle EMB$，$\angle ENH = \frac{1}{2}\angle END$(角平分线的定义)．

∴ $\angle EMG = \angle ENH$(等量代换)．

∴ $MG \parallel NH$(同位角相等，两直线平行)．

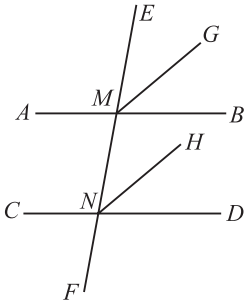


图 12－7

练一练

填写下列推理中的空格(第 1、2 题)：

1. 如图，点 A、B、E 在一条直线上．

(1) ∵ $\angle 1 = \angle 3$(已知)，

∴ $AB \parallel DC$(_____)；

(2) ∵ $\angle DAE = \angle CBE$(已知)，

∴ $AD \parallel BC$(_____)；

(3) ∵ $\angle CDA + \angle DAB = 180°$(已知)，

∴ $AB \parallel DC$(_____)；

(4) ∵ $\angle 2 = \angle 4$(已知)，

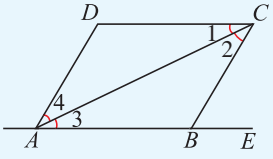
∴ _____ $\parallel$ _____ (内错角相等，两直线平行)；

(5) ∵ $\angle DCB + \angle ABC = 180°$(已知),

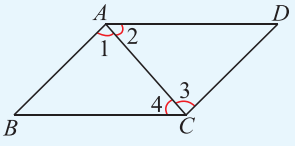
∴ _____ // _____ (同旁内角互补，两直线平行);

(6) ∵ $\angle DAB + \angle ABC = 180°$(已知),

∴ _____ // _____ (同旁内角互补，两直线平行).



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 已知：如图，$\angle BAD = \angle DCB$，$\angle 1 = \angle 3$.

求证：$AD \parallel BC$.

证明：∵ $\angle BAD = \angle DCB$，$\angle 1 = \angle 3$(_____),

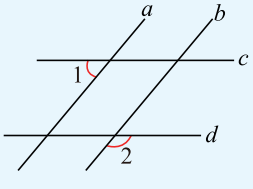
∴ $\angle BAD - \angle$ ____ $= \angle DCB - \angle$ ____ (等式性质),

即　　$\angle$ _____ $= \angle$ _____.

∴ $AD \parallel BC$(_____).

3. 已知：如图，$a \parallel b$，$c \parallel d$，$\angle 1 = 50°$.

求证：$\angle 2 = 130°$.



(第 3 题)

现在，我们来证明：

三角形内角和定理　三角形三个内角的和等于 180°.

已知：$\triangle ABC$.

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

证明： 如图 12－8，画$\triangle ABC$ 的边 BC 的延长线 CD，过点 C 画 $CE \parallel AB$[注].

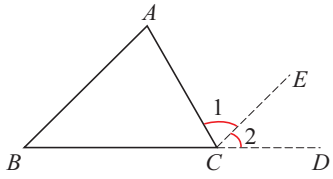
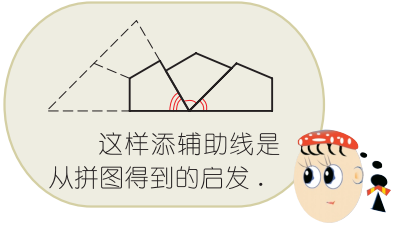


图 12－8



∵ $CE \parallel AB$（辅助线画法），

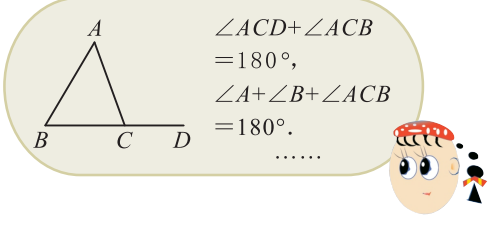
∴ $\angle 1=\angle A$（两直线平行，内错角相等），

$\angle 2=\angle B$（两直线平行，同位角相等）.

∵ $\angle 1+\angle 2+\angle ACB=180°$（平角的定义），

∴ $\angle A+\angle B+\angle ACB=180°$（等量代换）.

