绿色印刷产品

批准文号：湘发改价费〔2017〕343 号

ISBN 978-7-5355-3941-0

定价：10.95 元

义务教育教科书 数学 八年级上册

湖南教育出版社

教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

SHUXUE

八年级上册

湖南教育出版社

义务教育教科书

数学

SHUXUE

八年级上册

湖南教育出版社

义务教育教科书 数学 八年级上册

主　　编：严士健　黄楚芳

执行主编：丘维声

副 主 编：赵雄辉　胡　旺

编　　委：袁宏喜　张　华　曾友良

周大明　彭翕成　邹伟华

学会数学的思维方式

亲爱的同学们：

你们在上学期学习了精彩的数学内容，有什么值得分享的经验和体会吗？

学习数学，不仅要学习数学知识，更重要的是学习数学的思维方式，那就是“观察—抽象—探索—猜测—论证”。

在本书中，我们将类比小学学过的分数来学习“分式”；将进一步认识与三角形有关的概念和性质，掌握两个三角形全等的性质和条件，在观察—抽象—探索的基础上，更多地学习论证。我们还要认识一位新朋友——无理数，从而将我们的视野从有理数扩大到更广的数域——实数。在“一元一次不等式(组)”中，我们将学习不等式的性质，并利用其建立一元一次不等式模型来刻画现实生活中的不等关系，去解决一些简单的实际问题。在“二次根式”中，我们将沿着实数的足迹来学习二次根式的性质与运算，从而为你的运算添上更有力的双翼。

当然，在我们同行的路途中，“综合与实践”“IT 教室”“数学与文化”也都不容错过，因为任何缜密的思维，只有在通往实践的过程中，才具备非凡的价值。在这里，我们将感受到数学的威力与无穷魅力！

要学好这些内容，需要我们充满信心，养成良好的学习习惯，克服许许多多的困难。要善于回忆和归纳学过的知识与方法，并找到适合自己的数学学习方法。同学们可以依照书中的栏目设置，多“观察”“探究”“动脑筋”“说一说”“做一做”“议一议”，多动手试一试，从熟悉的生活事例中认识数学，把数学应用到你的生活中去，不断提高自己探索问题的能力。

同学们，让我们跟着数学，一起继续前进吧！

Contents 目录

第1章

分　式

一块面积为 x 公顷的稻田总产量为 a kg，那么这块稻田每公顷的平均产量就是 $\frac{a}{x}$ kg. 像 $\frac{a}{x}$ 这样的式子叫作分式.

分式有哪些基本性质？分式如何进行运算？它们与分数的性质与运算有哪些相同或不同的地方？分式方程如何求解？这些都是我们在本章将要学习的内容.

1.1 分 式

动脑筋

填空：

1.（1）某长方形画的面积为 S m²，长为 8 m，则它的宽为 _____m；

（2）某长方形画的面积为 S m²，长为 x m，则它的宽为 _____m；

2. 如果两块面积分别为 x 公顷，y 公顷的稻田，分别产稻谷 a kg，b kg，那么这两块稻田平均每公顷产稻谷 _____kg.

依次填：$\frac{S}{8}$，$\frac{S}{x}$，$\frac{a+b}{x+y}$.

说一说

代数式$\frac{a}{x}$，$\frac{S}{x}$，$\frac{a+b}{x+y}$有什么共同点？

我们已经知道，一个整数 m 除以一个非零整数 n，所得的商记作$\frac{m}{n}$，称$\frac{m}{n}$为分数. 类似地，一个整式 f 除以一个非零整式 g（g 中含有字母），所得的商记作$\frac{f}{g}$，把代数式$\frac{f}{g}$叫作**分式**(fraction)，其中 f 是分式的分子，g 是分式的分母，$g \neq 0$. 例如：$\frac{a}{x}$，$\frac{S}{x}$，$\frac{a+b}{x+y}$，…都是分式.

例 1 当 x 取什么值时，分式 $\frac{x-2}{2x-3}$ 的值 (1)不存在；(2)等于 0?

解 (1) 当分母 $2x-3=0$，即 $x=\frac{3}{2}$ 时，分式 $\frac{x-2}{2x-3}$ 的值不存在.

(2) 当分子 $x-2=0$，即 $x=2$ 时，分母 $2x-3\neq 0$，分式 $\frac{x-2}{2x-3}$ 的值等于 0.

例 2 求下列条件下分式 $\frac{x-5}{x+6}$ 的值：

(1) $x=3$；　　(2) $x=-0.4$.

解 (1) 当 $x=3$ 时，$\frac{x-5}{x+6}=\frac{3-5}{3+6}=-\frac{2}{9}$.

(2) 当 $x=-0.4$ 时，$\frac{x-5}{x+6}=\frac{-0.4-5}{-0.4+6}=\frac{-5.4}{5.6}=-\frac{27}{28}$.

练习

1. 填空：

(1) 某村有 m 个人，耕地面积约为 50 公顷，则该村的人均耕地面积约为 _____ 公顷；

(2) 某工厂接到加工 m 个零件的订单，原计划每天加工 a 个，由于技术改革，实际每天多加工 b 个，则 _____ 天可以完成任务.

2. 当 x 取什么值时，分式 $\frac{x+3}{4x-5}$ 的值 (1)不存在；(2)等于 0?

3. 填表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$\frac{x}{3-2x}$									

说一说

填空，并说一说下列等式从左到右变化的依据.

(1) $\frac{3}{4}=\frac{6}{(\quad)}=\frac{(\quad)}{12}$；　　(2) $\frac{6}{18}=\frac{3}{(\quad)}=\frac{(\quad)}{3}$.

分数的分子、分母都乘同一个不为 0 的数，分数的值不变.

分数的分子、分母都除以它们的一个公约数，分数的值不变.

与分数类似，分式有以下基本性质：

分式的分子与分母都乘同一个非零整式，所得分式与原分式相等.

即对于分式$\frac{f}{g}$，有

$$\frac{f}{g}=\frac{f\cdot h}{g\cdot h}\ (h\neq 0). \qquad ①$$

公式①从左到右看表明：分式的分子与分母都乘同一个非零整式，所得分式与原分式相等.

公式①从右到左看表明：分式的分子与分母都除以它们的一个公因式，所得分式与原分式相等.

议一议

下列等式是否成立？为什么？

$$\frac{-f}{-g}=\frac{f}{g},\quad \frac{-f}{g}=\frac{f}{-g}.$$

例 3 根据分式的基本性质填空：

(1) $\frac{1-a^2}{-a}=\frac{(\quad)}{a}$；　　(2) $\frac{x}{y}=\frac{(\quad)}{xy}$；

(3) $\frac{5x}{x^2-3x}=\frac{5}{(\quad)}$.

分析 （1）因为$\frac{1-a^2}{-a}$的分母$-a$乘-1就能化为a，根据分式的基本性质，分子也需乘-1，这样所得分式才与原分式相等.

（2）因为$\frac{x}{y}$的分母y乘x就能化为xy，根据分式的基本性质，分子也需乘x，这样所得分式才与原分式相等.

（3）因为$\frac{5x}{x^2-3x}$的分子$5x$除以x就能化为5，根据分式的基本性质，分母也需除以x，这样所得分式才与原分式相等.

解 （1）因为$\frac{1-a^2}{-a}=\frac{a^2-1}{a}$，所以括号中应填$a^2-1$.

（2）因为$\frac{x}{y}=\frac{x^2}{xy}$，所以括号中应填$x^2$.

（3）因为$\frac{5x}{x^2-3x}=\frac{5}{x-3}$，所以括号中应填$x-3$.

像例3(3)这样，根据分式的基本性质，把一个分式的分子与分母的公因式约去（即分子与分母都除以它们的公因式），叫作分式的**约分**（reduction of a fraction）.

分式$\frac{5x}{x^2-3x}$经过约分后得到$\frac{5}{x-3}$，其分子与分母没有公因式. 像这样，分子与分母没有公因式的分式叫作**最简分式**(fraction in lowest terms).

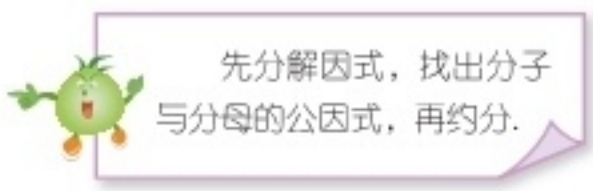
例4 约分：

（1）$\frac{24ab^3}{4ab^2}$；　　（2）$\frac{a^2-2a}{a^2-4a+4}$.

分析 约分的前提是要先找出分子与分母的公因式.

解 （1）$\frac{24ab^3}{4ab^2}=\frac{4ab^2\cdot 6b}{4ab^2}=6b$.

（2）$\frac{a^2-2a}{a^2-4a+4}=\frac{a(a-2)}{(a-2)^2}=\frac{a}{a-2}$.



约分一般是将一个分式化成最简分式. 约分可以使求分式的值比较简便.

例 5 先约分，再求值：$\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$，其中 $x=5$，$y=3$.

解 $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{x-y}{x+y}$.

当 $x=5$，$y=3$ 时，

$$\frac{x-y}{x+y}=\frac{5-3}{5+3}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

练习

1. 填空：

(1) $\frac{1-x}{6-x^2}=\frac{x-1}{(\quad)}$；　　(2) $\frac{x}{y}=\frac{2x^2y}{(\quad)}$；

(3) $\frac{2}{x+1}=\frac{2(x-1)}{(\quad)}$；　　(4) $\frac{y^2}{2xy}=\frac{(\quad)}{2x}$；

(5) $\frac{2x+2}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{(\quad)}$；　　(6) $\frac{x(x-y)}{x^2-y^2}=\frac{x}{(\quad)}$.

2. 约分：

(1) $\frac{18a^2b^3}{12a^3b^2}$；　　(2) $\frac{8x(x-y)}{6y(y-x)}$；

(3) $\frac{xy+5x}{y^2+10y+25}$；　　(4) $\frac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}$.

3. 先约分，再求值：$\frac{x^2-2xy+y^2}{y-x}$，其中 $x=2$，$y=3$.

习题 1.1

A 组

1. 当 x 取什么值时，分式 $\frac{x}{x+1}$ 的值等于 0？

2. 当 x 取什么值时，下列分式的值不存在？

（1）$\dfrac{1}{2x+4}$；　　（2）$\dfrac{x-2}{x^2-1}$.

3. 下列分式中，哪些是相等的？用等号连接它们：

$$\frac{7x^2y^3}{3xy^4},\ \frac{7x^2}{3y^2},\ \frac{7x}{3y},\ \frac{7x^2(y+1)}{3y^2(y+1)},\ \frac{7x(y+1)}{3y(y+1)}.$$

4. 填空：

（1）$\dfrac{-xy}{y-x}=\dfrac{(\quad)}{x-y}$；　　（2）$\dfrac{7x}{x-y}=\dfrac{7xy}{(\quad)}$；

（3）$\dfrac{x^2-3x}{5x}=\dfrac{(\quad)}{5}$；　　（4）$\dfrac{3x^2y}{2xy^2}=\dfrac{(\quad)}{2y}$；

（5）$\dfrac{(x+y)^2}{x^2-y^2}=\dfrac{(\quad)}{x-y}$.

5. 约分：

（1）$\dfrac{7a^2b}{5abc}$；　　（2）$\dfrac{x^2-16}{x+4}$；

（3）$\dfrac{y-x}{x^2-y^2}$；　　（4）$\dfrac{4a^2+4ab+b^2}{4a^2-b^2}$；

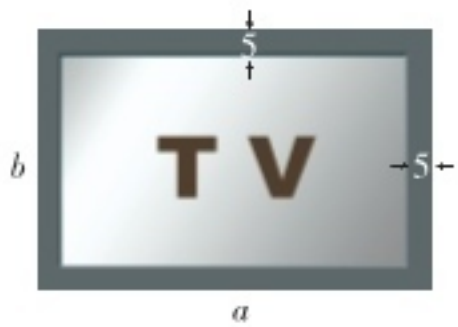
（5）$\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(z-y)(y-x)(x-z)}$.

6. 先约分，再求值：

（1）$\dfrac{m+2n}{m^2-4n^2}$，其中 $m=1$，$n=3$；

（2）$\dfrac{x^2-4y^2}{x^2-4xy+4y^2}$，其中 $x=2$，$y=4$.

7. 如图，某长方形液晶电视机的长为 a cm，宽为 b cm；屏幕在中间，屏幕外边框的宽度都为 5 cm. 求屏幕面积与屏幕外的边框面积之比. 当 $a=65$，$b=52$ 时，这个比值是多少？



（第 7 题图）

B 组

8. 若分式 $\dfrac{x^2-4}{(x+1)(x-2)}$ 的值等于零，求 x 的值.

9. 在整式 x，x^2-1，$x+1$ 中任意选择两个，将其中一个作为分子，另一个作为分母组成一个分式，并将这个分式进行化简，再求当 $x=2$ 时分式的值.

1.2 分式的乘法和除法

做一做

根据分数的乘、除法法则完成下面的计算：

(1) $\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}=$ _____ $=\frac{(\quad)}{(\quad)}$；

(2) $\frac{2}{3}\div\frac{4}{9}=$ _____ $=\frac{(\quad)}{(\quad)}$.

与分数的乘、除法类似，分式也可以做乘法和除法.

分式的乘、除法运算法则如下：

分式乘分式，把分子乘分子、分母乘分母分别作为积的分子、分母.
分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘.

即

$$\frac{f}{g}\cdot\frac{u}{v}=\frac{fu}{gv}.$$

如果 $u\neq0$，则规定

$$\frac{f}{g}\div\frac{u}{v}=\frac{f}{g}\cdot\frac{v}{u}=\frac{fv}{gu}.$$

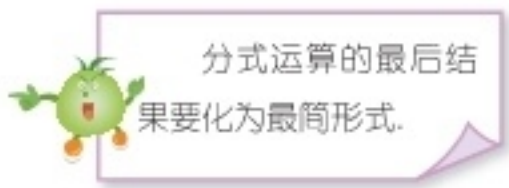
例 1 计算：

(1) $\frac{2x^2}{5y}\cdot\frac{y^2}{x^3}$；　　(2) $\frac{3x^2}{x-1}\div\frac{2x}{x-1}$.

解 (1) $\frac{2x^2}{5y}\cdot\frac{y^2}{x^3}=\frac{2x^2\cdot y^2}{5y\cdot x^3}=\frac{2y}{5x}$.

(2) $\frac{3x^2}{x-1}\div\frac{2x}{x-1}=\frac{3x^2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{2x}$

$=\frac{3x^2\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot2x}=\frac{3x}{2}=\frac{3}{2}x.$



例 2 计算：

(1) $\frac{x+1}{2x}\cdot\frac{4x^2}{x^2-1}$；　　(2) $\frac{8x^2}{x^2+2x+1}\div\frac{2x}{x+1}$.

分析　若分式的分子、分母可以因式分解，则先因式分解再进行计算.

解　(1) $\frac{x+1}{2x}\cdot\frac{4x^2}{x^2-1}=\frac{x+1}{2x}\cdot\frac{4x^2}{(x+1)(x-1)}$

$$=\frac{(x+1)\cdot 4x^2}{2x\cdot(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{2x}{x-1}.$$

(2) $\frac{8x^2}{x^2+2x+1}\div\frac{2x}{x+1}=\frac{8x^2}{(x+1)^2}\cdot\frac{x+1}{2x}$

$$=\frac{8x^2\cdot(x+1)}{(x+1)^2\cdot 2x}$$

$$=\frac{4x}{x+1}.$$

练习

1. 计算：

(1) $\frac{2x}{3y}\cdot\frac{6y^2}{x^2}$；　　(2) $\frac{2x}{x+1}\div\frac{4x^2}{x+1}$；

(3) $\frac{x^2-4}{x+1}\cdot\frac{1}{x-2}$；　　(4) $(x+2)\div\frac{x^2+4x+4}{x}$.

2. 计算：

(1) $\frac{2x^2}{3(x-1)}\cdot\frac{x^2-1}{x}$；　　(2) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x+y}\div(x-y)$；

(3) $\frac{ab+a}{b}\cdot\frac{b^2}{b^2-1}$；　　(4) $\frac{a}{a-b}\div\frac{a^2}{a^2-2ab+b^2}$.

做一做

计算：$\left(\frac{2}{3}\right)^2$，$\left(\frac{2}{3}\right)^5$，$\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

由乘方的意义和分数乘法的法则，可得

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2^2}{3^2};$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2^5}{3^5};$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n=\underbrace{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{2}{3}}_{n\text{个}}=\frac{\overbrace{2\times2\times\cdots\times2}^{n\text{个}}}{\underbrace{3\times3\times\cdots\times3}_{n\text{个}}}=\frac{2^n}{3^n}.$$

类似地，对于任意一个正整数 n，有

$$\left(\frac{f}{g}\right)^n=\frac{f^n}{g^n}.$$

即**分式的乘方是把分子、分母各自乘方**.

例 3 计算：

(1) $\left(\frac{x}{y^2}\right)^3$；　　(2) $\left(\frac{-4x^2y}{3z}\right)^2$.

解 (1) $\left(\frac{x}{y^2}\right)^3=\frac{x^3}{(y^2)^3}=\frac{x^3}{y^6}$.

(2) $\left(\frac{-4x^2y}{3z}\right)^2=\frac{(-4x^2y)^2}{(3z)^2}=\frac{16x^4y^2}{9z^2}$.

例 4 计算：

(1) $x^2y\div\left(\frac{x}{y}\right)^3$；　　(2) $\left(\frac{x}{-y}\right)^2\cdot\left(\frac{y^2}{x}\right)^3\div\left(\frac{y}{x}\right)^4$.

解 (1) $x^2y\div\left(\frac{x}{y}\right)^3=x^2y\div\frac{x^3}{y^3}=x^2y\cdot\frac{y^3}{x^3}=\frac{y^4}{x}$.

(2) $\left(\frac{x}{-y}\right)^2 \cdot \left(\frac{y^2}{x}\right)^3 \div \left(\frac{y}{x}\right)^4$

$= \frac{x^2}{(-y)^2} \cdot \frac{y^6}{x^3} \cdot \frac{x^4}{y^4}$

$= \frac{x^2 \cdot y^6 \cdot x^4}{y^2 \cdot x^3 \cdot y^4}$

$= x^3.$

做一做

取一条长度为 1 个单位的线段 AB，如图 1–1.

图 1–1

第一步：把线段 AB 三等分，以中间一段为边作等边三角形，然后去掉这一段，就得到 4 条长度相等的线段组成的折线；

第二步：把上述折线中的每一条线段重复第一步的做法.

按照上述方法一步一步继续下去，完成下表：

	线段的条数	每条线段的长度	折线总长度
第一步：$n=1$ 	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
第二步：$n=2$ 	16	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$	$\left(\frac{\quad}{\quad}\right)^2$
第三步：$n=3$ 	64	_____	$\left(\frac{\quad}{\quad}\right)^3$
⋮	⋮	⋮	⋮

继续重复上述步骤，则第 n 步得到的折线总长度是多少？

练习

1. 计算：

(1) $\left(\frac{-xy^2}{3z}\right)^4$；　　(2) $\left(\frac{3yz}{5x^2}\right)^3$.

2. 计算：

(1) $4x^2y\div\left(\frac{2x}{-y}\right)^3$；　　(2) $\left(\frac{x^2}{-y^3}\right)^3\cdot\left(\frac{y}{x^3}\right)^4$；

(3) $\left(\frac{x^2}{2y}\right)^3\cdot\left(\frac{z}{xy}\right)^3\cdot\left(\frac{y^2}{xz}\right)^2$；　　(4) $\left(\frac{-y^2}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{-y}\right)^3\div\left(\frac{x^2y}{z}\right)^2$.

习题 1.2

A 组

1. 计算：

(1) $\frac{3a^2}{b^4}\cdot\frac{b^3}{6a}$；　　(2) $8x^2y^3\cdot\frac{-3x}{4y^5}$；

(3) $10x^3y^2\div\frac{15x^2y^4}{-3z^2}$；　　(4) $\frac{(x+y)^2}{xy-y^2}\cdot\frac{(y-x)^2}{xy+y^2}$.