三角形的一个外角和与它不相邻的两个内角有怎样的数量关系？



由三角形内角和定理，可以推出：

三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和．

像这样，由一个定理直接推出的正确结论，叫做这个定理的推论．它和定理一样，可以作为进一步证明的依据．

[注] 为了证明的需要，在原来图形上添画的线叫辅助线，辅助线通常画成虚线．

例 2　已知：如图 12－9，AC、BD 相交于点 O.

求证：$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$.

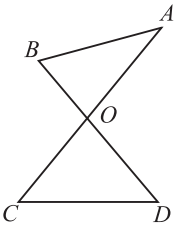


图 12－9

证明： 在 $\triangle AOB$ 中，$\angle A+\angle B+\angle AOB=180^\circ$（三角形三个内角的和等于 180°）.

$\therefore \angle A+\angle B=180^\circ-\angle AOB$（等式性质）.

在$\triangle COD$ 中，同理可得

$\angle C+\angle D=180^\circ-\angle COD$.

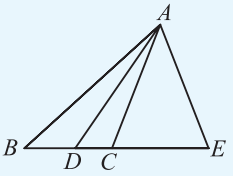
$\because \angle AOB=\angle COD$（对顶角相等），

$\therefore \angle A+\angle B=\angle C+\angle D$（等量代换）.

练一练

已知：如图，AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，E 是 BC 延长线上一点，$\angle EAC=\angle B$.

求证：$\angle ADE=\angle DAE$.



12.2 习题

1. (1) 任意写 3 个连续自然数，把中间 1 个数的平方减去其余 2 个数的乘积，计算所得的差；

   (2) 换 3 个连续自然数，仿照(1)再试试，你发现了什么？

   (3) 证实你发现的结论.

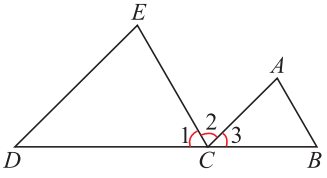
2. 小明从甲地出发，以 5 km/h 的速度步行到乙地，然后骑自行车沿原路返回．如果骑自行车的速度是步行速度的 3 倍，那么往返全程的平均速度是不是步行速度的 2 倍？请做出判断，并证实你的结论.

3. 填写下列空格：

   如图，点 D、C、B 在一条直线上.

   (1) $\because \angle$ ____ $=\angle$ ____（已知），

   $\therefore AC \parallel ED$（内错角相等，两直线平行）；



（第 3 题）

(2) ∵ ∠ _____ = ∠ _____(已知),

∴ $AB \parallel EC$(同位角相等,两直线平行);

(3) ∵ _____ ∥ _____ (已知),

∴ ∠3 = ∠D(两直线平行,同位角相等);

(4) ∵ _____ ∥ _____ (已知),

∴ ∠B + ∠BCE = 180°(两直线平行,同旁内角互补);

(5) ∵ ∠ _____ = ∠ _____(已知),

∴ $AB \parallel EC$(_____);

(6) ∵ $AC \parallel ED$(已知),

∴ ∠ _____ + ∠ _____ = 180°(两直线平行,同旁内角互补).

4. 填写下列空格:

已知:如图,点 E 在 AB 上,且 CE 平分∠ACD,∠1 = ∠2.

求证:$AB \parallel CD$.

证明:∵ CE 平分∠ACD (　　),

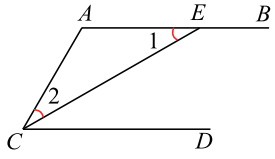
∴ ∠ _____ = ∠ _____

(_____).

∵ ∠1 = ∠2(已知),

∴ ∠1 = ∠ _____ (_____).

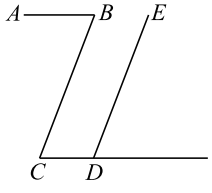
∴ $AB \parallel CD$(_____).



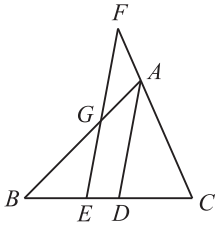
(第 4 题)

5. 已知:如图,$AB \parallel CD$,$BC \parallel DE$.

求证:∠B + ∠CDE = 180°.



(第 5 题)



(第 6 题)

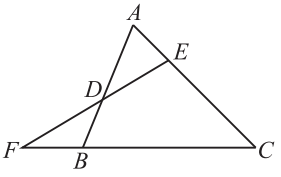
6. 已知:如图,AD 是△ABC 的角平分线,点 E 在 BC 上,点 F 在 CA 的延长线上,$EF \parallel AD$,EF 交 AB 于点 G.

求证:∠AGF = ∠F.

7. 证明：两条平行线被第三条直线所截，同旁内角的平分线互相垂直．

8. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\angle ABC$，直线 EF 分别交 AB、AC 和 CB 的延长线于点 D、E、F．

求证：$\angle F+\angle FEC=2\angle A$．



（第 8 题）

12.3 互逆命题

这两个命题有什么联系和区别？

在两个命题中，如果第一个命题的条件是第二个命题的结论，而第一个命题的结论又是第二个命题的条件，那么这两个命题叫做**互逆命题**．其中一个命题是另一个命题的**逆命题**(converse proposition)．

把一个命题的条件和结论互换就得到它的逆命题，所以每个命题都有逆命题．

1．下列各组命题是否为互逆命题？

(1) 正方形的 4 个角都是直角．

4 个角都是直角的四边形是正方形．

(2) 等于同一个角的两个角相等．

如果两个角都等于同一个角，那么这两个角相等．

(3) 对顶角相等．

如果两个角相等，那么这两个角是对顶角．

(4) 同位角相等，两直线平行．

同位角不相等，两直线不平行．

2．说出下列命题的逆命题，并与同学交流．

(1) 如果 $a^2 = b^2$，那么 $a = b$；

(2) 如果两个角是对顶角，那么它们的平分线组成一个平角；

(3) 末位数字是 5 的数，能被 5 整除；

(4) 锐角与钝角互为补角．

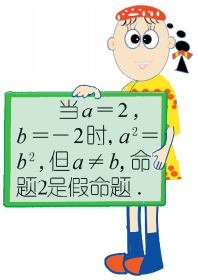
3．举出几组互逆命题．

议一议

下列命题是真命题，还是假命题?

命题 1：锐角与钝角互为补角．

命题 2：如果 $a^2=b^2$，那么 $a=b$．



像小明、小丽那样，举出一个符合命题的条件，但命题结论不成立的例子来说明命题是假命题，这样的例子称为反例．

数学中，判断一个命题是假命题，只需举出一个反例．

想一想

如果一个命题是真命题，那么它的逆命题一定是真命题吗?举例说明．

练一练

举反例说明下列命题是假命题：

(1) 如果 $|a|=|b|$，那么 $a=b$；

(2) 任何数的平方大于 0；

(3) 两个锐角的和是钝角；

(4) 如果一点到线段两端的距离相等，那么这点是这条线段的中点．

读一读

著名的反例

公元 1640 年，法国著名数学家费马发现：

$$2^{2^0}+1=3,$$
$$2^{2^1}+1=5,$$
$$2^{2^2}+1=17,$$
$$2^{2^3}+1=257,$$
$$2^{2^4}+1=65\,537.$$

而 3、5、17、257、65 537 都是质数，于是费马猜想：对于一切自然数 n，$2^{2^n}+1$ 都是质数．可是，到了 1732 年，数学家欧拉发现：

$$2^{2^5}+1=2^{32}+1=4\,294\,967\,297=641\times 6\,700\,417.$$

这说明了 $2^{2^5}+1$ 是一个合数，从而否定了费马的猜想．

议一议

在你已经学过的命题中，试举出两个命题：它们不仅是互逆命题，而且都是真命题.

像“同位角相等，两直线平行”与“两直线平行，同位角相等”……这样的两个命题是互逆命题，且都是真命题. 根据命题“同位角相等，两直线平行”，可以判断两条直线互相平行；反过来，根据命题“两直线平行，同位角相等”，可以推出两条平行直线具有“同位角相等”的性质.

例 1 证明：**平行于同一条直线的两条直线平行.**

已知：如图 12－10，$b \parallel a$，$c \parallel a$.

求证：$b \parallel c$.

证明： 作直线 d，使它与直线 a、b、c 都相交.

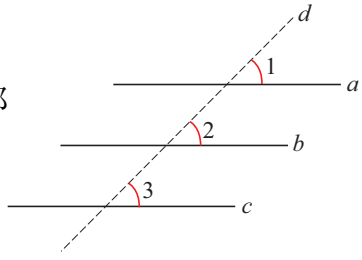


图 12－10

∵ $b \parallel a$（已知），

∴ $\angle 2 = \angle 1$（两直线平行，同位角相等）.