2. 计算：

(1) $\left(\frac{10c}{-a^2b}\right)^3$；　　(2) $\left(\frac{-3a}{4b^2}\right)^2\div 6a^2b$；

(3) $\left(\frac{y^3}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{-x}{2y^2}\right)^3$；　　(4) $\left(\frac{xy^2}{-z}\right)^4\cdot\left(\frac{z^2}{xy}\right)^3\div\left(\frac{xz}{-y}\right)^5$.

3. 计算：

$$\frac{x-1}{x}\div\frac{2x+1}{x^2},$$

再任选一个适当的 x 值代入求值.

B 组

4. 计算：

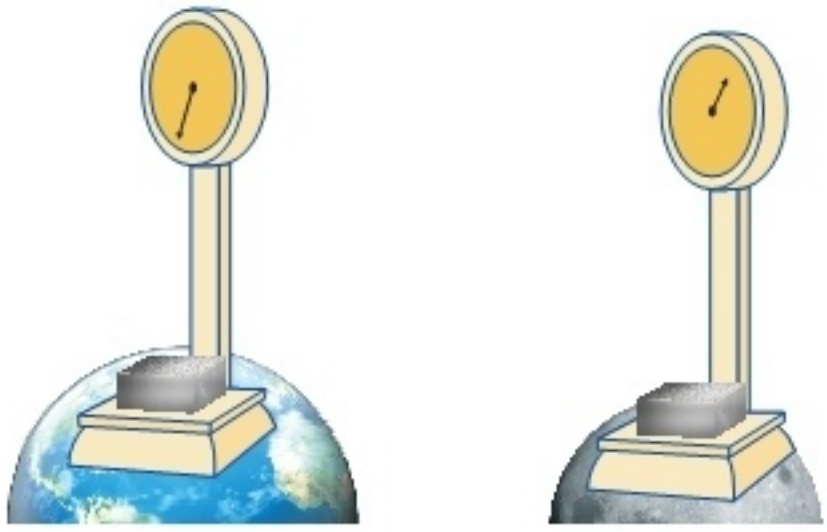
(1) $\frac{3x^2y^4}{8z^3}\cdot\frac{10z^2}{-6x^2y^2}$；　　(2) $\frac{4x^2-y^2}{3x^2y}\div\frac{2x-y}{xy}$；

(3) $\frac{a+b}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$；　　(4) $\frac{x^2-4y^2}{x^2+6xy+9y^2}\div\frac{2y^2-xy}{x^2+3xy}$.

5. 计算：

(1) $\frac{x^4-1}{x^2+2x+1}\div(x^2+1)$；　　(2) $(2y-x)\div\frac{x^2-4xy+4y^2}{x+2y}$.

6. 由著名的牛顿万有引力定律可知，任何两个物体之间都有吸引力，且如果设两个物体的质量分别为 m_1，m_2，它们之间的距离是 d，那么它们之间的引力就是 $F=\frac{Gm_1m_2}{d^2}$（G 为引力常量）. 物体在地面上所受的重力近似地等于地球对物体的引力，此时 d 就是地球的半径 R. 月球上的物体所受的月球重力将是它在地球表面上所受地球重力的几分之几(参考数据：月球的质量约是地球质量的 $\frac{10}{801}$，月球的半径约是地球半径的 $\frac{100}{367}$)?



1.3 整数指数幂

1.3.1 同底数幂的除法

动脑筋

表示计算机存储容量的计量单位有字节(B)、千字节(KB)、兆字节(MB)、吉字节(GB)等. 它们之间的换算关系如下：

$$1\ \text{GB}=2^{10}\ \text{MB}=1\ 024\ \text{MB};$$

$$1\ \text{MB}=2^{10}\ \text{KB};$$

$$1\ \text{KB}=2^{10}\ \text{B}.$$

一张普通的 CD 光盘的存储容量约为 640 MB，请问：一个 320 GB 的移动硬盘的存储容量相当于多少张光盘容量？

因为 $320\ \text{GB}=320\times2^{10}\ \text{MB}$，

所以 $\dfrac{320\times2^{10}}{640}=\dfrac{2^{10}}{2}=\dfrac{2\times2^{9}}{2}=2^{9}=512$，

因此一个 320 GB 的移动硬盘的存储容量相当于 512 张光盘容量.

一般地，设 $a\neq0$，m，n 是正整数，且 $m>n$，则

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{(m-n)+n}}{a^n}=\frac{a^{m-n}\cdot a^n}{a^n}=a^{m-n},$$

因此

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$$

即**同底数幂相除，底数不变，指数相减.**

例 1 计算：

(1) $\frac{x^8}{x^5}$；　　(2) $\frac{(xy)^5}{(xy)^2}$；

(3) $\frac{(-x)^9}{(-x)^4}$；　　(4) $\frac{x^{2n+3}}{x^3}$ (n 为正整数).

解 (1) $\frac{x^8}{x^5}=x^{8-5}=x^3$.

(2) $\frac{(xy)^5}{(xy)^2}=(xy)^{5-2}=(xy)^3=x^3y^3$.

(3) $\frac{(-x)^9}{(-x)^4}=(-x)^5=-x^5$.

(4) $\frac{x^{2n+3}}{x^3}=x^{(2n+3)-3}=x^{2n}$.

例 2 计算：

(1) $(x-1)^3\div(x-1)^2$；　　(2) $2x^2y^3\div xy^2$ ①.

解 (1) $(x-1)^3\div(x-1)^2=(x-1)^{3-2}=x-1$.

(2) $2x^2y^3\div xy^2=2x^{2-1}\cdot y^{3-2}=2xy$.

做一做

(1) 计算机存储信息时，1 个汉字占 2 个字节，一本 10 万字的书占多少个字节？

(2) 存储容量为 500 GB 的硬盘，能存储多少本 10 万字的书？

(3) 一本 10 万字的书约 1 cm 高，如果把第(2)小题算出的书一本一本往上放，能堆多高？将计算结果与珠穆朗玛峰的高度(8 844.43 m)进行比较.

① $2x^2y^3\div xy^2$ 是 $(2x^2y^3)\div(xy^2)$ 的意思.

练习

1. 计算：

(1) $\dfrac{3^{12}}{3^4}$；　　(2) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{15}\div\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{12}$；

(3) $\dfrac{(-x^2y)^7}{(-x^2y)^4}$；　　(4) $a^{2m+1}\div a^m$（m 是正整数）.

2. 下面的计算对不对？如果不对，请改正.

(1) $a^5\div a=a^5$；　　(2) $\dfrac{(-xy)^{10}}{(-xy)^6}=-x^4y^4$.

1.3.2 零次幂和负整数指数幂

说一说

根据分式的基本性质，如果 $a\neq 0$，m 是正整数，那么 $\dfrac{a^m}{a^m}$ 等于多少？

$$\frac{a^m}{a^m}=\frac{1\cdot a^m}{1\cdot a^m}=\frac{1}{1}=1.$$

如果把公式 $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$（$a\neq 0$，m，n 都是正整数，且 $m>n$）推广到 $m=n$ 的情形，那么就会有

$$\frac{a^m}{a^m}=a^{m-m}=a^0.$$

这启发我们规定

$$a^0=1\ (a\neq 0).$$

即任何不等于零的数的零次幂都等于1.

例如，$2^0=1$，$10^0=1$，$\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$，$x^0=1\ (x\neq 0)$.

动脑筋

设 $a\neq 0$，n 是正整数，试问：a^{-n} 等于什么？

如果在公式 $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ 中 $m=0$，那么就会有

$$a^{0-n}=\frac{a^0}{a^n}=\frac{1}{a^n}.$$

因为 $a^{0-n}=a^{-n}$，这启发我们规定

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq 0,\ n\text{是正整数}).$$

由于

$$\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n,$$

因此

$$a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n\ (a\neq 0,\ n\text{是正整数}).$$

特别地，$a^{-1}=\frac{1}{a}\ (a\neq 0)$.

例 3 计算：

(1) 2^{-3}；　　(2) 10^{-4}；　　(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

解 (1) $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$.

(2) $10^{-4}=\frac{1}{10^4}=\frac{1}{10\,000}=0.000\,1$.

(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

例 4 把下列各式写成分式的形式：

（1）x^{-2}；　　（2）$2xy^{-3}$.

解　（1）$x^{-2}=\frac{1}{x^2}$.

（2）$2xy^{-3}=2x\cdot\frac{1}{y^3}=\frac{2x}{y^3}$.

例 5 用小数表示 3.6×10^{-3}.

解　$3.6\times10^{-3}=3.6\times\frac{1}{10^3}=3.6\times0.001=0.003\ 6$.

在七年级上册中，我们学过用科学记数法把一些绝对值较大的数表示成 $a\times10^n$ 的形式，其中 n 是正整数，$1\leqslant|a|<10$.

类似地，利用 10 的负整数次幂，我们可以用科学记数法表示一些绝对值较小的数，即将它们表示成 $a\times10^{-n}$ 的形式，其中 n 是正整数，$1\leqslant|a|<10$. 这里用科学记数法表示时，关键是掌握公式：

$$\underbrace{0.00\cdots0}_{n\text{ 个 }0}1=10^{-n}.$$

例 6 2010 年，国外科学家成功制造出世界上最小的晶体管，它的长度只有 0.000 000 04 m，请用科学记数法表示它的长度，并在计算器上把它表示出来.

解　0.000 000 04

$=4\times0.000\ 000\ 01$

$=4\times10^{-8}$.

在计算器上依次按键输入 0.000 000 04，最后按“=”键，屏幕显示如上，表示 4×10^{-8}.

练习

1. 计算：

0.5^0，　$(-1)^0$，　10^{-5}，　$\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$，　$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$.

2. 把下列各式写成分式的形式：

（1）x^{-3}；　　（2）$-5x^{-2}y^{3}$.

3. 用小数表示5.6×10^{-4}.

4. 2011 年 3 月，英国和新加坡研究人员制造出观测极限为 0.000 000 05 m 的光学显微镜，这是迄今为止观测能力最强的光学显微镜，请用科学记数法表示这个数.

1.3.3 整数指数幂的运算法则

说一说

正整数指数幂的运算法则有哪些？

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（m，n 都是正整数）；

$(a^m)^n=a^{mn}$（m，n 都是正整数）；

$(ab)^n=a^nb^n$（n 是正整数）；

$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$（$a\neq0$，m，n 都是正整数，且 $m>n$）；

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$（$b\neq0$，$n$ 是正整数）.

在前面我们已经把幂的指数从正整数推广到了整数. 可以说明：当 $a\neq0$，$b\neq0$ 时，正整数指数幂的上述运算法则对于整数指数幂也成立，即

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}\ (a\neq0,\ m,\ n\text{ 都是整数}),\quad ①$$

$$(a^m)^n=a^{mn}\ (a\neq0,\ m,\ n\text{ 都是整数}),\quad ②$$

$$(ab)^n=a^nb^n\ (a\neq0,\ b\neq0,\ n\text{ 是整数}).\quad ③$$

实际上，对于 $a\neq0$，m，n 都是整数，有

$$\frac{a^m}{a^n}=a^m\cdot a^{-n}=a^{m+(-n)}=a^{m-n}.$$

因此，同底数幂相除的运算法则被包含在公式①中.

而对于 $a \neq 0$，$b \neq 0$，n 是整数，有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}.$$

因此，分式的乘方的运算法则被包含在公式③中.

例 7 设 $a \neq 0$，$b \neq 0$，计算下列各式：

(1) $a^7 \cdot a^{-3}$；　　(2) $(a^{-3})^{-2}$；

(3) $a^3b(a^{-1}b)^{-2}$.

解 (1) $a^7 \cdot a^{-3} = a^{7+(-3)} = a^4$.

(2) $(a^{-3})^{-2} = a^{(-3)\times(-2)} = a^6$.

(3) $a^3b(a^{-1}b)^{-2} = a^3b \cdot a^2b^{-2} = a^{3+2}b^{1+(-2)} = a^5b^{-1} = \dfrac{a^5}{b}$.

例 8 计算下列各式：

(1) $\dfrac{2x^3y^{-2}}{3x^{-1}y}$；　　(2) $\left(\dfrac{2x}{y}\right)^{-3}$.

解 (1) $\dfrac{2x^3y^{-2}}{3x^{-1}y} = \dfrac{2}{3}x^{3-(-1)}y^{-2-1} = \dfrac{2}{3}x^4y^{-3} = \dfrac{2x^4}{3y^3}$.

(2) $\left(\dfrac{2x}{y}\right)^{-3} = \left(\dfrac{y}{2x}\right)^3 = \dfrac{y^3}{(2x)^3} = \dfrac{y^3}{8x^3}$.

练习

1. 设 $a \neq 0$，$b \neq 0$，计算下列各式：

(1) $-a \cdot (-a)^3$；　　(2) $(-a)^3 \cdot (a^{-1})^2$；

(3) $[(-a)^2]^{-1}$；　　(4) $a^{-5}(a^2b^{-1})^3$.

2. 计算下列各式：

(1) $\dfrac{5x^{-1}y^4}{4x^2y}$；　　(2) $\left(\dfrac{y^{-2}}{3x^4}\right)^{-3}$.

习题 1.3

A 组

1. 计算：

(1) $\frac{a^5}{a^3}$；　　(2) $\frac{(-x^2y^3)^4}{(-x^2y^3)^2}$；

(3) $\frac{(-x)^{2m+1}}{(-x)^{m+2}}$（$m$ 是正整数）；　　(4) $\frac{-x^5y^3}{2xy^2}$.

2. 计算：

(1) $1\,000^0$；　　(2) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$；

(3) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$；　　(4) $(x^{-2}y)^{-3}$.

3. 用小数表示下列各数：

(1) 1.5×10^{-5}；　　(2) 2.08×10^{-3}.

4. 用科学记数法表示下列各数：

(1) 0.000 008；　　(2) 0.000 010 8.

5. PM2.5 是指大气中直径小于或等于 2.5 μm（1 μm = 0.000 001 m）的颗粒物，也称为可入肺颗粒物．虽然它们的直径还不到人的头发丝粗细的 $\frac{1}{20}$，但它们含有大量的有毒、有害物质，并且在大气中的停留时间长、输送距离远，因而对人体健康和大气环境质量有很大危害.

(1) 假设一种可入肺颗粒物的直径约为 2.5 μm，相当于多少米？

(2) 多少个直径为 2.5 μm 的颗粒物首尾连接起来能达到 1 m？

6. 计算：

(1) $(-x)^{-3}\cdot(2x^{-1})^2$；　　(2) $(-x^3y^{-2})^{-5}$；

(3) $\dfrac{(-2xy^{-4})^{-2}}{8xy^3}$；　　(4) $\left(-\dfrac{5x^2y}{6z}\right)^{-2}$.

B 组

7. 计算：

(1) $(-a^2b^{-1}c^{-2})^{-3}$；

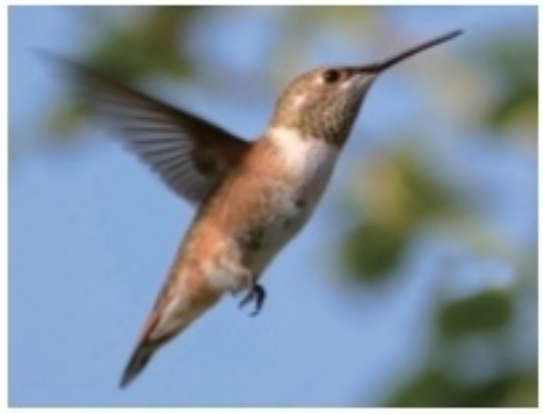
(2) $(a^2b^{-1}c)^{-2}\div 2a^{-1}bc$；

(3) $(3x^{-2}y^{-3})\cdot(-2x^2y)^{-3}\cdot\left(-\dfrac{1}{6}xy^2\right)^{-2}$.

8. 最小刻度为 0.2 nm（1 nm = 10^{-9} m）的钻石标尺，可以测量的距离小到不足头发丝直径的十万分之一，这也是目前世界上刻度最小的标尺.

(1) 用科学记数法表示这一最小刻度（单位：m）；

(2) 蜂鸟是世界最小的鸟，最大的蜂鸟从头到尾的长度大约仅为 4.5 cm，问最大的蜂鸟的长度相当于该标尺最小刻度的多少倍？



1.4 分式的加法和减法

做一做

计算：

$\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=$_____；　　$\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=$_____.

同分母的分数相加减，分母不变，把分子相加减.

类似地，同分母的分式的加、减法运算法则是：

同分母的分式相加减，分母不变，把分子相加减.

即

$$\frac{f}{g}\pm\frac{h}{g}=\frac{f\pm h}{g}.$$

例 1 计算：（1）$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}$；　　（2）$\frac{3x^2}{x-y}-\frac{3xy}{x-y}$.

解　（1）$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}=\frac{x+y}{x+y}=1.$

（2）$\frac{3x^2}{x-y}-\frac{3xy}{x-y}$

$=\frac{3x^2-3xy}{x-y}$

$=\frac{3x(x-y)}{x-y}$

$=3x.$

说一说

下列等式是否成立？为什么？

$$\frac{-f}{g}=-\frac{f}{g},\ \frac{f}{-g}=-\frac{f}{g}.$$

因为 $\frac{f}{g}+\frac{-f}{g}=\frac{f+(-f)}{g}=\frac{0}{g}=0$，

所以 $\frac{-f}{g}=-\frac{f}{g}$.

因为 $\frac{-f}{g}=\frac{f}{-g}$，

所以 $\frac{f}{-g}=-\frac{f}{g}$.

例 2 计算：$\frac{ac}{a-b}+\frac{bc}{b-a}$.

解 $\frac{ac}{a-b}+\frac{bc}{b-a}=\frac{ac}{a-b}+\frac{bc}{-(a-b)}$

$=\frac{ac}{a-b}-\frac{bc}{a-b}=\frac{ac-bc}{a-b}$

$=\frac{c(a-b)}{a-b}=c.$

练习

1. 计算：

(1) $\frac{7}{x}+\frac{3}{x}-\frac{8}{x}$；

(2) $\frac{x^2}{x+y}-\frac{y^2}{x+y}$；

(3) $\frac{ac}{a^2-b^2}-\frac{bc}{a^2-b^2}$.

2. 计算：

(1) $\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-a}$；

(2) $\frac{m+2n}{n-m}+\frac{n}{m-n}$；

(3) $\frac{3x}{3x-2y}+\frac{2y}{2y-3x}$.

做一做

计算：

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$_____；　　$\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=$_____.

异分母的分数相加减，要先通分，化成同分母的分数，再加减.

类似地，异分母的分式进行加、减运算时，也要**先化成同分母的分式，然后再加减**.

根据分式的基本性质，把几个异分母的分式化成同分母的分式的过程，叫作分式的**通分**(reduction of fractions to a common denominator).

动脑筋

如何把分式 $\frac{1}{2x}$，$\frac{1}{3y}$ 通分?

通分时，关键是确定公分母. 一般取各分母的所有因式的最高次幂的积作为公分母，这样的公分母称为**最简公分母**.

$2x$ 的因式有 2，x；$3y$ 的因式有 3，y，两式中所有因式的最高次幂的积是 $6xy$，所以这两个分式的最简公分母为 $6xy$，从而可以根据分式的基本性质，分别把原来各分式的分子和分母都乘同一个适当的整式，使各分式的分母都化成 $6xy$.

通分过程如下：

$$\frac{1}{2x}=\frac{1\cdot 3y}{2x\cdot 3y}=\frac{3y}{6xy},$$

$$\frac{1}{3y}=\frac{1\cdot 2x}{3y\cdot 2x}=\frac{2x}{6xy}.$$

例 3 通分：

(1) $\frac{x}{3y^2}$，$\frac{1}{4xy}$；　　(2) $\frac{4a}{5b^2c}$，$\frac{3c}{4a^2b}$，$\frac{5b}{2ac^2}$.