∵ $c \parallel a$（已知），

∴ $\angle 3 = \angle 1$（两直线平行，同位角相等）.

∴ $\angle 2 = \angle 3$（等量代换）.

∴ $b \parallel c$（同位角相等，两直线平行）.

例 2 证明：**直角三角形的两个锐角互余.**

已知：在$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$.

求证：$\angle A + \angle B = 90°$.

证明： 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$（三角形三个内角的和等于 180°）.

∴ $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$（等式性质）.

∵ $\angle C = 90°$（已知），

∴ $\angle A + \angle B = 180° - 90°$（等量代换），

即 $\angle A + \angle B = 90°$.

试一试

说出命题“直角三角形的两个锐角互余”的逆命题.

这个逆命题是真命题吗？为什么？

“直角三角形的两个锐角互余”的逆命题是**“有两个角互余的三角形是直角三角形”**，可以证明这个逆命题是真命题.

已知：在△ABC 中，$\angle A+\angle B=90^\circ$，

求证：△ABC 是直角三角形，

证明：在△ABC 中，$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$（三角形三个内角的和等于 180°）.

∴ $\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)$（等式性质）.

∵ $\angle A+\angle B=90^\circ$（已知），

∴ $\angle C=180^\circ-90^\circ$（等量代换），

∴ $\angle C=90^\circ$，△ABC 是直角三角形.

练一练

1. (1) 如图，$AB \parallel CD$，AB、DE 相交于点 G，$\angle B=\angle D$. 在下列括号内填写推理的依据：

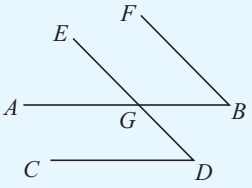
∵ $AB \parallel CD$（已知），

∴ $\angle EGA=\angle D$（_____）.

又∵ $\angle B=\angle D$（已知），

∴ $\angle EGA=\angle B$（_____）.

∴ $DE \parallel BF$（_____）.

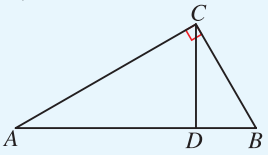


（第 1 题）

(2) 上述推理中，应用了哪两个互逆的真命题？

2. (1) 已知：如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，D 是 AB 上一点，且 $\angle ACD=\angle B$.

求证：$CD \perp AB$.



（第 2 题）

(2) 你在(1)的证明过程中应用了哪两个互逆的真命题？

12.3 习题

1. 写出下列命题的逆命题，并判断每对互逆命题的真假：

(1) 如果 $ab=0$，那么 $a=0$；

(2) 自然数是整数；

(3) 不是对顶角的两个角不相等；

(4) 内错角相等；

(5) 互为相反数的两个数的和为零．

2. 举反例说明下列命题是假命题：

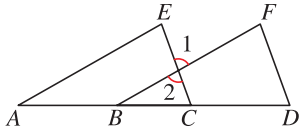
(1) 如果 $a\neq0$、$b\neq0$，那么 $a^2+b^2=(a+b)^2$；

(2) 质数都是奇数；

(3) 多边形的外角和小于内角和；

(4) 如果 $a>b$，那么 $(a+b)(a-b)>0$.

3. (1) 如图，点 A、B、C、D 在一条直线上，填写下列空格：



（第 3 题）

∵ $EC \parallel FD$（已知），

∴ $\angle F=\angle$ _____（_____）.

∵ $\angle F=\angle E$（已知），

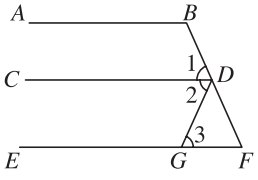
∴ $\angle$ _____ $=\angle E$（_____）.

∴ _____ $\parallel$ _____（_____）.

(2) 说出(1)的推理中应用了哪两个互逆的真命题.

4. (1) 已知：如图，直线 AB、CD、EF 被直线 BF 所截，$\angle B+\angle1=180^\circ$，$\angle2=\angle3$. 求证：$\angle B+\angle F=180^\circ$.

(2) 你在(1)的证明过程中应用了哪两个互逆的真命题.