解 (1) 最简公分母是 $12xy^2$，

$$\frac{x}{3y^2}=\frac{x\cdot 4x}{3y^2\cdot 4x}=\frac{4x^2}{12xy^2},$$

$$\frac{1}{4xy}=\frac{1\cdot 3y}{4xy\cdot 3y}=\frac{3y}{12xy^2}.$$

(2) 最简公分母是 $20a^2b^2c^2$，

$$\frac{4a}{5b^2c}=\frac{4a\cdot 4a^2c}{5b^2c\cdot 4a^2c}=\frac{16a^3c}{20a^2b^2c^2},$$

$$\frac{3c}{4a^2b}=\frac{3c\cdot 5bc^2}{4a^2b\cdot 5bc^2}=\frac{15bc^3}{20a^2b^2c^2},$$

$$\frac{5b}{2ac^2}=\frac{5b\cdot 10ab^2}{2ac^2\cdot 10ab^2}=\frac{50ab^3}{20a^2b^2c^2}.$$

例 4 通分：

(1) $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{x^2-x}$；　　(2) $\frac{1}{x^2-4}$，$\frac{x}{4-2x}$.

分析 (1)中的分母分别是x，$x^2-x=x(x-1)$，因此最简公分母是$x(x-1)$；(2)中的分母因式分解后，分别是$x^2-4=(x+2)(x-2)$，$4-2x=-2(x-2)$，因此最简公分母是$2(x+2)(x-2)$.

解 (1) 最简公分母是$x(x-1)$，

$$\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x(x-1)},\quad \frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)}.$$

(2) 最简公分母是$2(x+2)(x-2)$，

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{2}{2(x+2)(x-2)},$$

$$\frac{x}{4-2x}=\frac{x}{-2(x-2)}=-\frac{x(x+2)}{2(x+2)(x-2)}.$$

练习

1. 通分：

(1) $\frac{1}{4x}$，$\frac{1}{6y}$；　　(2) $\frac{7}{8x}$，$\frac{5}{7y}$；

(3) $\frac{b}{a^2}$，$\frac{c}{b^2}$；　　(4) $\frac{7}{8xy^2}$，$\frac{y}{6x^2}$.

2. 通分：

(1) $\frac{3x}{2y(x+y)}$，$\frac{2y}{3x(x+y)}$；　　(2) $\frac{1}{x^2-xy}$，$\frac{y}{y-x}$.

动脑筋

从甲地到乙地依次需经过 1 km 的上坡路和 2 km 的下坡路. 已知小明骑车在上坡路上的速度为 v km/h，在下坡路上的速度为 $3v$ km/h，则他骑车从甲地到乙地需多长时间？

小明骑车走 1 km 上坡路和 2 km 下坡路的时间分别为$\frac{1}{v}$ h，$\frac{2}{3v}$ h，那么骑行所需的总时间为$\left(\frac{1}{v}+\frac{2}{3v}\right)$ h. 这是异分母的分式的加法，因此我们应先把它们化成同分母的分式，然后再相加，即

$$\begin{aligned}\frac{1}{v}+\frac{2}{3v}&=\frac{3}{3v}+\frac{2}{3v}\\&=\frac{3+2}{3v}\\&=\frac{5}{3v}.\end{aligned}$$

因此，小明骑车从甲地到乙地需$\frac{5}{3v}$ h.

例 5 计算：（1）$\frac{y}{4x}-\frac{x}{9y}$；　　（2）$\frac{a}{2b}-\frac{b}{3a}+\frac{c}{4ab}$.

解　（1）$\frac{y}{4x}-\frac{x}{9y}=\frac{y\cdot 9y}{4x\cdot 9y}-\frac{x\cdot 4x}{9y\cdot 4x}=\frac{9y^2-4x^2}{36xy}$.

（2）$\frac{a}{2b}-\frac{b}{3a}+\frac{c}{4ab}$

$=\frac{a\cdot 6a}{2b\cdot 6a}-\frac{b\cdot 4b}{3a\cdot 4b}+\frac{3c}{4ab\cdot 3}$

$=\frac{6a^2-4b^2+3c}{12ab}$.

例 6 计算：（1）$\frac{1}{x+3}+\frac{6}{x^2-9}$；　　（2）$\frac{x-1}{x^2+x}-\frac{x-3}{x^2-1}$.

解　（1）$\frac{1}{x+3}+\frac{6}{x^2-9}$

$=\frac{1}{x+3}+\frac{6}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}+\frac{6}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{x+3}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{1}{x-3}$.

（2）$\frac{x-1}{x^2+x}-\frac{x-3}{x^2-1}$

$=\frac{x-1}{x(x+1)}-\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)(x-1)}-\frac{x(x-3)}{x(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x^2-2x+1-(x^2-3x)}{x(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x+1}{x(x+1)(x-1)}$

$=\frac{1}{x(x-1)}$.

例 7 计算：$x+1+\dfrac{1}{1-x}$.

解 $x+1+\dfrac{1}{1-x}$

$=\dfrac{x+1}{1}+\dfrac{1}{1-x}$

$=\dfrac{(x+1)(1-x)}{1-x}+\dfrac{1}{1-x}$

$=\dfrac{(1+x)(1-x)+1}{1-x}$

$=\dfrac{1-x^2+1}{1-x}$

$=\dfrac{2-x^2}{1-x}$.

把“$x+1$”看作“$\dfrac{x+1}{1}$”，有助于寻找两个分式的公分母.

练习

1. 计算：

(1) $\dfrac{7}{8x}-\dfrac{5}{7y}$；

(2) $\dfrac{a}{xy}-\dfrac{b}{yz}$；

(3) $\dfrac{b^2}{2a^2}+\dfrac{a^2}{3b^2}$；

(4) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{3x}+\dfrac{3}{4y}$.

2. 计算：

(1) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}$；

(2) $\dfrac{x}{y(x+y)}-\dfrac{y}{x(x+y)}$；

(3) $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{1}{4-2x}$；

(4) $1-\dfrac{1}{1-x}$.

3. 甲、乙两城市之间的高铁全程长 1 500 km，列车运行速度为 b km/h. 经过长时间试运行后，铁路部门决定将列车运行速度再提高 50 km/h，则提速后列车跑完全程要少花多长时间？

习题 1.4

A 组

1. 计算：

(1) $\frac{x-y}{2x}+\frac{y}{2x}$；　　(2) $\frac{5}{x-5}+\frac{x}{5-x}$；

(3) $\frac{5x}{x^2-2xy+y^2}-\frac{5y}{x^2-2xy+y^2}$；　　(4) $\frac{x^2}{x^2-y^2}-\frac{2xy}{x^2-y^2}+\frac{y^2}{x^2-y^2}$.

2. 通分：

(1) $\frac{1}{2x^2y}$，$\frac{2}{3x^2}$，$\frac{3}{4xy^2}$；　　(2) $\frac{1}{xy}$，$\frac{2}{x^2y+xy^2}$；

(3) $\frac{x}{x^2-4}$，$\frac{2}{(x+2)^2}$.

3. 计算：

(1) $\frac{2}{3x^2}-\frac{5}{6x}$；　　(2) $\frac{1}{2x^2y}+\frac{2}{3x^2}-\frac{3}{4xy^2}$.

4. 计算：

(1) $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+1}$；　　(2) $\frac{y^2}{x^2-xy}+\frac{x}{y-x}$；

(3) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{2a+2b}$；　　(4) $\frac{2}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}$；

(5) $x-y+\frac{y^2}{x+y}$.

5. 一项工程，甲单独做 x h 完成，乙单独做 y h 完成，甲、乙两人合做完成这项工程需要多长时间？合做完成的时间比甲单独做少要多长时间？

B 组

6. 计算：

(1) $\frac{1}{a+1}-\frac{a+2}{a^2-1}\cdot\frac{a^2-2a+1}{a^2+4a+4}$；　　(2) $\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{2}{1-x}$.

7. 观察下面的变形规律，解答下列问题.

$$\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4\times5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5},$$

…

（1）若 n 为正整数，猜想 $\frac{1}{n(n+1)}=$_____ $-$ _____；

（2）根据上面的结论计算：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{1}{(x+2\,014)(x+2\,015)}.$$

1.5 可化为一元一次方程的分式方程

动脑筋

某校八年级学生乘车前往某景点秋游，现有两条线路可供选择：线路一全程 25 km，线路二全程 30 km；若走线路二平均车速是走线路一的1.5 倍，所花时间比走线路一少用10 min，则走线路一、二的平均车速分别为多少？

设走线路一的平均车速为 x km/h，则走线路二的平均车速为 $1.5x$ km/h. 又走线路二比走线路一少用 10 min，即

$$走线路一的时间 - 走线路二的时间 = \frac{1}{6}\ \text{h}.$$

因此，根据这一等量关系，我们可以得到如下方程：

$$\frac{25}{x} - \frac{30}{1.5x} = \frac{1}{6}.$$

像这样，分母中含有未知数的方程叫作**分式方程**(fractional equation).

议一议

分式方程$\frac{25}{x} - \frac{30}{1.5x} = \frac{1}{6}$的分母中含有未知数，我们该如何来求解呢？

联想到我们在七年级已经学过一元一次方程的解法，因此我们应通过“去分母”，将分式方程转化为一元一次方程来求解.

方程两边同乘 $6x$，得

$$25 \times 6 - 30 \times 4 = x.$$

解得 $$x = 30.$$

经检验，$x = 30$是所列方程的解.

由此可知，走线路一的平均车速为 30 km/h，走线路二的平均车速为 45 km/h.

从上面可以看出，解分式方程的关键是把含未知数的分母去掉，这可以通过在方程的两边同乘各个分式的最简公分母而达到.

例 1 解方程：$\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x}=0$.

解 方程两边同乘最简公分母 $x(x-2)$，得

$$5x-3(x-2)=0.$$

解得

$$x=-3.$$

检验：把 $x=-3$ 代入原方程，得左边$=\frac{5}{-3-2}-\frac{3}{-3}=0=$右边，因此 $x=-3$ 是原方程的解.

分式方程的解也叫作分式方程的**根**.

例 2 解方程：$\frac{1}{x-2}=\frac{4}{x^2-4}$.

解 方程两边同乘最简公分母$(x+2)(x-2)$，得

$$x+2=4.$$

解得

$$x=2.$$

检验：把 $x=2$ 代入原方程，得左边$=\frac{1}{2-2}=\frac{1}{0}$，不存在这种数. 因此，$x=2$ 不是原分式方程的根，从而原分式方程无解.

从例 2 看到，方程左边的分式的分母 $x-2$ 是最简公分母$(x+2)(x-2)$的一个因式. 这启发我们，在检验时只要把所求出的未知数的值代入最简公分母中，如果它使最简公分母的值不等于 0，那么它是原分式方程的一个根；如果它使最简公分母的值为 0，那么它不是原分式方程的根，称它是原方程的**增根**.

解分式方程有可能产生增根，因此解分式方程必须检验.

说一说

解可化为一元一次方程的分式方程的基本步骤有哪些？

可化为一元一次方程的分式方程

↓ 方程两边同乘各个分式的最简公分母

一元一次方程

↓ 求解

一元一次方程的解

↓ 检验

把一元一次方程的解代入最简公分母中，若它的值不等于 0，则这个解是原分式方程的根；若它的值等于 0，则原分式方程无解.

练习

1. 解下列方程：

(1) $\frac{5}{2x}-\frac{1}{x-3}=0$；　　(2) $\frac{x}{2x-1}+\frac{2}{1-2x}=3$；

(3) $\frac{1}{x-1}+\frac{x}{1-x}=1$；　　(4) $\frac{3}{x^2-x}=\frac{1}{x^2-1}$.

2. 解下列方程：

(1) $\frac{2}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}=0$；　　(2) $\frac{1}{3}-\frac{2}{2x-1}=\frac{1}{6x-3}$.

动脑筋

A，B 两种型号机器人搬运原料. 已知 A 型机器人比 B 型机器人每小时多搬运 20 kg，且 A 型机器人搬运 1 000 kg 所用时间与 B 型机器人搬运 800 kg 所用时间相等，求这两种机器人每小时分别搬运多少原料.

设 B 型机器人每小时搬运 x kg，则 A 型机器人每小时搬运 $(x+20)$ kg.

由“A 型机器人搬运1 000 kg 所用时间 = B 型机器人搬运 800 kg 所用时间”这一等量关系，则可列出如下方程：

$$\frac{1\,000}{x+20}=\frac{800}{x}.$$

方程两边同乘最简公分母 $x(x+20)$，得

$$1\,000x=800(x+20).$$

解得 $$x=80.$$

检验：把 $x=80$ 代入 $x(x+20)$ 中，它的值不等于 0，因此 $x=80$ 是原方程的根，且符合题意.

由此可知，B 型机器人每小时搬运原料 80 kg，A 型机器人每小时搬运原料 100 kg.

例 3 国家实施高效节能电器的财政补贴政策，某款空调在政策实施后，客户每购买一台可获得补贴 200 元，若同样用 11 万元购买此款空调，补贴后可购买的台数比补贴前多 10%，则该款空调补贴前的售价为多少元？

分析 本题涉及的等量关系是：

补贴前 11 万元购买的台数 × (1 + 10%) = 补贴后 11 万元购买的台数.

解 设该款空调补贴前的售价为每台 x 元，由上述等量关系可得如下方程：

$$\frac{110\,000}{x}\times(1+10\%)=\frac{110\,000}{x-200},$$

即 $$\frac{1.1}{x}=\frac{1}{x-200}.$$

方程两边同乘最简公分母 $x(x-200)$，得

$$1.1(x-200)=x.$$

解得 $$x=2\,200.$$

检验：把 $x=2\,200$ 代入 $x(x-200)$ 中，它的值不等于 0，因此 $x=2\,200$ 是原方程的根，且符合题意.

答：该款空调补贴前的售价为每台 2 200 元.

练习

1. 某单位盖一座楼房，如果由建筑一队施工，那么 180 天就可盖成；如果由建筑一队、二队同时施工，那么 30 天能完成工程总量的$\frac{3}{10}$. 现若由二队单独施工，则需要多少天才能盖成？

2. 一艘轮船在两个码头之间航行，顺水航行 60 km 所需时间与逆水航行 48 km 所需时间相同. 已知水流的速度是 2 km/h，求轮船在静水中航行的速度.

习题 1.5

A 组

1. 解下列方程：

(1) $\frac{3x-1}{x+2}=-4$；　　(2) $\frac{7}{x-1}+3=\frac{x}{x-1}$；

(3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{1.5x}=\frac{5}{6}$；　　(4) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2+x}=0$.

2. 小亮和小青从同一地点出发跑 800 m，小亮的速度是小青的 1.25 倍，小亮比小青提前 40 s 到达终点. 试问：小亮和小青的速度各是多少？

3. 甲、乙两单位为爱心基金捐款，其中甲单位捐款 4 800 元，乙单位捐款 6 000 元. 已知乙单位捐款人数比甲单位多 50 人，且两单位人均捐款数相等. 问这两单位共有多少人捐款？人均捐款额是多少？

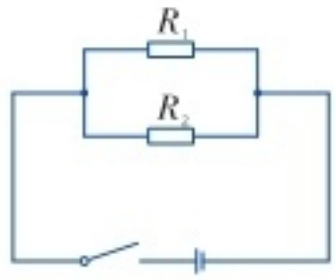
4. 某校招生录取时，为了防止数据录入出错，2 640 名学生的成绩数据分别由两位录入员各向计算机录入一遍，然后让计算机比较两人的录入是否一致. 已知甲的录入速度是乙的 2 倍，结果甲比乙少用 2 h 录完. 问这两个操作员每小时各能录入多少名学生的成绩？

B 组

5. 解下列方程：

（1）$\frac{x-3}{x-2}+1=\frac{3}{2-x}$；

（2）$\frac{14}{x+8}=\frac{4}{x}+\frac{10}{3x+24}$.



（第 6 题图）

6. 如图，把电阻值分别为 R_1，R_2 的两电阻并联后接入某电路中，已知其总电阻值 R 满足 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$，求 R 的表达式.

7. 某商场新进一种商品，第一个月将此商品的进价提高 20 %作为销售价，总获利 600 元. 第二个月商场搞促销活动，将商品的进价提高 15 %作为销售价，第二个月销量比第一个月增加 40 件，并且多获利 150 元. 问此商品的进价是多少元？商场第二个月销售该商品多少件？

小结与复习

回顾

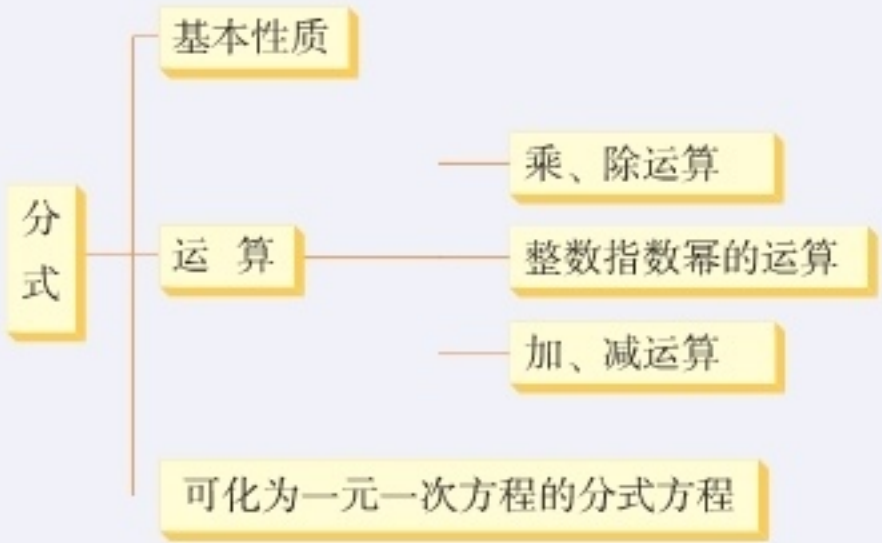
1. 举例说明分式的基本性质、运算法则.

2. 举例说明如何利用分式的基本性质进行约分和通分.

3. 整数指数幂有哪些运算法则?

4. 解可化为一元一次方程的分式方程的基本思路是什么?解分式方程时为什么要检验?

本章知识结构



注意

1. 分式与分数有许多相似之处，在学习分式的性质与运算时，可类比分数.

2. 解分式方程的关键在于去分母，这时可能产生增根，因此必须检验.除了要看求出的未知数的值是否使最简公分母的值为 0 外，在实际问题中还需检查求出的根是否符合实际问题的要求.

复习题 1

A 组

1. 若分式$\frac{x^2-4}{2x-5}$的值为零，求 x 的值.

2. 先约分，再求值：$\frac{2x+6}{x^2-4x+4}\cdot\frac{x-2}{x^2+3x}$，其中 $x=3$.

3. 计算：

(1) $6a^3b\cdot\frac{-3b}{2a}$；

(2) $(-24x^5y^3)\div 36x^4y^4$；

(3) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+x}\cdot\frac{x+1}{x^2-y^2}$；

(4) $\left(\frac{xz^2}{-y}\right)^3\cdot\left(\frac{y^2}{xz}\right)^4\div\left(\frac{xy}{-2z}\right)^3$.

4. 计算：

(1) -2^0；

(2) $\frac{5x^3y^5}{-2x^2y}$；

(3) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}$；

(4) $(-2xy^3)^{-4}$.

5. 用科学记数法表示下列各数：

(1) 0.000 001 68；

(2) 0.000 000 052.

6. 计算：

(1) $\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x+2}$；

(2) $\frac{8a}{a^2-b^2}+\frac{b}{ab+b^2}$；

(3) $\frac{x+1}{x^2-2x+1}-\frac{x-1}{x^2-1}$；

(4) $\frac{3}{y^2-1}-\frac{2}{y+1}-\frac{1}{y-1}$.

7. 解下列方程：

(1) $\frac{2x+1}{3-x}=-1$；

(2) $\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x^2+x}$.

8. 为了防止水土流失，某村计划在荒坡上种 960 棵树，由于青年志愿者的支援，每天种树的棵数比原计划多$\frac{1}{3}$，结果提前 4 天完成任务，原计划每天种多少棵树？

9. 科学研究表明：树叶在光合作用后产生的分泌物能够吸附空气中的悬浮

颗粒物，具有滞尘净化空气的作用. 已知一片银杏树叶一年的平均滞尘量比一片国槐树叶一年的平均滞尘量的 2 倍少 4 mg，一年滞尘 1 000 mg 所需的银杏树叶的片数与一年滞尘 550 mg 所需的国槐树叶的片数相同，求一片国槐树叶一年的平均滞尘量.

B 组

10. 解下列方程：

（1）$\frac{3}{2}-\frac{1}{3x-1}=\frac{1}{6x-2}$；　　（2）$\frac{4}{x+4}=\frac{3}{x}+\frac{1}{x+12}$.

11. 某学校后勤人员到文具店给八年级学生购买考试用文具包，该文具店规定一次购买 400 个以上，可享受八折优惠. 若给每人购买一个，不能享受八折优惠，需付款 1 936 元；若再多买 88 个就可享受八折优惠，并且同样只需付款 1 936 元. 求该校八年级学生的总人数.

C 组

12.（1）填写下表：

a	b	$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$	$\frac{4}{ab}$
1	1		
1 2	2 2		
2	3		
3	3		
$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$		

（2）请任意写下两个正数，分别作为 a，b 的值，计算：$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$，$\frac{4}{ab}$.

（3）你能猜出当正数 a，b 之间满足什么关系时，下面的等式成立？

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{4}{ab}.$$

你能讲出道理吗？

第2章

三角形

三角形是简单的平面图形之一，在我们的生活中，随处可见三角形的形象. 三角形也是一种最基本的几何图形，它是认识许多其他图形的基础.

三角形的三边之间、三角之间分别有什么关系？怎样的两个三角形称为全等三角形？如何判定两个三角形全等呢？这些就是本章将要学习的主要内容.

2.1 三角形

观察

观察图 2-1，找一找图中的三角形，并把它们勾画出来．你还能举出一些实例吗？



图 2-1

不在同一直线上的三条线段首尾相接所构成的图形叫作**三角形**(triangle).

三角形可用符号“△”来表示，如图2-2中的三角形可记作“$\triangle ABC$”，读作“三角形ABC”．其中，点A，B，C叫作$\triangle ABC$的**顶点**；$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$叫作$\triangle ABC$的**内角**(简称$\triangle ABC$的**角**)；线段AB，BC，CA叫作$\triangle ABC$的**边**．通常$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边BC，AC，AB可分别用a，b，c来表示.

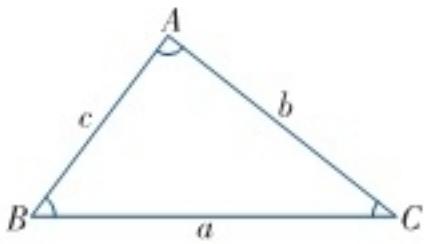


图 2-2

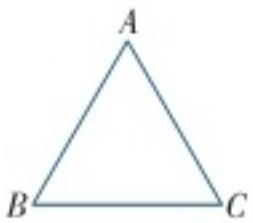
三角形中，有的三边各不相等，有的两边相等，有的三边都相等.

两条边相等的三角形叫作**等腰三角形**．在等腰三角形中，相等的两边叫作**腰**，另外一边叫作**底边**，两腰的夹角叫作**顶角**，腰和底边的夹角叫作**底角**，如图 2-3.

等腰三角形

图 2-3

三边都相等的三角形叫作**等边三角形**(或正三角形). 等边三角形是特殊的等腰三角形——腰和底边相等的等腰三角形，如图 2–4.



等边三角形

图 2–4

动脑筋

在一个三角形中，任意两边之和与第三边的长度之间有怎样的大小关系？为什么？

如图2–2，在$\triangle ABC$中，BC是连接B，C两点的一条线段，由基本事实“两点之间线段最短”可得

$$AB+AC>BC.$$

同理可得

$$AB+BC>AC,$$

$$AC+BC>AB.$$

一般地，我们可以得出：

三角形的任意两边之和大于第三边.

做一做

有三根木棒，其长度分别为 2 cm，3 cm，6 cm，它们能否首尾相接构成一个三角形？

例 1 如图2–5，D是$\triangle ABC$的边AC上一点，$AD=BD$，试判断AC与BC的大小.

解 在$\triangle BDC$中，

有 $BD+DC>BC$ (三角形的任意两边之和大于第三边).

又 $AD=BD$,

则 $BD+DC=AD+DC=AC$,

所以 $AC>BC$.

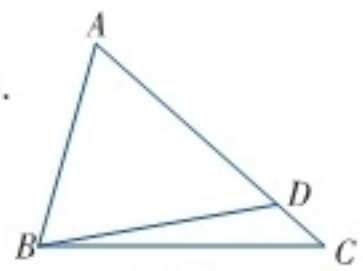
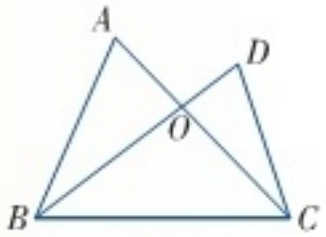


图 2–5

练习

1. (1) 如图，图中有几个三角形？把它们分别表示出来.

(2) 如图，在△DBC中，写出∠D的对边，BD边的对角.



(第1题图)

2. 三根长分别为 2 cm，5 cm，6 cm的小木棒能首尾相接构成一个三角形吗？

从三角形的一个顶点向它的对边所在的直线作垂线，顶点和垂足之间的线段叫作三角形的**高线**(altitude)，简称三角形的**高**. 如图 2-6，$AH \perp BC$，垂足为点 H，则线段 AH 是△ABC 的 BC 边上的高.

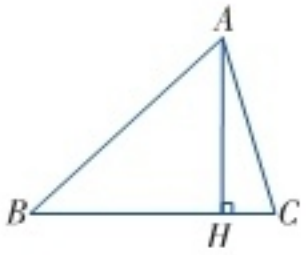


图 2-6

做一做

如图 2-7，试画出图中△ABC的 BC 边上的高.

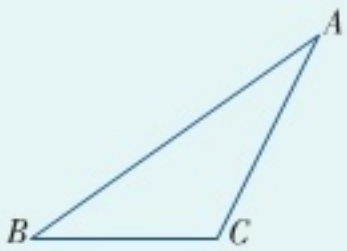


图 2-7

在三角形中，一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点与交点之间的线段叫作三角形的**角平分线** (angular bisector). 如图2-8，∠BAD=∠CAD，则线段 AD 是△ABC 的一条角平分线.

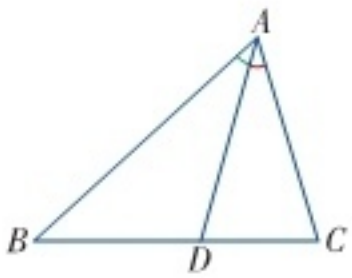


图 2-8

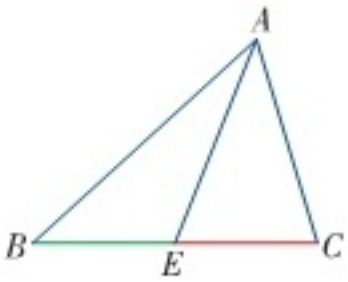


图 2-9

在三角形中，连接一个顶点和它的对边中点的线段叫作三角形的**中线** (median). 如图2-9，$BE=EC$，则线段 AE 是 △ABC 的 BC 边上的中线.

做一做

任意画一个三角形，画出三边上的中线. 你发现了什么？

事实上，三角形的三条中线相交于一点. 我们把这三条中线的交点叫作三角形的**重心**. 如图 2-10，$\triangle ABC$ 的三条中线 AD，BE，CF 相交于点 G，则点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心.

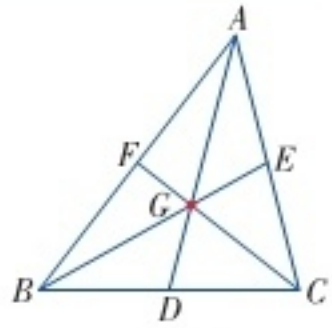


图 2-10

例 2 如图 2-11，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，AE 是 $\triangle ABC$ 的高.

(1) 图中共有几个三角形？请分别列举出来.

(2) 其中哪些三角形的面积相等？

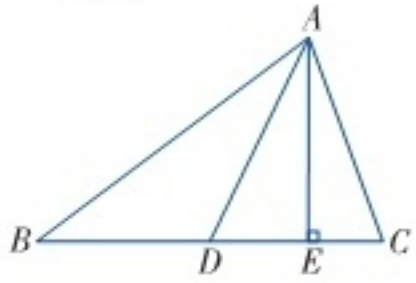


图 2-11

解 (1) 图中有 6 个三角形，它们分别是：$\triangle ABD$，$\triangle ADE$，$\triangle AEC$，$\triangle ABE$，$\triangle ADC$，$\triangle ABC$.

(2) 因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，

所以 $BD = DC$.

因为 AE 是 $\triangle ABC$ 的高，也是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的高，

又 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AE$，$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}DC \cdot AE$，

所以 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADC}$.

练习

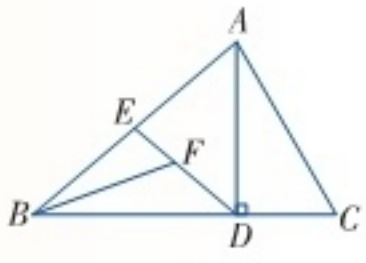
1. 利用三角尺(或直尺)、量角器任意画出一个三角形，并画出其中一条边上的中线、高以及这条边所对的角的平分线.

2. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的高，DE 是 $\triangle ADB$ 的中线，BF 是 $\triangle EBD$ 的角平分线，根据已知条件填空：

(1) $\angle ADB = \angle$_____ = _____°；

(2) $BE =$ _____ $= \frac{1}{2}$ _____；

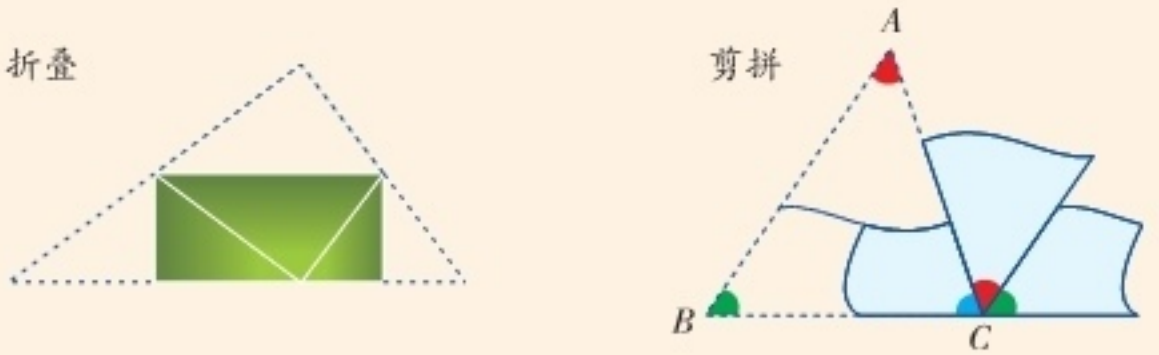
(3) $\angle DBF = \angle$_____ $= \frac{1}{2} \angle$_____.



(第 2 题图)

动脑筋

在小学，我们通过对一个三角形进行折叠、剪拼等操作(如图2–12)，知道三角形的内角和是180°，你能说出这些方法的原理吗？



折叠三角形纸板，可以把它的三个角拼成一个角.

(1)

可以将∠A，∠B剪下并移至顶点C处拼接成一个角.

(2)

图 2–12

上述两种操作都是将三角形的三个内角拼到一起构成一个平角.

由此受到启发：

如图 2–13，将△ABC 的边 BC 所在的直线平移，使其像经过点 A，得到直线 B′C′.

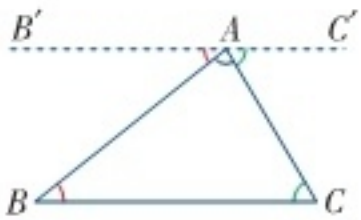


图 2–13

因为直线在平移下的像是与它平行的直线，

所以　$B'C' \parallel BC$.

则　$\angle B'AB = \angle B$,

　　$\angle C'AC = \angle C$.

又　$\angle B'AB + \angle BAC + \angle C'AC = 180°$,

所以　$\angle B + \angle BAC + \angle C = 180°$.

由此得到：

三角形的内角和等于180°.

例 3 在△ABC 中，∠A 的度数是∠B 的度数的 3 倍，∠C 比∠B 大 15°，求∠A，∠B，∠C 的度数.

解 设$\angle B$为$x°$，则$\angle A$为$(3x)°$，$\angle C$为$(x+15)°$，从而有

$$3x+x+(x+15)=180.$$

解得 $x=33$.

所以 $3x=99$，$x+15=48$.

答：$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的度数分别为99°，33°，48°.

议一议

一个三角形的三个内角中，最多有几个直角？最多有几个钝角？

三角形的内角和等于180°，因此最多有一个直角或一个钝角.

三角形中，三个角都是锐角的三角形叫**锐角三角形**，有一个角是直角的三角形叫**直角三角形**，有一个角是钝角的三角形叫**钝角三角形**，如图2-14.

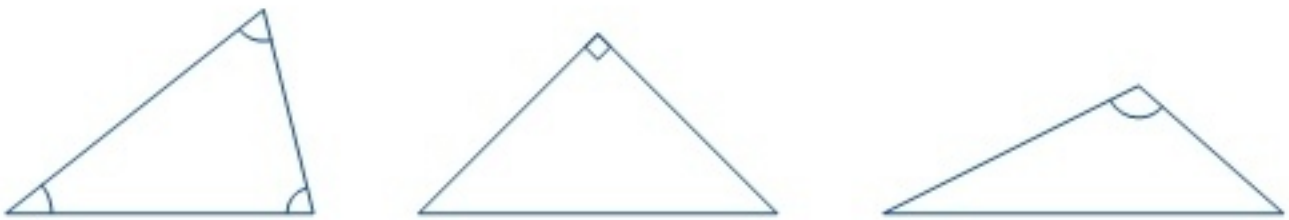


图 2-14

直角三角形可用符号“Rt△”来表示，例如直角三角形ABC可以记作“Rt△ABC”. 在直角三角形中，夹直角的两边叫作直角边，直角的对边叫作斜边. 两条直角边相等的直角三角形叫作等腰直角三角形.

如图2-15，把$\triangle ABC$的一边BC延长，得到$\angle ACD$. 像这样，三角形的一边与另一边的延长线所组成的角，叫作三角形的**外角**(exterior angle).

对外角$\angle ACD$来说，$\angle ACB$是与它相邻的内角，$\angle A$，$\angle B$是与它不相邻的内角.

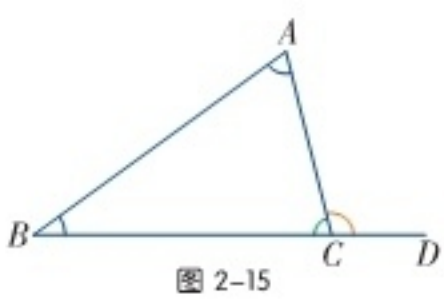


图 2-15

探究

在图 2–15 中，外角$\angle ACD$和与它不相邻的内角$\angle A$，$\angle B$之间有什么大小关系？

我觉得可以利用“三角形的内角和等于180°”的结论.

因为 $\angle ACD+\angle ACB=180°$，

$\angle A+\angle B+\angle ACB=180°$，

所以 $\angle ACD-\angle A-\angle B=0$（等量减等量，差相等）.

于是 $\angle ACD=\angle A+\angle B$.

由此得到：

三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.

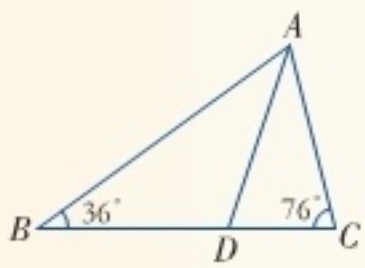
练习

1. 填空：

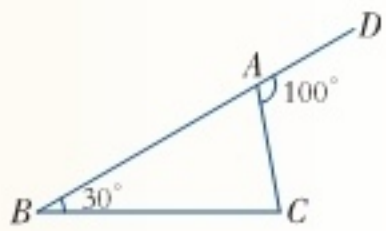
（1）在$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，$\angle B=\angle C$，则$\angle B=$_____；

（2）在$\triangle ABC$中，$\angle A-\angle B=50°$，$\angle C-\angle B=40°$，则$\angle B=$_____.

2. 如图，AD是$\triangle ABC$的角平分线，$\angle B=36°$，$\angle C=76°$，求$\angle DAC$的度数.



（第 2 题图）

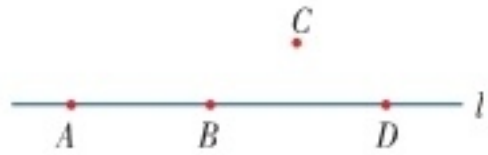


（第 3 题图）

3. 如图，$\angle CAD=100°$，$\angle B=30°$，求$\angle C$的度数.

习题 2.1

A 组



(第 1 题图)

1. 如图，点 A，B，D 在直线 l 上，点 C 在直线 l 外，那么过 A，B，C 三点可以作一个三角形吗？过 A，B，D 三点呢？为什么？

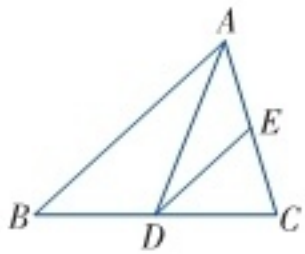
2. 下列长度的三根小木棒能构成三角形吗？为什么？

（1）3 cm，5 cm，10 cm；　　（2）5 cm，4 cm，8 cm.

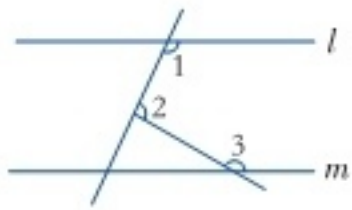
3. 如图，AD 是△ABC 的中线，DE是△ADC 的中线.

（1）图中有几对面积相等的三角形？把它们写出来.

（2）如果 $S_{\triangle ABD}=24\ \text{cm}^2$，则 $S_{\triangle ADE}=$_____.



(第 3 题图)



(第 4 题图)

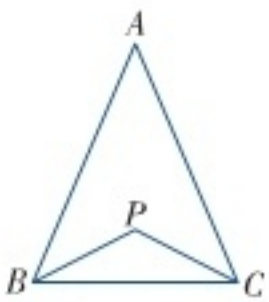
4. 如图，$l /\!/ m$，$\angle 1=115°$，$\angle 2=95°$，求$\angle 3$ 的度数.

5. 在△ABC 中，$\angle ABC=\angle ACB=2\angle A$，$BD$ 是 AC 边上的高，求$\angle DBC$ 的度数.

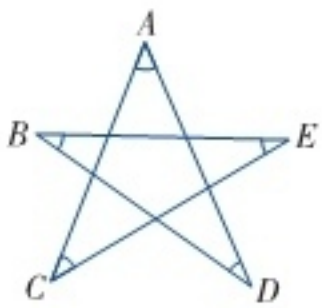
B 组

6. 如果一个等腰三角形的两边长分别是 5 cm 和 6 cm，那么此三角形的周长是多少？

7. 如图，在△ABC 中，$\angle A=40°$，$\angle ABC$ 与$\angle ACB$ 的平分线相交于点 P，求$\angle BPC$ 的度数.



(第 7 题图)



(第 8 题图)

8. 如图，求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$等于多少度.

2.2 命题与证明

前面我们学习了许多有关三角形的概念(如三角形、等腰三角形、等边三角形以及三角形的高线、中线、角平分线等)，如：

不在同一直线上的三条线段首尾相接所构成的图形叫作三角形；

三角形的一边与另一边的延长线所组成的角叫作三角形的外角.