（第 4 题）

阅读

欧几里得与《原本》

欧几里得(Euclid 公元前 330 年～前 275 年)是古希腊一位杰出的数学家，也是一位教育家．公元前 300 年左右应埃及托勒密王的邀请，他从雅典来到亚历山大，从事数学研究和教育活动．

欧几里得一生写过很多数学、物理方面的书籍，其中《原本》是最有影响的巨著．在《原本》中，欧几里得挑选了人们在长期实践中总结出来的公认的一些真命题作为公理，并从公理出发证明了人们探索得到的许多数学结论的正确性，从而把前人在数学上的成果整理得条理清晰、结构严谨．

《原本》的手稿早已失传，现存的《原本》是公元 4 世纪末西翁(Theom 古希腊学者)的修订本和 18 世纪在梵蒂冈图书馆发现的希腊文手抄本．我国的最早译本是 1607 年由意大利人利玛窦与明代数学家徐光启合译的《原本》前 6 卷和 1857 年由英国人伟烈亚力与清代数学家李善兰合译的《原本》后 9 卷，定名为《几何原本》．

2 000 多年来，人们高度评价《原本》，至今这部著作已出版了2 000 多个版本．欧几里得被后人誉为“几何学之父”．牛顿曾仿效欧几里得的思想把前人总结的力学知识和自己研究的成果，编纂了《自然哲学的数学原理》．

欧几里得的思想早已运用到现代社会的各个领域，《原本》对于科学的发展以及人们的思维方式都产生了深刻的影响．

数学活动

由已知探索未知

从已知的事实出发，我们常常可以探索发现一些结论，通过证明可以确认这些结论是否正确．

请你探索以下 4 个问题的结果，并加以证明．

1. 把 6、7、9、13、17、21、23、24、27 和 28，分别填入图 12－11 中的 5×5 方格，使这个方格每条对角线上各数的和与每行或每列数的和相等．

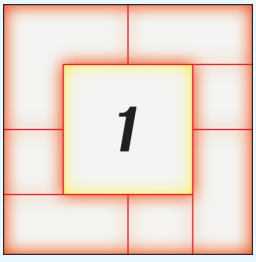
2. 下面算式中字母 A、B、C 各表示一个不同的数字，请你确定它们的值．

20			8	14
	19	25	26	
	12	18		30
29	10	11		
22			15	16

图 12－11

$$\begin{array}{r} A\ B\ C \\ \times \qquad 6 \\ \hline C\ C\ C \end{array}$$

3. 如图 12－12，8 张同样大小的正方形纸片交错叠放在桌面上，如果最上面的那张纸片的标号为 1，那么请按自上而下的顺序写出每张纸片的标号．



甲	乙	丙

图 12－12

4. 甲、乙、丙 3 人从图书馆各借了一本书，他们相约在每个星期天相互交换读完的书．经过数次交换后，他们都读完了这 3 本书．已知乙读的第三本书是丙读的第二本书，试说出他们交换阅读的全过程．