像这样，对一个概念的含义加以描述说明或作出明确规定的语句叫作这个概念的**定义**(definition). 例如：

“把数与表示数的字母用运算符号连接而成的式子叫作代数式”是“代数式”的定义.

“同一平面内没有公共点的两条直线叫作平行线”是“平行线”的定义.

说一说

说出下列概念的定义：

(1) 方程；　　(2) 三角形的角平分线.

在现实生活中，我们经常要对一件事情作出判断. 数学中同样有许多问题需要我们作出判断.

议一议

下列叙述事情的语句中，哪些是对事情作出了判断？

(1) 三角形的内角和等于 180°；　　(2) 如果 $|a|=3$，那么 $a=3$；

(3) 1 月份有 31 天；　　(4) 作一条线段等于已知线段；

(5) 一个锐角与一个钝角互补吗？

一般地，对某一件事情作出判断的语句(陈述句)叫作**命题**(proposition). 例如，上述语句(1)，(2)，(3)都是命题，语句(4)，(5) 没有对事情作出判断，就不是命题.

观察

下列命题的表述形式有什么共同点？

(1) 如果 $a=b$ 且 $b=c$，那么 $a=c$；

(2) 如果两个角的和等于90°，那么这两个角互为余角.

它们的表述形式都是“如果……，那么……”.

命题通常写成“如果……，那么……”的形式，其中“如果”引出的部分就是**条件**(condition)，“那么”引出的部分就是**结论**(conclusion).

例如，对于上述命题(2)，“两个角的和等于 90°”就是条件，“这两个角互为余角”就是结论.

有时为了叙述的简便，命题也可以省略关联词“如果”、“那么”. 如：

“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”可以简写成“对顶角相等”；

“如果两个角是同一个角的余角，那么这两个角相等”可以简写成“同角的余角相等”.

做一做

(1) 指出下列命题的条件和结论，并改写成“如果……，那么……”的形式：

命　题	条　件	结　论
① 能被 2 整除的数是偶数. ② 有公共顶点的两个角是对顶角. ③ 两直线平行，同位角相等.		
④ 同位角相等，两直线平行.		

(2) 上述命题③与④的条件与结论之间有什么联系？

命题③与④的条件与结论互换了位置.

对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，我们把这样的两个命题称为**互逆命题**，其中一个叫作**原命题**，另一个叫作**逆命题**. 例如，上述命题③与④就是互逆命题.

从上我们可以看出，只要将一个命题的条件和结论互换，就可得到它的逆命题，所以每个命题都有逆命题.

练习

1. 下列语句中，哪些是命题，哪些不是命题？

(1) 如果 $x=3$，求 $\frac{x}{3-2x}$ 的值；

(2) 两点之间线段最短；

(3) 任意一个三角形的三条中线都相交于一点吗？

(4) 过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

2. 将下列命题改写成“如果……，那么……”的形式.

(1) 两条直线相交，只有一个交点；

(2) 个位数字是 5 的整数一定能被 5 整除；

(3) 互为相反数的两个数之和等于 0；

(4) 三角形的一个外角大于它的任何一个内角.

3. 写出下列命题的逆命题：

(1) 若两数相等，则它们的绝对值也相等；

(2) 如果 m 是整数，那么它也是有理数；

(3) 两直线平行，内错角相等；

(4) 两边相等的三角形是等腰三角形.

议一议

下列命题中，哪些正确，哪些错误？并说一说你的理由.

(1) 每一个月都有 31 天；

(2) 如果 a 是有理数，那么 a 是整数.

(3) 同位角相等；

(4) 同角的补角相等.

上面四个命题中，命题(4)是正确的，命题(1)，(2)，(3)都是错误的. 我们把正确的命题称为**真命题**(true proposition)，把错误的命题称为**假命题**(false proposition).

要判断一个命题是真命题，常常要从命题的条件出发，通过讲道理（推理），得出其结论成立，从而判断这个命题为真命题，这个过程叫**证明**(proof). 例如，命题“同角的补角相等”通过推理可以判断出它是真命题(关于此命题的推理过程见七年级上册P128).

要判断一个命题是假命题，只需举出一个例子(反例)，它符合命题的条件，但不满足命题的结论，从而就可判断这个命题为假命题. 我们通常把这种方法称为“**举反例**”.

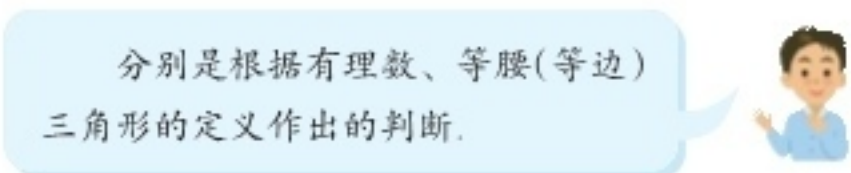
例如，要判断命题“如果 a 是有理数，那么 a 是整数”是一个假命题，我们举出“0.1 是有理数，但是 0.1 不是整数”这一例子即可判断该命题是假命题.

说一说

判断下列命题为真命题的依据是什么？

(1) 如果 a 是整数，那么 a 是有理数；

(2) 如果△ABC 是等边三角形，那么△ABC 是等腰三角形.



从上可以看到，在判断一个命题是否为真命题时常常要利用一些概念的定义，但是光用定义只能判断一些很简单的命题是否为真. 事实上，对于绝大多数命题的真假的判断，光用定义是远远不够的.

古希腊数学家欧几里得(Euclid，约公元前330—前275年)对他那个时代的数学知识作了系统的总结，他挑选了一些人们在长期实践中总结出来的公认的真命题作为证明的原始依据，称这些真命题为公理.

本书中，我们把少数真命题作为**基本事实**. 例如，两点确定一条直线；两点之间线段最短等.

人们可以用定义和基本事实作为推理的出发点，去判断其他命题的真假. 例如在七年级下册，我们从基本事实出发证明了一些有关平行线的结论.

基本事实 同位角相等，两直线平行.	→	内错角相等，两直线平行. 同旁内角互补，两直线平行.

我们把经过证明为真的命题叫作**定理**(theorem).

例如，“三角形的内角和等于180°”称为“三角形内角和定理”.

定理也可以作为判断其他命题真假的依据，由某定理直接得出的真命题叫作这个定理的**推论**.

例如，“三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和”称为“三角形内角和定理的推论”，也可称为“三角形外角定理”.

当一个命题是真命题时，它的逆命题不一定是真命题.

例如，“如果∠1和∠2是对顶角，那么∠1=∠2”是真命题，但它的逆命题“如果∠1=∠2，那么∠1和∠2是对顶角”就是假命题.

如果一个定理的逆命题能被证明是真命题，那么就叫它是原定理的**逆定理**，这两个定理叫作**互逆定理**.

我们前面学过的定理中就有互逆的定理，例如，“内错角相等，两直线平行”和“两直线平行，内错角相等”是互逆的定理.

练习

1. 下列命题中，哪些是真命题，哪些是假命题？请说说你的理由.

(1) 绝对值最小的数是 0；

(2) 相等的角是对顶角；

(3) 一个角的补角大于这个角；

(4) 在同一平面内，如果直线 $a \perp l$，$b \perp l$，那么 $a // b$.

2. 举反例说明下列命题是假命题：

(1) 两个锐角的和是钝角；

(2) 如果数 a，b 的积 $ab>0$，那么 a，b 都是正数；

(3) 两条直线被第三条直线所截，同位角相等.

3. 试写出两个命题，要求它们不仅是互逆命题，而且都是真命题.

观察、操作、实验是人们认识事物的重要手段，而且人们可以从中猜测发现出一些结论.

做一做

采用剪拼或度量的方法，猜测“三角形的外角和”等于多少度.

从剪拼或度量可以猜测三角形的三个外角之和等于 360°(如图 2-16)，但是剪拼时难以真正拼成一个周角，只是接近周角；分别度量这三个角后再相加，结果可能接近 360°，但不能很准确地都得到 360°.

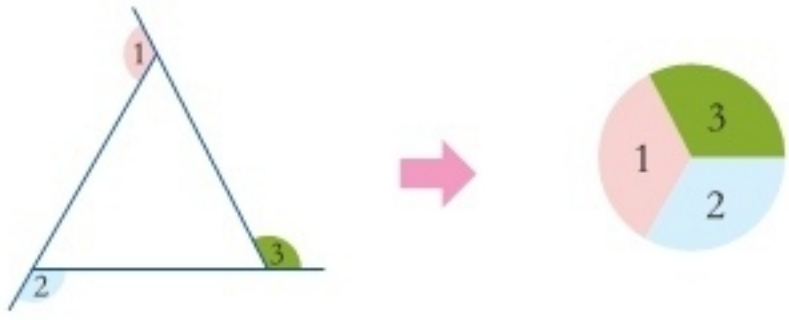


图 2-16

另外，由于不同形状的三角形有无数个，我们也不可能用剪拼或度量的方法来一一验证，因此，我们只能猜测任何一个三角形的外角和都为 360°.

此时猜测出的命题仅仅是一种猜想，未必都是真命题. 要确定这个命题是真命题，还需要通过推理的方法加以证明.

数学上证明一个命题时，通常从命题的条件出发，运用定义、基本事实以及已经证明了的定理和推论，通过一步步的推理，最后证实这个命题的结论成立. 证明的每一步都必须要有根据.

动脑筋

证明命题“三角形的外角和为 360°”是真命题.

在分析出这一命题的条件和结论后，我们就可以按如下步骤进行：

已知： 如图2-17，$\angle BAF$，$\angle CBD$和$\angle ACE$分别是$\triangle ABC$的三个外角.

求证： $\angle BAF+\angle CBD+\angle ACE=360°$.

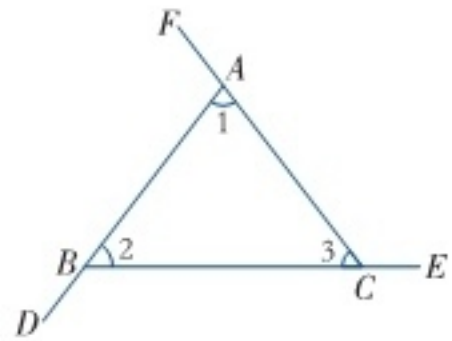


图 2-17

证明 如图2-17，

∵[①] $\angle BAF=\angle 2+\angle 3$，

$\angle CBD=\angle 1+\angle 3$，

$\angle ACE=\angle 1+\angle 2$（三角形外角定理），

∴ $\angle BAF+\angle CBD+\angle ACE=2(\angle 1+\angle 2+\angle 3)$（等式的性质）.

∵ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$（三角形内角和定理），

∴ $\angle BAF+\angle CBD+\angle ACE=2\times 180°=360°$.

证明与图形有关的命题时，一般有以下步骤：

第一步 —根据题意→ 画出图形

第二步 —根据命题的条件和结论，结合图形→ 写出已知、求证

第三步 —通过分析，找出证明的途径→ 写出证明的过程

① 符号“∵”表示“因为”，“∴”表示“所以”.

例 1 已知：如图 2-18，在△ABC 中，$\angle B=\angle C$，点 D 在线段 BA 的延长线上，射线 AE 平分$\angle DAC$.

求证：$AE /\!/ BC$.

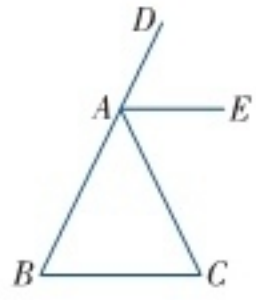


图 2-18

证明 ∵ $\angle DAC=\angle B+\angle C$（三角形外角定理），

$\angle B=\angle C$（已知），

∴ $\angle DAC=2\angle B$（等式的性质）.

又∵ AE 平分$\angle DAC$（已知），

∴ $\angle DAC=2\angle DAE$（角平分线的定义）.

∴ $\angle DAE=\angle B$（等量代换）.

∴ $AE /\!/ BC$（同位角相等，两直线平行）.

例 2 已知：$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 是△ABC 的内角.

求证：$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 中至少有一个角大于或等于 60°.

分析 这个命题的结论是“至少有一个”，也就是说可能出现“有一个”、“有两个”、“有三个”这三种情况. 如果直接来证明，将很繁琐，因此，我们将从另外一个角度来证明.

证明 假设$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 中没有一个角大于或等于 60°，

即 $\angle A<60°$，$\angle B<60°$，$\angle C<60°$，

则 $\angle A+\angle B+\angle C<180°$.

这与“三角形的内角和等于 180°”矛盾，所以假设不正确.

因此，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 中至少有一个角大于或等于 60°.

像这样，当直接证明一个命题为真有困难时，我们可以先假设命题不成立，然后利用命题的条件或有关的结论，通过推理导出矛盾，从而得出假设不成立，即所证明的命题正确，这种证明方法称为**反证法**(reduction to absurdity).

反证法是一种间接证明的方法，其基本的思路可归结为“否定结论，导出矛盾，肯定结论”.

练习

1. 在括号内填上理由.

已知：如图，$\angle A+\angle B=180°$.

求证：$\angle C+\angle D=180°$.

证明：$\because$ $\angle A+\angle B=180°$（已知），

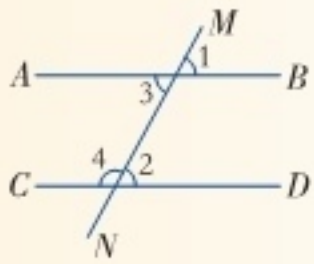
$\therefore$ $AD\parallel BC$（　　）.

$\therefore$ $\angle C+\angle D=180°$（　　）.

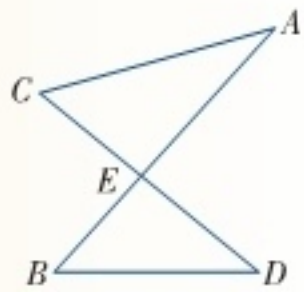
（第 1 题图）

2. 已知：如图，直线 AB，CD 被直线 MN 所截，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$\angle 2=\angle 3$，$\angle 3+\angle 4=180°$.



（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. 已知：如图，AB 与 CD 相交于点 E.

求证：$\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$.

习题 2.2

A 组

1. 把下列命题改写成“如果……，那么……”的形式.

（1）同旁内角互补，两直线平行；

（2）$a+b=0$，则 a 与 b 互为相反数；

（3）平行于同一条直线的两条直线平行.

2. 指出下列命题的条件和结论.

（1）如果两个角的和等于一个平角（180°），那么这两个角互为补角；

（2）成轴对称的两个图形中，对应点的连线被对称轴垂直平分；

（3）内错角相等，两直线平行.

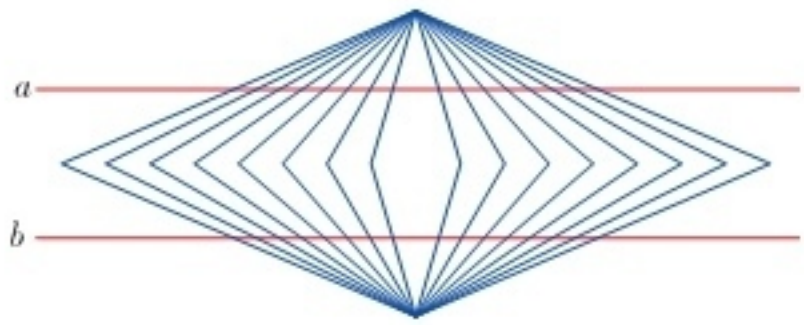
3. 判断下列命题的真假，并说出理由.

（1）如果 $a+b=0$，那么 $a=b=0$；

（2）有公共顶点的两个角是对顶角；

（3）两直线平行，同旁内角互补.

4. 先观察图形，再用所学的知识验证直线 a，b 是否平行.



（第 4 题图）

5. 观察下面的计算：

$$2\times\frac{2}{1}=4,\quad 2+\frac{2}{1}=4;$$

$$3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2},\quad 3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2};$$

$$4\times\frac{4}{3}=\frac{16}{3},\quad 4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3};$$

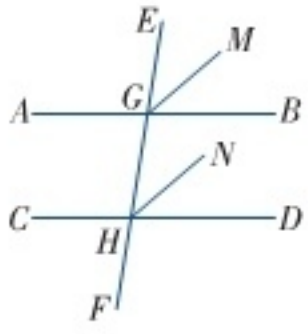
$$5\times\frac{5}{4}=\frac{25}{4},\quad 5+\frac{5}{4}=\frac{25}{4}.$$

根据上面的计算，你能作出什么猜测？你将用什么方法来判断你的猜想是正确的？

6. 已知：如图，$AB\parallel DC$，$AD\parallel BC$.

求证：$\angle A=\angle C$.

（第 6 题图）



（第 7 题图）

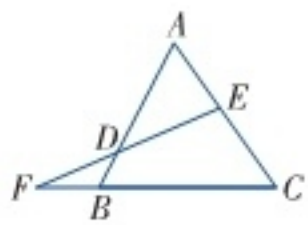
7. 已知：如图，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，$AB\parallel CD$，交点分别为 G，H，射线 GM 平分 $\angle EGB$，射线 HN 平分 $\angle EHD$.

求证：$GM\parallel HN$.

B 组

8. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=\angle ABC$，直线EF分别交$\triangle ABC$的边AB，AC和CB的延长线于点D，E，F.

求证：$\angle F+\angle FEC=2\angle A$.



(第 8 题图)

9. 已知：$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$是$\triangle ABC$的内角.

求证：$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$中至多有一个角是钝角.

2.3 等腰三角形

我们前面已经学习了三角形的一些性质，那么等腰三角形除了具有一般三角形的性质外，还具有哪些特殊的性质呢？

探究

任意画一个等腰三角形 ABC，其中 $AB=AC$，如图 2-19. 作 $\triangle ABC$ 关于顶角平分线 AD 所在直线的轴反射，由于 $\angle 1=\angle 2$，$AB=AC$，因此：

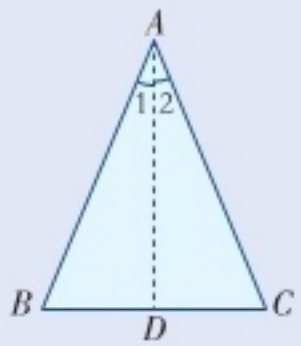


图 2-19

射线 AB 的像是射线 AC，射线 AC 的像是射线____；

线段 AB 的像是线段 AC，线段 AC 的像是线段____；

点 B 的像是点 C，点 C 的像是点____；

线段 BC 的像是线段 CB.

从而等腰三角形 ABC 关于直线____对称.

由于点 D 的像是点 D，因此线段 DB 的像是线段____，从而 AD 是底边 BC 上的____.

由于射线 DB 的像是射线 DC，射线 DA 的像是射线____，因此 $\angle BDA$ ___ $\angle CDA=$____°，从而 AD 是底边 BC 上的____.

由于射线 BA 的像是射线 CA，射线 BC 的像是射线____，因此 $\angle B$____$\angle C$.

由此得到等腰三角形的性质定理：

等腰三角形是轴对称图形，对称轴是顶角平分线所在的直线.

等腰三角形底边上的高、中线及顶角平分线重合(简称“三线合一”).

等腰三角形的两底角相等(简称“等边对等角”).

动脑筋

如图 2-20，$\triangle ABC$ 是等边三角形，那么 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的大小之间有什么关系呢？

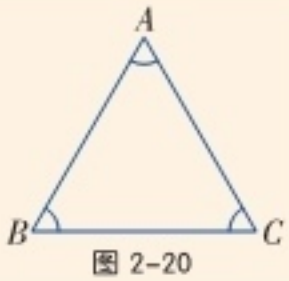


图 2-20

如图 2-20，因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，

所以 $AB=BC=AC$，

从而 $\angle C=\angle A=\angle B$.

由三角形内角和定理可得：

$$\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ.$$

由此得到等边三角形的如下性质：

等边三角形的三个内角相等，且都等于 60°.

由于等边三角形是特殊的等腰三角形，因此等边三角形是轴对称图形，它有三条对称轴，分别是三个内角的平分线所在的直线(如图2-21).