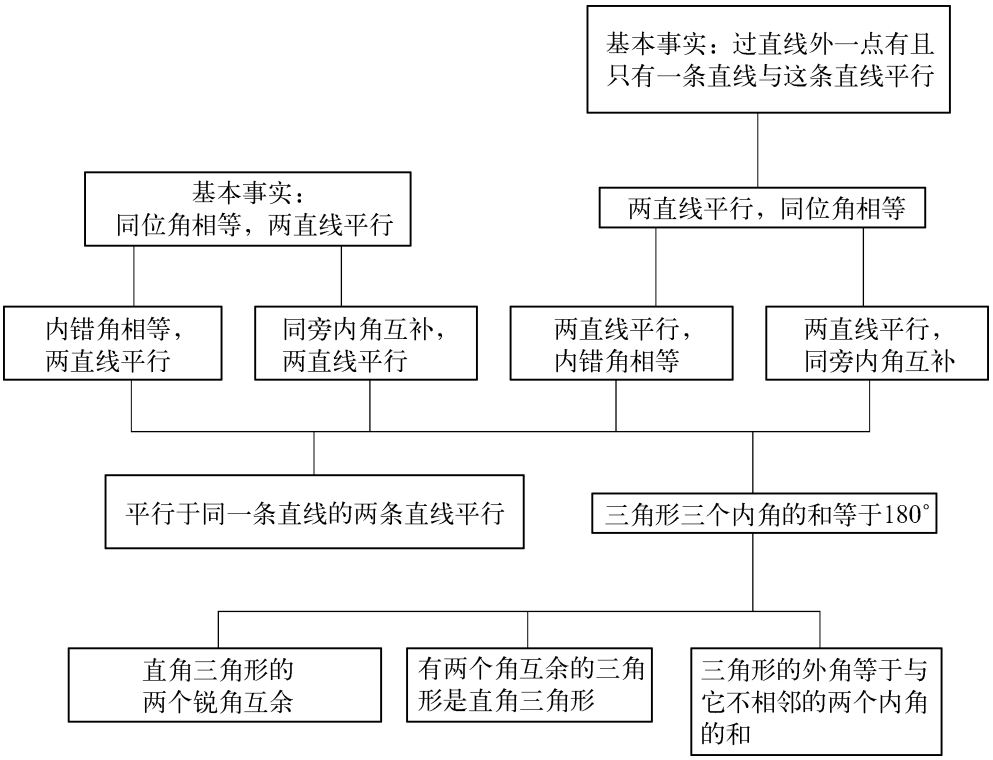
小结与思考

1. 由观察、操作、实验得到的结论有时不正确，你有过这样的体验吗？

2. 在本章里，我们学习了定义、命题、定理、逆命题、互逆命题等概念，并知道如果一个命题是真命题，它的逆命题不一定是真命题．

3. 基本事实是其真实性不加证明的真命题，它是证明其他命题真实性的出发点，经过证明的真命题称为定理．

例如，我们从“同位角相等，两直线平行”和“过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”这两个基本事实出发，证明了如下命题：



4. 判断一个命题是假命题，只需举出一个反例．你能说出一个假命题，并举出反例吗？

5. 说说三角形内角和定理是怎么证明的．

复习巩固

1. (1) 举出学过的 4 个真命题；

   (2) 说出 2 个假命题．

2. 指出下列命题的条件和结论：

   (1) 同号两数相乘，积为正；

   (2) 等角的补角相等；

   (3) 平行于同一条直线的两条直线平行；

   (4) 四边形的内角和等于外角和．

3. 下列命题是不是真命题？为什么？

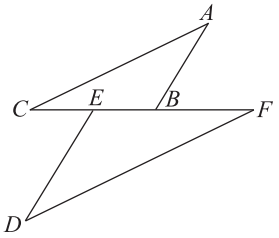
(1) 如果 $a>b$，那么 $|a|>|b|$；

(2) 一个角的补角大于这个角；

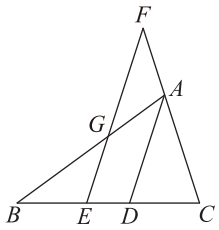
(3) 偶数能被 4 整除；

(4) 三角形的最大内角大于 $60°$.

4. 如图，点 C、E、B、F 在一条直线上，$AC \parallel FD$，$\angle A=\angle D$. 由此，你能推出什么结论？证明其中的 1 ～ 2 个结论．



（第 4 题）

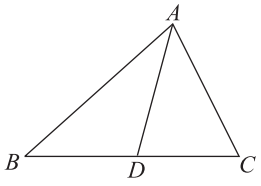


（第 5 题）

5. 已知：如图，AD 是△ABC 的角平分线，点 E 在 BC 上，点 F 在 CA 的延长线上，EF 交 AB 于点 G，且 $\angle AGF=\angle F$.

求证：$EF \parallel AD$.

6. 如图，在△ABC 中，点 D 在 BC 上，$\angle DAC=\angle B$. 图中还有相等的角吗？证明你的结论．

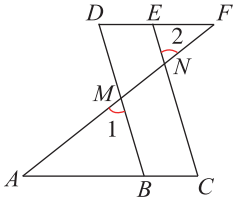


（第 6 题）

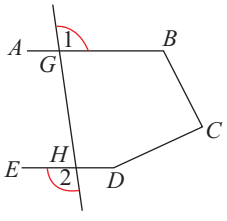
灵活运用

7. 已知：如图，点 B、E 分别在 AC、DF 上，AF 分别交 BD、CE 于点 M、N，$\angle 1=\angle 2$，$\angle A=\angle F$.

求证：$\angle C=\angle D$.



（第 7 题）

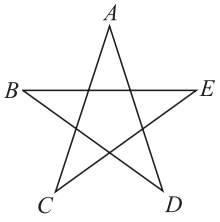


（第 8 题）

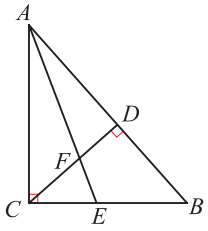
8. 已知：如图，$\angle ABC+\angle C+\angle CDE=360°$，$GH$ 分别交 AB、ED 于点 G、H．

求证：$\angle 1=\angle 2$.

9. 如图，在五角星形 $ABCDE$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$、$\angle E$ 的和等于多少度？请加以证明．



（第 9 题）



（第 10 题）

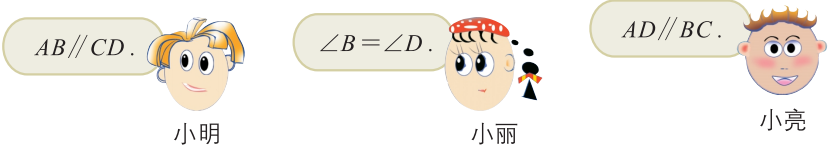
10. 已知：如图，在△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，AE 是角平分线，CD 是高，AE、CD 相交于点 F.

求证：$\angle CFE = \angle CEF$.

探索研究

11. 探索两个连续奇数的平方差的规律，并加以证明．

12. 在四边形 $ABCD$ 中：

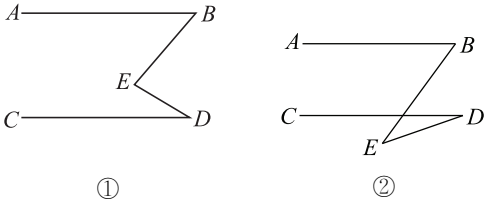


（1）请你用小明、小丽、小亮中任何两人所给出的事项作为条件，另一个事项作为结论，构造 1～3 个命题；

（2）你构造的命题是真命题吗？为什么？

13. （1）如图①，$AB \parallel CD$，试用不同方法证明 $\angle B + \angle D = \angle E$.

（2）如图②，$AB \parallel CD$，$\angle B$、$\angle D$、$\angle E$ 之间有怎样的数量关系？证明你的结论.

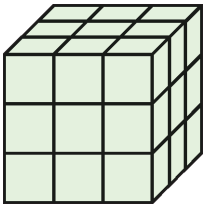


（第 13 题）

14. 画 $\angle A$，在 $\angle A$ 的两边上分别取点 B、C，在 $\angle A$ 的内部取一点 P，连接 PB、PC. 探索 $\angle BPC$ 与 $\angle A$、$\angle ABP$、$\angle ACP$ 之间的数量关系，并证明你的结论.

课题学习

分类　想象　找规律



1. 将一个棱长为 3 的正方体的表面涂上颜色，分割成棱长为 1 的小正方体(如图). 其中，三面涂色的小正方体有几个？两面涂色的小正方体有几个？一面涂色的小正方体有几个？

2. 如果将一个棱长为 4 的正方体的表面涂色，分割成棱长为 1 的小正方体，那么三面、两面、一面涂色的小正方体各有几个？

如果分割棱长为 5 或棱长为 6 的正方体呢？

3. 从以上的求解过程，你能发现什么规律？

4. 你还能提出其他问题，并加以解答吗？

数学活动评价表

活动名称	利用平移设计图案	活动时间	
参加者			
自我评价	1. 课本“数学活动”中的 3 个问题，你是如何解决的？ 2. 在“平移三角形设计图案”的活动中，你设计了哪些新的图案？你从同学的设计中，得到哪些启发？ 3. 在收集、创作的图案中，你认为比较好的图案有哪些？试举出 1～2 例，并说明理由. 4. 参加本次活动，你有哪些收获和体会？		
同学或小组评价			
老师评语			

数学活动评价表

活动名称	生活中的“较大数”与“较小数”		活动时间	
活动形式	以小组为单位	小组成员		
自我评价	1. 你是通过什么方式收集数据的？你能用具体事例来描述这些数据吗？ 2. 你和小组同学提出了哪些估测方法？在这些估测方法中，你认为比较好的方法有哪些？说说你的理由. 3. 在活动中，你和小组同学是如何分工合作，体现团队精神的？ 4. 通过本次活动，你对生活中的“较大数”与“较小数”的描述有哪些新的体会？			
同学或小组评价				
老师评语				