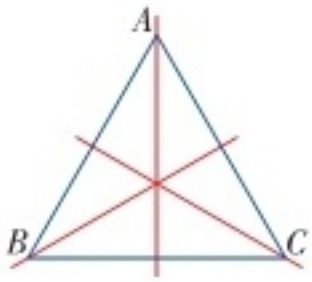


图 2-21

例 1 已知：如图 2-22，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D，E 在边 BC 上，且 $AD=AE$.

求证：$BD=CE$.

证明 作 AF[①] $\perp BC$，垂足为点 F，则 AF 是等腰三角形 ABC 和等腰三角形 ADE 底边上的高，也是底边上的中线.

$\therefore$ $BF=CF$，

$DF=EF$，

$\therefore$ $BF-DF=CF-EF$，

即 $BD=CE$.

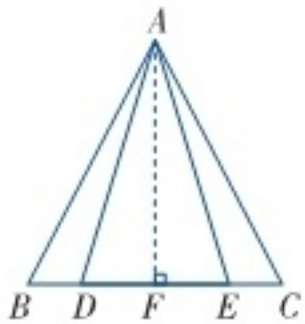


图 2-22

① 在原来图形上添画的线叫辅助线，辅助线通常画成虚线.

议一议

如图 2-23 的三角测平架中，$AB=AC$，在 BC 的中点 D 挂一个重锤，自然下垂，调整架身，使点 A 恰好在铅垂线上.

（1）AD 与 BC 是否垂直，试说明理由；

（2）这时 BC 处于水平位置，为什么？

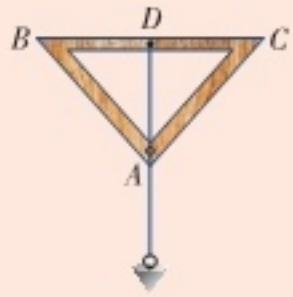
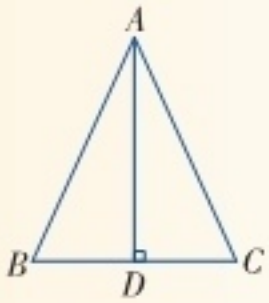


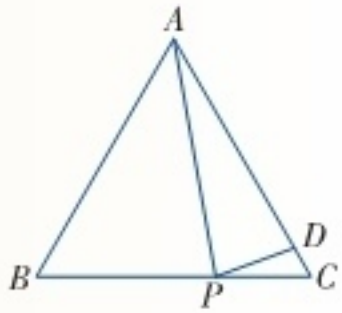
图 2-23

练习

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 为 BC 边上的高，$\angle BAC=49°$，$BC=4$，求 $\angle BAD$ 的度数及 DC 的长.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，点 P 为等边三角形 ABC 的边 BC 上一点，且 $\angle APD=80°$，$AD=AP$，求 $\angle DPC$ 的度数.

探究

我们知道，等腰三角形的两底角相等. 反过来，两个角相等的三角形是等腰三角形吗？

如图 2-24，在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\angle B=\angle C$，那么 AB 与 AC 之间有什么关系吗？

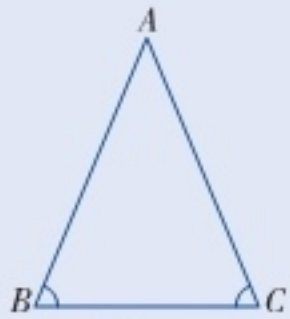


图 2-24

我测量后发现 AB 与 AC 相等.

如图 2-25，在△ABC 中，$\angle B=\angle C$. 沿过点 A 的直线把$\angle BAC$ 对折，得$\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 于点 D，则$\angle 1=\angle 2$. 又$\angle B=\angle C$，由三角形内角和的性质得$\angle ADB=\angle ADC$.

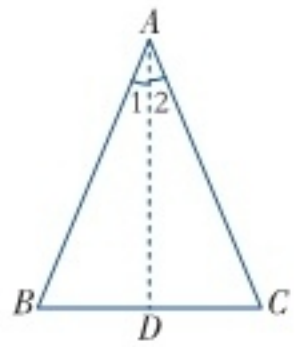


图 2-25

沿 AD 所在直线折叠，由于$\angle ADB=\angle ADC$，$\angle 1=\angle 2$，所以射线 DB 与射线 DC 重合，射线 AB 与射线 AC 重合. 从而点 B 与点 C 重合，于是 $AB=AC$.

由此得到等腰三角形的判定定理：

有两个角相等的三角形是等腰三角形(简称“等角对等边”).

由此并且结合三角形内角和定理，还可以得到等边三角形的判定定理：

三个角都是 60°的三角形是等边三角形.

例 2 已知：如图 2-26，在△ABC 中，$AB=AC$，点 D，E 分别是 AB，AC 上的点，且 $DE\parallel BC$.

求证：△ADE 为等腰三角形.

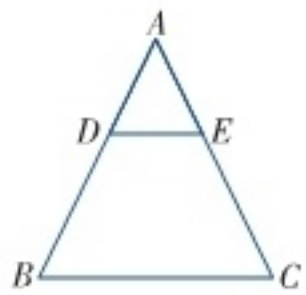


图 2-26

证明 ∵ $AB=AC$，

∴ $\angle B=\angle C$.

又∵ $DE\parallel BC$，

∴ $\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$.

∴ $\angle ADE=\angle AED$.

于是△ADE 为等腰三角形.

动脑筋

有一个角是 60°的等腰三角形是等边三角形吗？为什么？

如图 2-27，在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC$.

由三角形内角和定理得$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

如果顶角$\angle A=60°$，则$\angle B+\angle C=180°-60°=120°$.

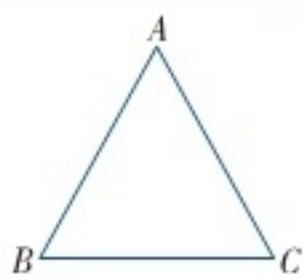


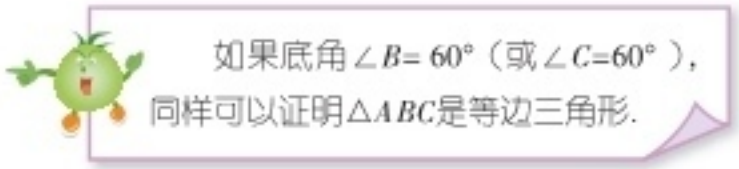
图 2-27

又　$AB=AC$，

∴　$\angle B=\angle C$.

∴　$\angle B=\angle C=\angle A=60°$.

∴　$\triangle ABC$ 是等边三角形.



由此得到另一条等边三角形的判定定理：

有一个角是60°的等腰三角形是等边三角形.

例 3 已知：如图 2-28，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D，E 分别在 BA，CA 的延长线上，且 $AD=AE$.

求证：$\triangle ADE$ 是等边三角形.

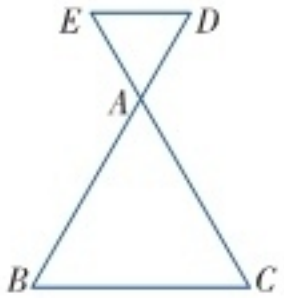


图 2-28

证明　∵　$\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴　$\angle BAC=\angle B=\angle C=60°$.

∵　$\angle EAD=\angle BAC=60°$，

又　$AD=AE$，

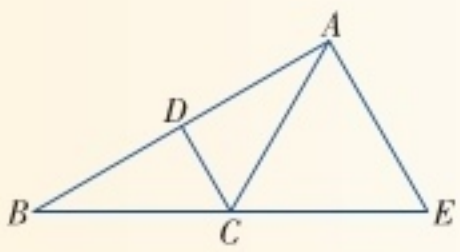
∴　$\triangle ADE$ 是等边三角形(有一个角是 60°的等腰三角形是等边三角形).

练习

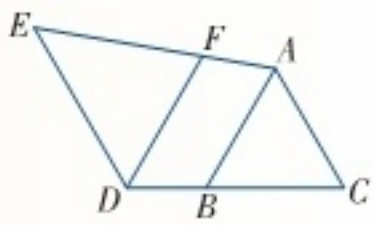
1. 已知：等腰三角形 ABC 的底角 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O.

求证：$\triangle OBC$为等腰三角形.

2. 已知：如图，CD 平分 $\angle ACB$，$AE\parallel DC$，AE 交 BC 的延长线于点 E，且 $\angle ACE=60°$. 求证：$\triangle ACE$ 是等边三角形.



(第 2 题图)



(第 3 题图)

3. 已知：如图，$AB=BC$，$\angle CDE=120°$，$DF\parallel BA$，且 DF 平分 $\angle CDE$.

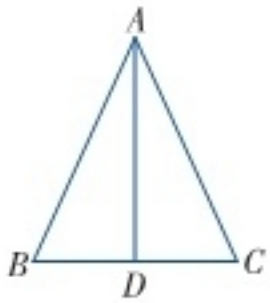
求证：$\triangle ABC$ 是等边三角形.

习题 2.3

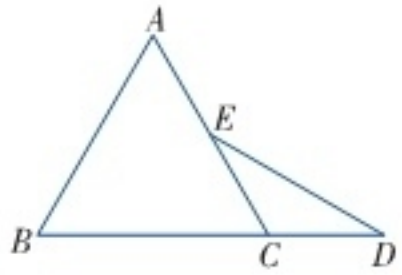
A 组

1. 若等腰三角形的一个内角是 30°，求这个等腰三角形的其他内角.

2. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，AD 平分∠BAC 交 BC 于点 D，$AD=5$，$CD=2$，求△ABC 的面积.



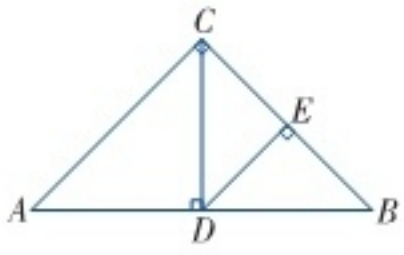
(第 2 题图)



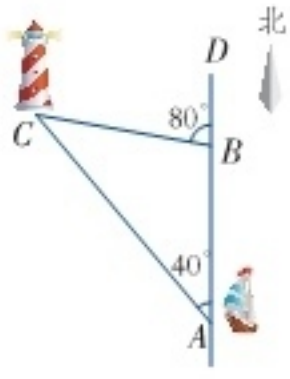
(第 3 题图)

3. 如图，△ABC 是等边三角形，点 D 在线段 BC 的延长线上，且 $CD=CE$，求∠D 的度数.

4. 如图，CD 是等腰直角三角形 ABC 的斜边 AB 上的高，DE 是△DBC 的边 BC 上的高，试找出图中所有的等腰直角三角形.



(第 4 题图)

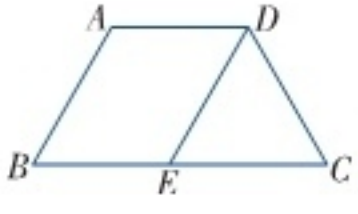


(第 5 题图)

5. 上午 10 时，一艘船从 A 处出发以每小时 20 海里的速度向正北航行，中午 12 时到达 B 处. 从 A，B 两点观望灯塔 C，测得∠DAC=40°，∠DBC=80°，求从 B 处到灯塔 C 的距离.

6. 已知：如图，∠B=∠C，AB∥DE，$EC=ED$.

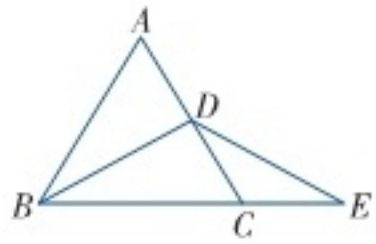
求证：△DEC 为等边三角形.



(第 6 题图)

7. 已知：如图，在等边三角形 ABC 的 AC 边上取中点 D，BC 的延长线上取一点 E，使 $CE=CD$.

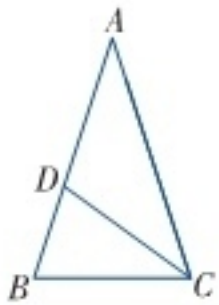
求证：$BD=DE$.



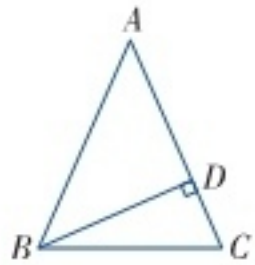
(第 7 题图)

B 组

8. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，点 D 在边 AB 上，且 $AD=DC=BC$. 求△ABC 各内角的度数.



(第 8 题图)



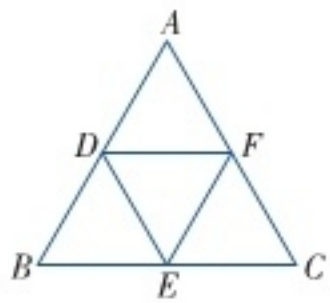
(第 9 题图)

9. 已知：如图，在△ABC 中，$AB=AC$，$BD\perp AC$，垂足为点 D.

求证：$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle A$.

10. 已知：如图，△ABC 是等边三角形，点 D，E，F 分别是边 AB，BC，CA 的中点.

求证：△DEF 是等边三角形.



(第 10 题图)

2.4 线段的垂直平分线

观察

如图 2-29，人字形屋顶的框架中，点 A 与点 A' 关于线段 CD 所在的直线 l 对称，问线段 CD 所在的直线 l 与线段 AA' 有什么关系？

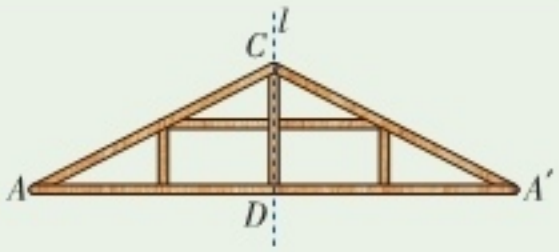


图 2-29

我发现 $AD=A'D$，$l\perp AA'$.

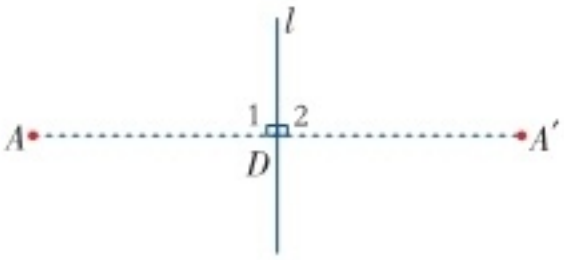


图 2-30

我们可以把人字形屋顶框架图进行简化得到图 2-30. 已知点 A 与点 A' 关于直线 l 对称，如果沿直线 l 折叠，则点 A 与点 A' 重合，$AD=A'D$，$\angle 1=\angle 2=90°$，即直线 l 既平分线段 AA'，又垂直线段 AA'.

我们把垂直且平分一条线段的直线叫作这条线段的**垂直平分线**(perpendicular bisector).

由上可知：线段是轴对称图形，线段的垂直平分线是它的对称轴.

探究

如图 2-31，在线段 AB 的垂直平分线 l 上任取一点 P，连接 PA，PB，线段 PA，PB 之间有什么关系？

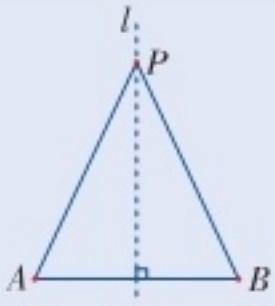


图 2-31

作关于直线 l 的轴反射(即沿直线 l 对折)，由于 l 是线段 AB 的垂直平分线，因此点 A 与点 B 重合. 从而线段 PA 与线段 PB 重合，于是 $PA=PB$.

由此得出线段垂直平分线的性质定理：

线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等.

动脑筋

我们知道线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等，反过来，如果已知一点 P 到线段 AB 两端的距离 PA 与 PB 相等，那么点 P 在线段 AB 的垂直平分线上吗？

（1）当点 P 在线段 AB 上时，因为 $PA=PB$，所以点 P 为线段 AB 的中点，显然此时点 P 在线段 AB 的垂直平分线上.

（2）当点 P 在线段 AB 外时，如图 2-32. 因为 $PA=PB$，所以 $\triangle PAB$ 是等腰三角形.

过顶点 P 作 $PC\perp AB$，垂足为点 C，从而底边 AB 上的高 PC 也是底边 AB 上的中线.

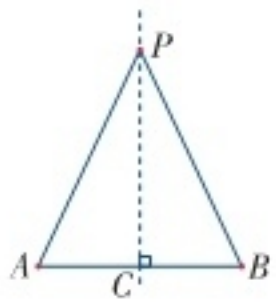


图 2-32

即 $PC\perp AB$，且 $AC=BC$.

因此直线 PC 是线段 AB 的垂直平分线，此时点 P 也在线段 AB 的垂直平分线上.

由此得到线段垂直平分线的性质定理的逆定理：

到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上.

例 已知：如图 2-33，在 $\triangle ABC$ 中，AB，BC 的垂直平分线相交于点 O，连接 OA，OB，OC.

求证：点 O 在 AC 的垂直平分线上.

证明 $\because$ 点 O 在线段 AB 的垂直平分线上，

$\therefore$ $OA=OB$.

同理 $OB=OC$.

$\therefore$ $OA=OC$.

$\therefore$ 点 O 在 AC 的垂直平分线上.

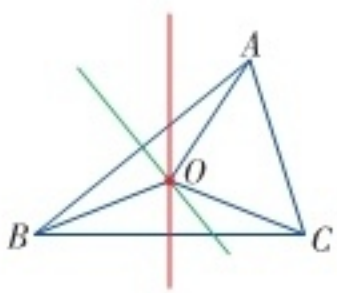
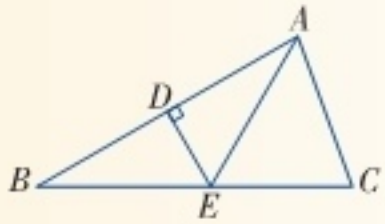


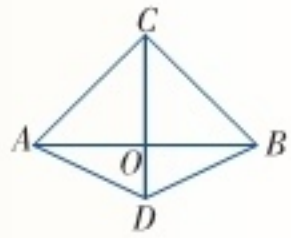
图 2-33

练习

1. 如图，在$\triangle ABC$中，AB的垂直平分线分别交AB，BC于点D，E，$\angle B=30°$，$\angle BAC=80°$，求$\angle CAE$的度数.



（第1题图）



（第2题图）

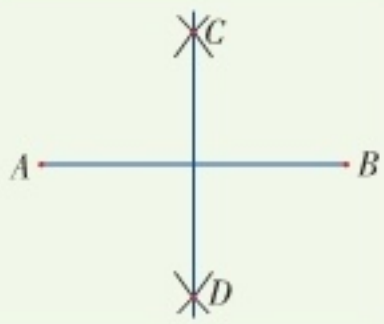
2. 已知：如图，点C，D是线段AB外的两点，且$AC=BC$，$AD=BD$，AB与CD相交于点O. 求证：$AO=BO$.

做一做

如图2–34，已知线段AB，作线段AB的垂直平分线.

图2–34

根据“到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上”，要作线段AB的垂直平分线，关键是找出到线段AB两端距离相等的两点.

作　法	图　示
①分别以点A，B为圆心，以大于$\frac{1}{2}AB$的长为半径画弧，两弧相交于点C和点D；	
②过点C，D作直线CD，则直线CD就是线段AB的垂直平分线.	

因为线段AB的垂直平分线CD与线段AB的交点就是线段AB的中点，所以可以用这种方法作出线段的中点.

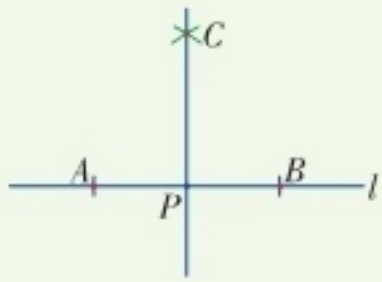
动脑筋

如何过一点 P 作已知直线 l 的垂线呢？

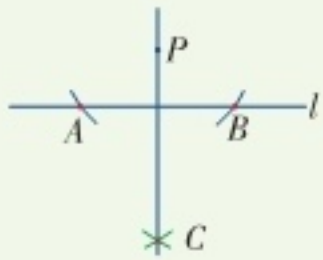
由于两点确定一条直线，因此我们可以通过在已知直线上作线段的垂直平分线来找出垂线上的另一点，从而确定已知直线的垂线.

点 P 与已知直线 l 的位置关系有两种：点 P 在直线 l 上或点 P 在直线 l 外.

(1) 当点 P 在直线 l 上.

作　法	图　示
①在直线 l 上点 P 的两旁分别截取线段 PA，PB，使 $PA=PB$；	
②分别以 A，B 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，两弧相交于点 C；	
③过点 C，P 作直线 CP，则直线 CP 为所求作的直线.	

(2) 当点 P 在直线 l 外.

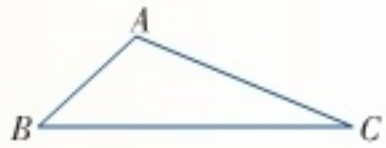
作　法	图　示
①以点 P 为圆心，以大于点 P 到直线 l 的距离的线段长为半径画弧，交直线 l 于点 A，B；	
②分别以点 A，B 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，两弧相交于点 C；	
③过点 C，P 作直线 CP，则直线 CP 为所求作的直线.	

练习

用尺规完成下列作图(只保留作图痕迹，不要求写出作法).

1. 如图，在直线 l 上求作一点 P，使 $PA=PB$.

(第 1 题图)



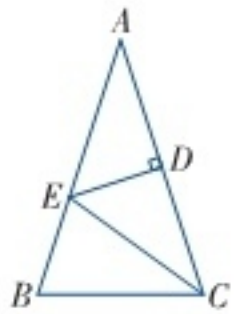
(第 2 题图)

2. 如图，作出 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高.

习题 2.4

A 组

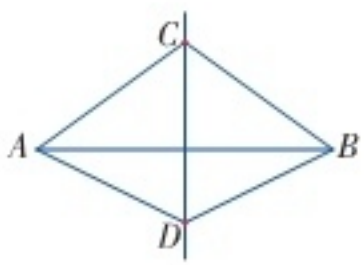
1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A=36°$，AC 的垂直平分线分别交 AC，AB 于点 D，E，$AE=5$. 求 $\angle ECB$ 的度数及边 BC 的长.



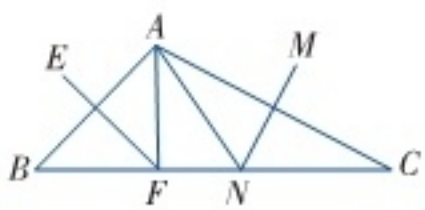
(第 1 题图)

2. 已知：如图，点 C，D 在线段 AB 的垂直平分线上，连接 AC，AD，BC，BD.

求证：$\angle CAD=\angle CBD$.



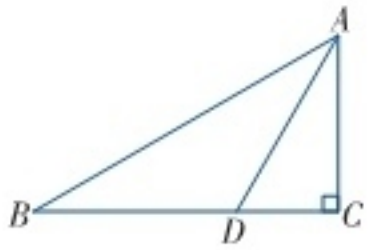
(第 2 题图)



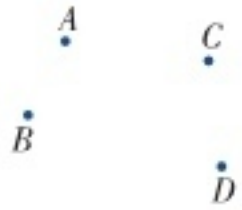
(第 3 题图)

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$BC=9$，AB 的垂直平分线 EF 交 BC 于点 F，AC 的垂直平分线 MN 交 BC 于点 N. 求 $\triangle AFN$ 的周长.

4. 已知：如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，AD 平分$\angle BAC$.
求证：点 D 在 AB 的垂直平分线上.



（第 4 题图）

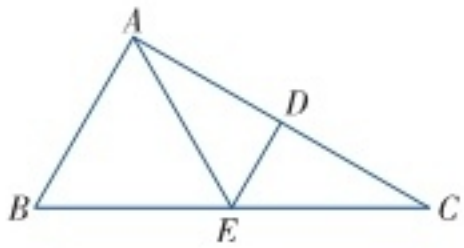


（第 5 题图）

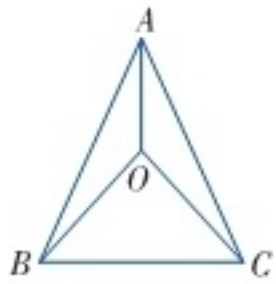
5. 如图，求作一点 P，使 $PA=PB$，$PC=PD$（只保留作图痕迹，不要求写出作法）.

B 组

6. 如图，在△ABC 中，边 AC 的垂直平分线分别交 AC，BC 于点 D，E，$CD=3$ cm，△ABE 的周长为 13 cm，求△ABC 的周长.



（第 6 题图）



（第 7 题图）

7. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，O 是△ABC 内一点，且 $OB=OC$. 问：AO 与 BC 是否垂直？为什么？

2.5 全等三角形

做一做

如图 2-35 是两组形状、大小完全相同的图形. 用透明纸描出每组中的一个图形，并剪下来与另一个图形放在一起，它们完全重合吗？

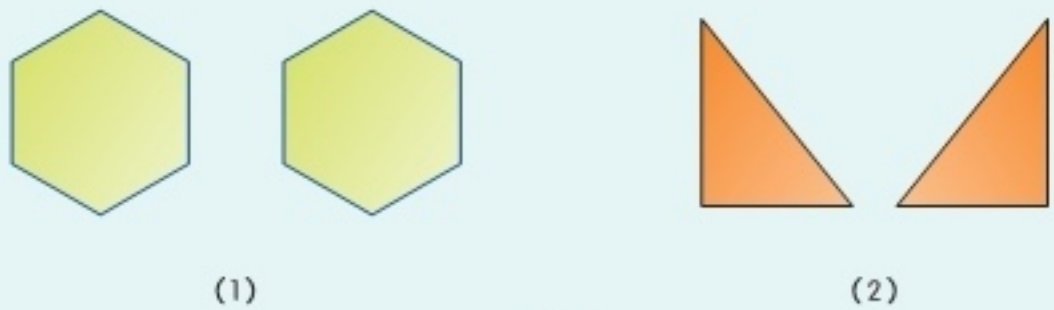
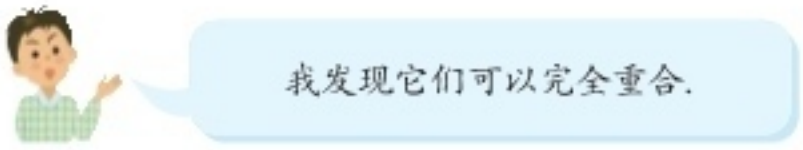


图 2-35



我们把能够完全重合的两个图形叫作**全等图形**(congruent figures).

动脑筋

如图 2-36，$\triangle ABC$ 分别通过平移、旋转、轴反射后得到 $\triangle A'B'C'$，问 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 能完全重合吗？

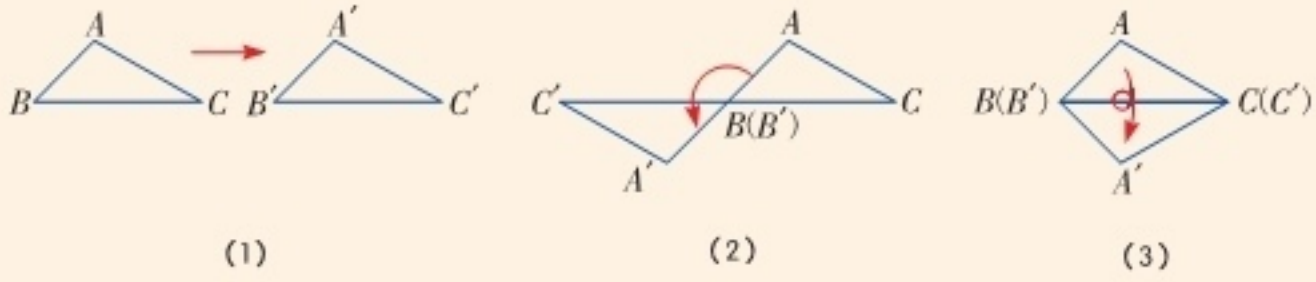


图 2-36

根据平移、旋转和轴反射的性质，可知分别通过上述三个变换后得到的

$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$都可以完全重合，因此它们是全等图形.

能完全重合的两个三角形叫作**全等三角形**(congruent triangles).

全等三角形中，互相重合的顶点叫作对应顶点，互相重合的边叫作对应边，互相重合的角叫作对应角.

例如，图2-36(1)中的$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$全等，记作：

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

其中A与A'，B与B'，C与C'是对应顶点；

AB与$A'B'$，BC与$B'C'$，CA与$C'A'$是对应边；

$\angle A$与$\angle A'$，$\angle B$与$\angle B'$，$\angle C$与$\angle C'$是对应角.

全等用符号“$\cong$”表示，读作“全等于”. 在表示两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应位置上.

我们知道，能够完全重合的两条线段是相等的，能够完全重合的两个角是相等的. 由此得到：

全等三角形的对应边相等；

全等三角形的对应角相等.

例 1 如图 2-37，已知$\triangle ABC \cong \triangle DCB$，$AB=3$，$DB=4$，$\angle A=60°$.

(1) 写出$\triangle ABC$和$\triangle DCB$的对应边和对应角；

(2) 求AC，DC的长及$\angle D$的度数.

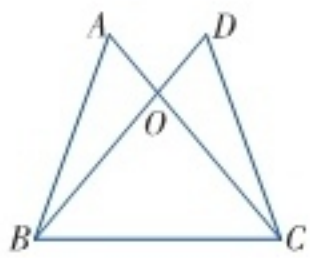


图 2-37

解 (1) AB与DC，AC与DB，BC与CB是对应边；$\angle A$与$\angle D$，$\angle ABC$与$\angle DCB$，$\angle ACB$与$\angle DBC$是对应角.

(2) $\because$ AC与DB，AB与DC是全等三角形的对应边，

$\therefore$ $AC=DB=4$，

$DC=AB=3$.

$\because$ $\angle A$与$\angle D$是全等三角形的对应角，

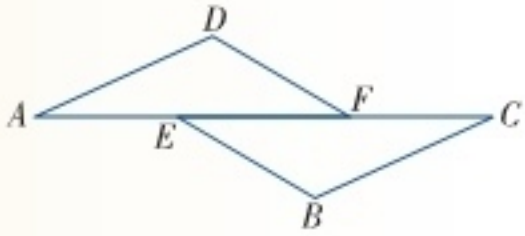
$\therefore$ $\angle D=\angle A=60°$.

练习

如图，已知$\triangle ADF \cong \triangle CBE$，$AD=4$，$BE=3$，$AF=6$，$\angle A=20°$，$\angle B=120°$.

（1）找出它们的所有对应边和对应角；

（2）求$\triangle ADF$的周长及$\angle BEC$的度数.



两个三角形满足什么条件就能全等呢？下面我们就来探讨这个问题.

探究

每位同学在纸上的两个不同位置分别画一个三角形，它的一个角为50°，夹这个角的两边分别为2 cm，2.5 cm. 将这两个三角形叠在一起，它们完全重合吗？由此你能得到什么结论？

我发现它们完全重合，我猜测：有两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等.

设在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle ABC=\angle A'B'C'$，$AB=A'B'$，$BC=B'C'$. 下面，我们从以下这几种情形来探讨这个猜测是否为真.

图 2-38

（1）$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的位置关系如图2-38.

将$\triangle ABC$作平移，使BC的像$B''C''$与$B'C'$重合，$\triangle ABC$在平移下的像为$\triangle A''B''C''$. 由于平移不改变图形的形状和大小，因此$\triangle ABC \cong \triangle A''B''C''$.

因为$\angle ABC=\angle A''B''C''=\angle A'B'C'$，$AB=A''B''=A'B'$，所以线段$A''B''$与

$A'B'$重合，因此点A''与点A'重合，那么$A''C''$与$A'C'$重合，所以$\triangle A''B''C''$与$\triangle A'B'C'$重合，因此$\triangle A''B''C'' \cong \triangle A'B'C'$，从而$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

（2）$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的位置关系如图 2-39(顶点B与顶点B'重合).

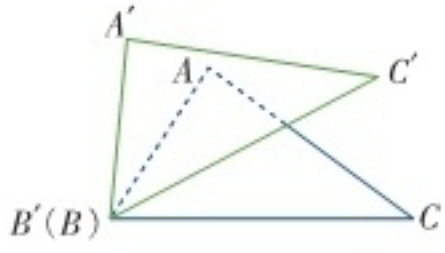


图 2-39

将$\triangle ABC$作绕点B的旋转，旋转角等于$\angle C'BC$，因为$BC = B'C'$，所以线段BC的像与线段$B'C'$重合. 因为$\angle ABC = \angle A'B'C'$，所以$\angle C'BC = \angle A'BA$. 又因为$BA = B'A'$，所以在上述旋转下，$BA$的像与$B'A'$重合，从而$AC$的像就与$A'C'$重合，于是$\triangle ABC$的像就是$\triangle A'B'C'$. 由于旋转不改变图形的形状和大小，因此$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

（3）$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的位置关系如图 2-40.

图 2-40

将$\triangle ABC$作平移，使顶点B的像B''和顶点B'重合，根据情形(1)，(2)的结论得$\triangle A''B''C'' \cong \triangle A'B'C'$， 因此$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

（4）$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的位置关系如图 2-41.

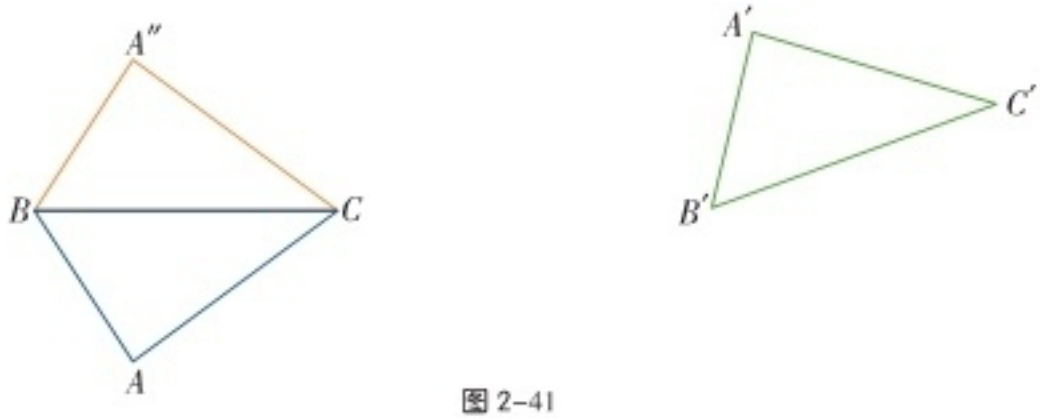


图 2-41

将$\triangle ABC$作关于直线BC的轴反射，$\triangle ABC$在轴反射下的像为$\triangle A''BC$. 由于轴反射不改变图形的形状和大小，因此$\triangle ABC \cong \triangle A''BC$. 根据情形(3)的结论得$\triangle A''BC \cong \triangle A'B'C'$，因此$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

由此得到判定两个三角形全等的基本事实：

两边及其夹角分别相等的两个三角形全等.

通常可简写成“边角边”或“SAS[①]”.

例 2 已知：如图 2-42，AB 和 CD 相交于点 O，且 $AO=BO$，$CO=DO$.
求证：$\triangle ACO \cong \triangle BDO$.

证明 在 $\triangle ACO$ 和 $\triangle BDO$ 中，

$$\begin{cases} AO=BO, \\ \angle AOC=\angle BOD \text{（对顶角相等）}, \\ CO=DO, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ACO \cong \triangle BDO$ (SAS).

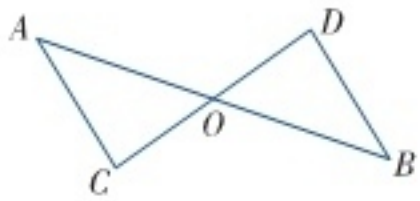
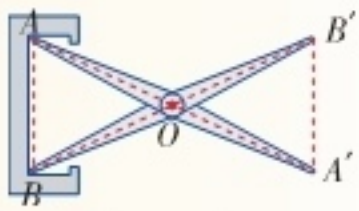


图 2-42

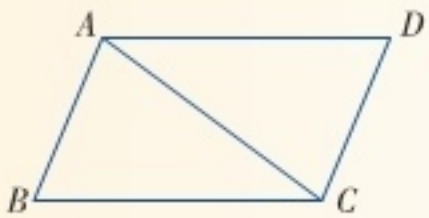
练习

1. 如图，将两根钢条 AA' 和 BB' 的中点 O 连在一起，使钢条可以绕点 O 自由转动，就可做成测量工件内槽宽度的工具(卡钳). 只要量出 $A'B'$ 的长，就得出工件内槽的宽 AB. 这是根据什么道理呢？

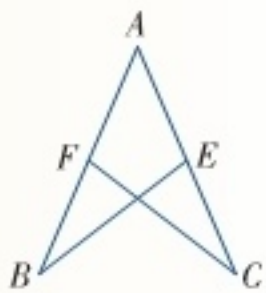


(第 1 题图)

2. 如图，$AD /\!/ BC$，$AD=BC$. 问：$\triangle ADC$ 和 $\triangle CBA$ 是全等三角形吗？为什么？



(第 2 题图)



(第 3 题图)

3. 已知：如图，$AB=AC$，点 E，F 分别是 AC，AB 的中点. 求证：$BE=CF$.

① SAS 是英文 Side-Angle-Side 的首字母简写，其中 Side 表示“边”，Angle 表示“角”.

探究

如图 2-43，在△ABC 和△$A'B'C'$中，如果 $BC=B'C'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，你能通过平移、旋转和轴反射等变换使△ABC 的像与△$A'B'C'$重合吗？那么△ABC 和△$A'B'C'$全等吗？

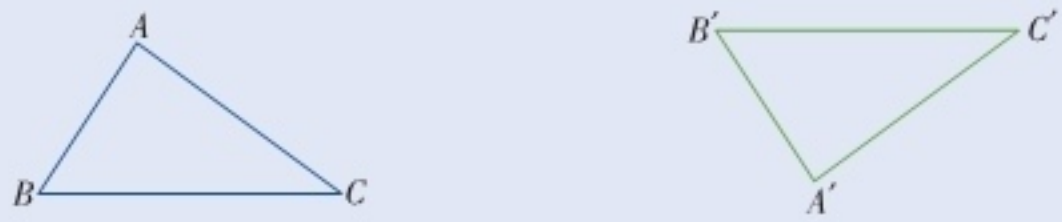


图 2-43

类似于基本事实“SAS”的探究，同样地，我们可以通过平移、旋转和轴反射等变换使△ABC的像与△$A'B'C'$重合，因此△ABC ≌ △$A'B'C'$.

由此得到判定两个三角形全等的基本事实：

两角及其夹边分别相等的两个三角形全等.

通常可简写成“角边角”或“ASA”.

例 3 已知：如图 2-44，点 A，F，E，C 在同一条直线上，$AB \parallel DC$，$AB=CD$，$\angle B=\angle D$.

求证：△ABE ≌ △CDF.

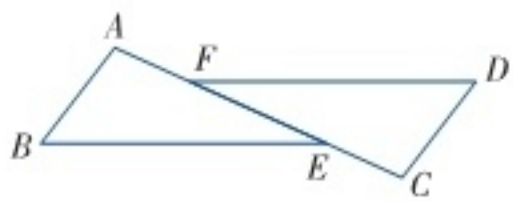


图 2-44

证明 ∵ $AB \parallel DC$，

∴ $\angle A=\angle C$.

在△ABE和△CDF中，

$$\begin{cases} \angle A=\angle C, \\ AB=CD, \\ \angle B=\angle D, \end{cases}$$

∴ △ABE ≌ △CDF (ASA).