数学活动评价表

活动名称	拼图·公式	活动时间	
参加者			
自我评价	1. 通过“拼图”活动，你得到哪些结论？这些结论是如何探索得到的？ 2. 在活动中，你认为有创意的“拼图”有哪些？试举出 1～2 例，并说明理由. 3. 把一些图形拼成新的图形，通过不同的面积计算方法，可以找到数量之间的关系，有时能得到一些法则、公式. 通过本次活动，你对“拼图·公式”实验有哪些新的认识？		
同学或小组评价			
老师评语			

数学活动评价表

活动名称	算　年　龄		活动时间	
活动形式	以小组为单位	小组成员		
自我评价	1. 你调查了什么实际问题？列出了怎样的方程组？ 2. 调查中遇到了什么困难？你和小组同学是如何克服的？ 3. 在“调查研究，收集数据，将实际问题转化为数学问题，解决实际问题”的过程中，你发挥了怎样的作用？有哪些收获和体会？			
同学或小组评价				
老师评语				

数学活动评价表

活动名称	一元一次不等式问题的调查		活动时间	
活动形式	以小组为单位	小组成员		
自我评价	1. 在活动中，你收集了哪些数据及数量之间的关系？列出了怎样的不等式？ 2. 在活动中，你能与同学合作吗？在与同学的交流中，你得到哪些启发？ 3. 活动中，遇到了什么困难？你和小组同学是如何克服的？ 4. 通过本次活动，你对生活与数学的联系、数学在解决实际问题中的作用有哪些新的体会？			
同学或小组评价				
老师评语				

数学活动评价表

活动名称	由已知探索未知	活动时间	
参加者			
自我评价	1. 你解决了“数学活动”中提出的哪些问题？ 2. 活动中遇到困难时，你是通过独立思考来解决，还是通过与同学共同讨论来解决？ 3. 你对别人的意见质疑过吗？提出了哪些不同的意见？ 4. 通过本次活动，你感受到数学与生活的联系吗？ 5. 你感到学习“证明”有必要吗？你相信自己能学会“证明”吗？		
同学或小组评价			
老师评语			

后　　记

本套教材是以《义务教育 数学课程标准(2011年版)》为依据，在广泛听取专家、实验区师生的意见和建议的基础上，对《义务教育课程标准实验教科书数学(苏科版)》(以下简称“实验本”)进行修订而成的，供义务教育 7～9 年级使用．

本套教材每章的开头部分设置：章头图，章头语，章头问题，本章内容概述．

每章的内容部分设置：

“数学实验室”——通过“做”数学，感悟、理解数学知识；

“数学活动”——运用本章知识解决一些简单的问题；

“阅读”和“读一读”——介绍数学思想方法、拓展课本内容；

“练一练”——按课时编写，供当堂练习用；

“习题”——按节编写，供本节各个课时课后作业用．

每章的末尾部分设置：

“小结与思考”——梳理本章知识的结构、提炼基本思想；

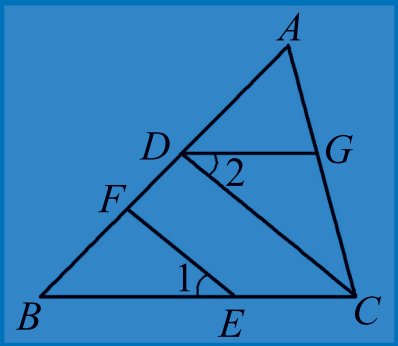
“复习题”(分为复习巩固、灵活应用、探索研究三个层次)——供本章复习时用，其中“灵活应用”、“探索研究”部分的习题可根据实际情况选用．

本套教材的每册课本设置一个“课题学习”——综合运用有关知识解决实际问题．全书使用了卡通人“小明”、“小丽”，并根据课程内容展开的需要，编写了一些卡通语．

“实验本”教材由杨裕前、董林伟任主编，丁伟明、李善良曾任副主编．参与本册各章(“实验本”)编写的有周凯、赵维坤、朱建明、杨秋萍．

修订后的本套教材由杨裕前、董林伟任主编．参与修订的编写人员有周凯、杨秋萍、徐延觉、朱建明；参与修订讨论的有王永建、周学祁、陈志廉、荆福仁．

史宁中教授、顾泠沅教授、张英伯教授等专家、同行，对本套教材的修订给予了热情的帮助和指导，提出了许多宝贵的意见和建议，在此表示衷心感谢！



数学

SHU XUE

七年级 下册

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5537-0317-6

9 787553 703176 >

定价:10.79元

审批号:苏费核(2021年)0751号　　举报电话:12315