例 4 如图 2–45，为测量河宽 AB，小军从河岸的 A 点沿着与 AB 垂直的方向走到 C 点，并在 AC 的中点 E 处立一根标杆，然后从 C 点沿着和 AC 垂直的方向走到 D 点，使点 D，E，B 恰好在一条直线上.于是小军说："CD 的长就是河的宽度."你能说出这个道理吗？

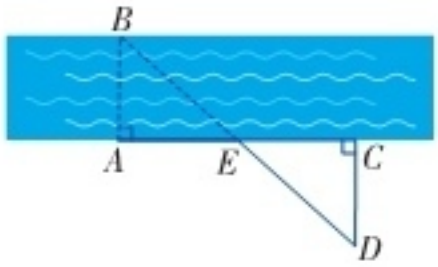


图 2–45

解 在△AEB和△CED中，

$$\begin{cases} \angle A=\angle C=90^\circ, \\ AE=CE, \\ \angle AEB=\angle CED \text{（对顶角相等）}, \end{cases}$$

∴ △AEB ≌ △CED（ASA）.

∴ $AB=CD$（全等三角形的对应边相等）.

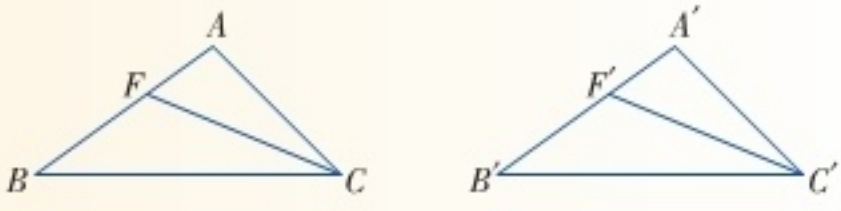
因此，CD 的长就是河的宽度.

练习

1. 如图，工人师傅不小心把一块三角形玻璃打碎成三块，现要到玻璃店重新配一块与原来一样的三角形玻璃，只允许带其中的一块玻璃碎片去. 请问应带哪块玻璃碎片去？为什么？

（第 1 题图）

2. 已知：如图，△ABC ≌ △$A'B'C'$，CF，$C'F'$分别是∠ACB和∠$A'C'B'$的平分线. 求证：$CF=C'F'$.



（第 2 题图）

动脑筋

如图2–46，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，如果$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$，那么$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$全等吗？

图 2–46

根据三角形内角和定理，可将上述条件转化为满足“ASA”的条件，从而可以证明$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

$\because$ $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，

$\therefore$ $\angle C=\angle C'$.

又$\because$ $BC=B'C'$，

$\angle B=\angle B'$，

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$（ASA）.

由此得到判定两个三角形全等的定理：

两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等.

通常可简写成“角角边”或“AAS”.

例 5 已知：如图 2–47，$\angle B=\angle D$，$\angle 1=\angle 2$，求证：$\triangle ABC\cong\triangle ADC$.

证明 $\because$ $\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ $\angle ACB=\angle ACD$（等角的补角相等）.

在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle D,\\ \angle ACB=\angle ACD,\\ AC=AC,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle ADC$（AAS）.

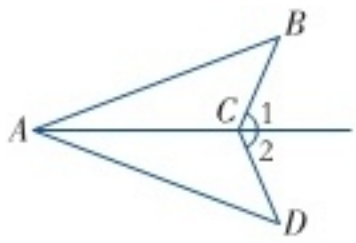


图 2–47

例 6 已知：如图 2-48，点 B，F，C，E 在同一条直线上，$AC /\!/ FD$，$\angle A=\angle D$，$BF=EC$．求证：$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

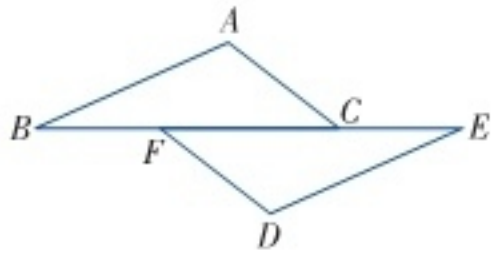


图 2-48

证明 $\because$ $AC /\!/ FD$，

$\therefore$ $\angle ACB=\angle DFE$.

$\because$ $BF=EC$，

$\therefore$ $BF+FC=EC+FC$，

即 $BC=EF$.

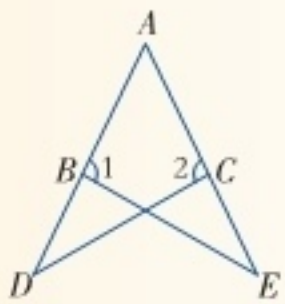
在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle D,\\ \angle ACB=\angle DFE,\\ BC=EF,\end{cases}$$

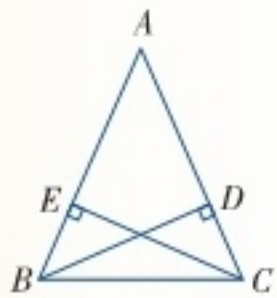
$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$（AAS）.

练习

1. 已知：如图，$\angle 1=\angle 2$，$AD=AE$. 求证：$\triangle ADC \cong \triangle AEB$.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 已知：在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=\angle ACB$，$BD \perp AC$于点 D，$CE \perp AB$于点 E. 求证：$BD=CE$.

探究

如图 2-49，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，如果 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$AC=A'C'$，那么$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$全等吗？

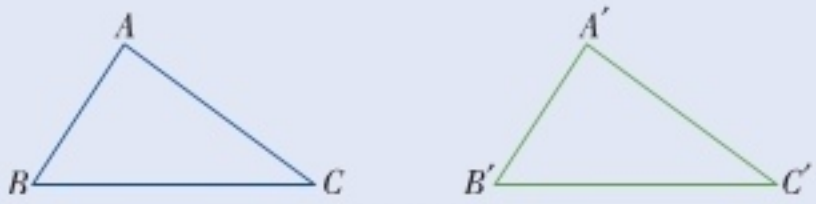


图 2-49

如果能够说明$\angle A=\angle A'$，那么就可以由“边角边”得出$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

将$\triangle ABC$作平移、旋转和轴反射等变换，使BC的像$B''C''$与$B'C'$重合，并使点A的像A''与点A'在$B'C'$的两旁，$\triangle ABC$在上述变换下的像为$\triangle A''B''C''$，如图 2–50. 由上述变换性质可知$\triangle ABC\cong\triangle A''B'C'$，则$AB=A''B'=A'B'$，$AC=A''C'=A'C'$. 连接$A'A''$.

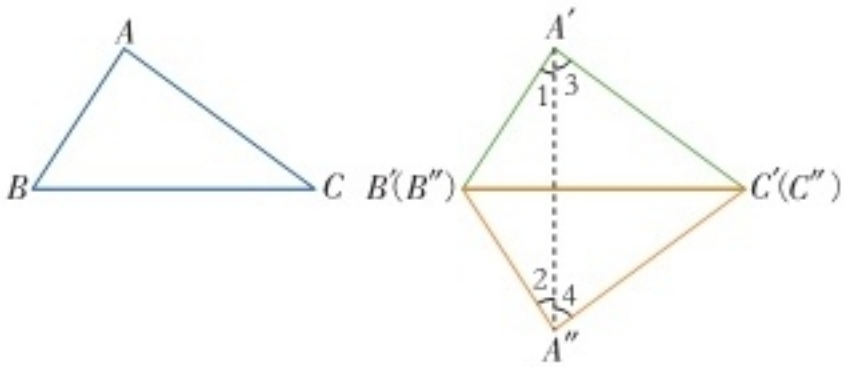


图 2–50

$\because$ $A'B'=A''B'$，$A'C'=A''C'$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

从而 $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$，

即 $\angle B'A'C'=\angle B'A''C'$.

在$\triangle A'B'C'$和$\triangle A''B'C'$中，

$$\begin{cases} A'B'=A''B', \\ \angle B'A'C'=\angle B'A''C', \\ A'C'=A''C', \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle A'B'C'\cong\triangle A''B'C'$（SAS）.

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

由此可以得到判定两个三角形全等的基本事实：

三边分别相等的两个三角形全等.

通常可简写成“边边边”或“SSS”.

例 7 已知：如图 2–51，$AB=CD$，$BC=DA$.

求证：$\angle B=\angle D$.

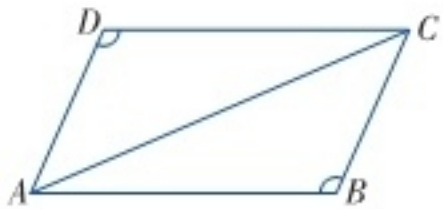


图 2–51

证明 在$\triangle ABC$和$\triangle CDA$中，

$$\begin{cases} AB=CD, \\ BC=DA, \\ AC=CA\ （公共边）, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle CDA$（SSS）.

$\therefore$ $\angle B=\angle D$.

例 8 已知：如图 2–52，AC 与 BD 相交于点 O，且 $AB=DC$，$AC=DB$.

求证：$\angle A=\angle D$.

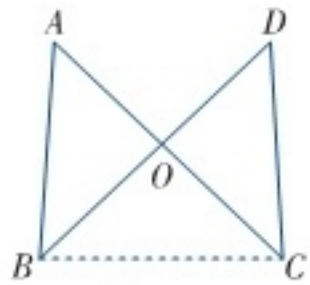


图 2–52

证明 连接 BC.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中，

$$\begin{cases} AB=DC, \\ BC=CB\ (\text{公共边}), \\ AC=DB, \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ABC\cong\triangle DCB$（SSS）.

$\therefore\ \angle A=\angle D$.

由“边边边”可知，只要三角形三边的长度确定，那么这个三角形的形状和大小也就固定了，三角形的这个性质叫作**三角形的稳定性**.

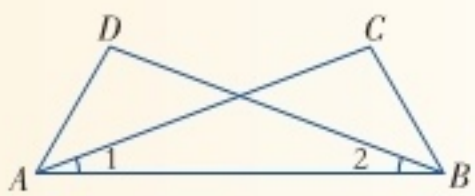
三角形的稳定性在生产和生活中有广泛的应用. 如日常生活中的定位锁、房屋的人字梁屋顶等都采用三角形结构，其道理就是运用三角形的稳定性.


定位锁

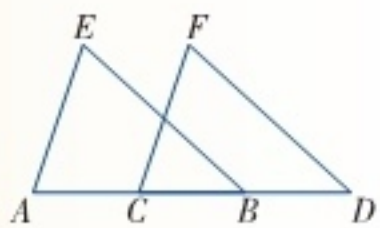

人字梁屋顶

练习

1. 如图，已知 $AD=BC$，$AC=BD$. 那么 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等吗？



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，点 A，C，B，D 在同一条直线上，$AC=BD$，$AE=CF$，$BE=DF$.

求证：$AE\parallel CF$，$BE\parallel DF$.

议一议

根据下列条件，分别画出$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，并思考$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$一定全等吗？由此你能得出什么结论？

（1）$AB=A'B'=3\text{ cm}$，$AC=A'C'=2.5\text{ cm}$，$\angle B=\angle B'=45°$；

（2）$\angle A=\angle A'=80°$，$\angle B=\angle B'=30°$，$\angle C=\angle C'=70°$.

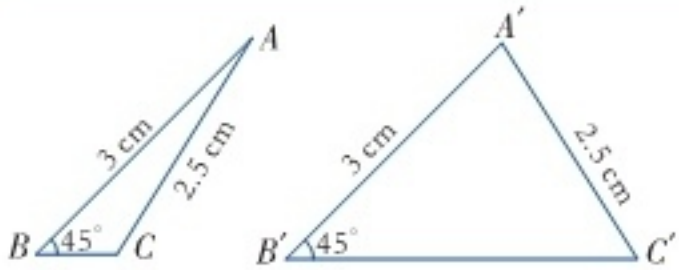


图 2-53

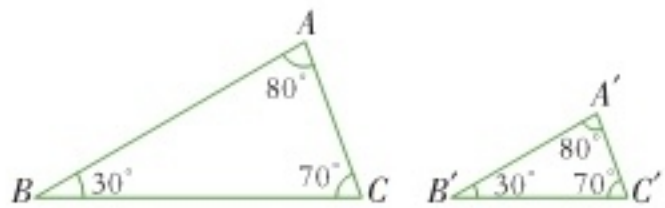


图 2-54

满足条件(1)的两个三角形不一定全等(如图 2-53)，由此得出：两边分别相等且其中一组等边的对角相等的两个三角形不一定全等.

满足条件(2)的两个三角形不一定全等(如图 2-54)，由此得出：三角分别相等的两个三角形不一定全等.

例 9 已知：如图 2-55，$AB=CD$，$BC=DA$，E，F是AC上的两点，且$AE=CF$. 求证：$BF=DE$.

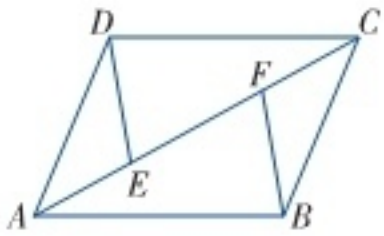


图 2-55

证明 在$\triangle ABC$和$\triangle CDA$中，

$$\begin{cases} AB=CD, \\ BC=DA, \\ AC=CA\ (\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ABC\cong\triangle CDA$（SSS）.

$\therefore\ \angle BCF=\angle DAE$（全等三角形的对应角相等）.

在$\triangle BCF$和$\triangle DAE$中，

$$\begin{cases} BC=DA, \\ \angle BCF=\angle DAE, \\ CF=AE, \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle BCF\cong\triangle DAE$（SAS）.

$\therefore\ BF=DE$（全等三角形的对应边相等）.

例10 某地在山区修建高速公路时需挖通一条隧道. 为估测这条隧道的长度(如图 2-56)，需测出这座山 A，B 间的距离，结合所学知识，你能给出什么好方法吗?

解 选择某一合适的地点 O，使得从 O 点能测出 AO 与 BO 的长度. 连接 AO 并延长至 A'，使 $OA'=OA$；连接 BO 并延长至 B'，使 $OB'=OB$，连接 $A'B'$，这样就构造出两个三角形.

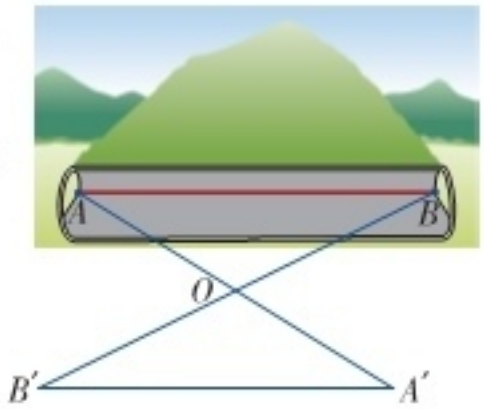


图 2-56

在△AOB 和△$A'OB'$中，

$$\begin{cases} OA=OA', \\ \angle AOB=\angle A'OB', \\ OB=OB', \end{cases}$$

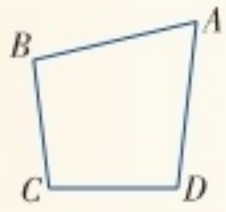
∴ △AOB ≌ △$A'OB'$ (SAS).

∴ $AB=A'B'$.

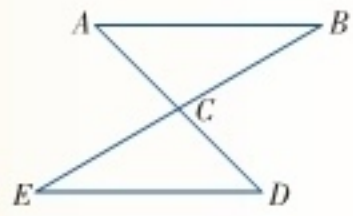
因此只要测出 $A'B'$的长度就能得到这座山 A，B 间的距离.

练习

1. 已知：如图，$AB=AD$，$BC=DC$. 求证：$\angle B=\angle D$.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

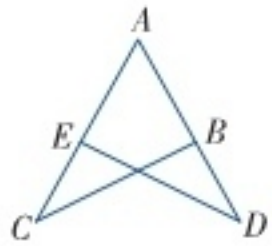
2. 如图，在△ABC 和△DEC 中，已知一些相等的边或角（见下表），请再补充适当的条件，从而能运用已学的判定方法来判定△ABC ≌ △DEC.

已知条件	补充条件	判定方法
$AC=DC$，$\angle A=\angle D$		SAS
$\angle A=\angle D$，$AB=DE$		ASA
$\angle A=\angle D$，$AB=DE$		AAS
$AC=DC$，$AB=DE$		SSS

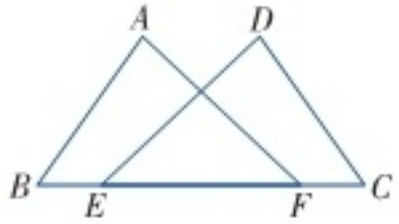
习题 2.5

A 组

1. 如图，已知$\triangle ABC \cong \triangle AED$，找出相等的边与角.



(第 1 题图)

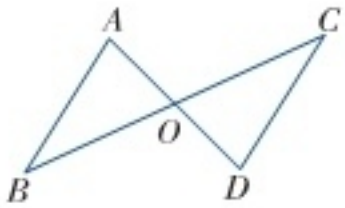


(第 2 题图)

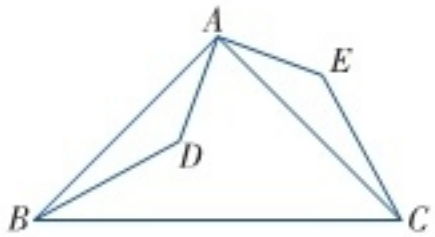
2. 如图，已知 $AB=DC$，$BE=CF$，$\angle B=\angle C$. 小莉说："$AF=DE$." 你认为她的判断对吗？请说明理由.

3. 已知：如图，$AB /\!/ CD$，AD 与 BC 相交于点 O，且 $OA=OD$.

求证：$OB=OC$.



(第 3 题图)



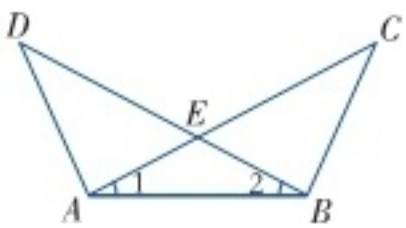
(第 4 题图)

4. 已知：如图，$AB=AC$，$AB \perp AC$，$AD \perp AE$，且$\angle ABD=\angle ACE$.

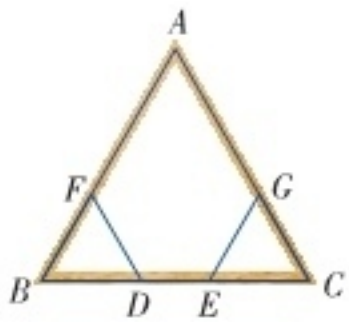
求证：$AD=AE$.

5. 已知：如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle C=\angle D$，AC 与 BD 相交于点 E.

求证：$EC=ED$.



(第 5 题图)

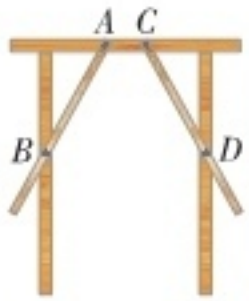


(第 6 题图)

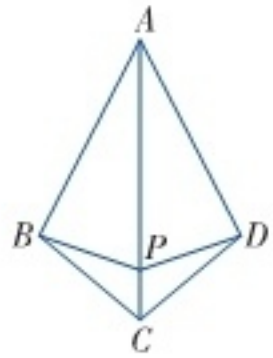
6. 如图，工人师傅要检查人字梁的$\angle B$ 和$\angle C$ 是否相等，但他手边没有量角器，只有一把刻度尺. 他是这样操作的：① 先在 BC 上分别截取BD，CE，使 $BD=CE$；② 再在 BA 和 CA 上分别截取BF，CG，使 $BF=CG$；③ 最后量出 DF，EG 的长. 如果 $DF=EG$，则说明$\angle B$ 和$\angle C$ 是相等的.

他的这种做法合理吗？为什么？

7. 如图，木工师傅做好门框后，为防止变形常常像图中所示那样钉上两根斜拉的木条（即图中的 AB，CD 两根木条），这样做的道理是什么？



（第 7 题图）



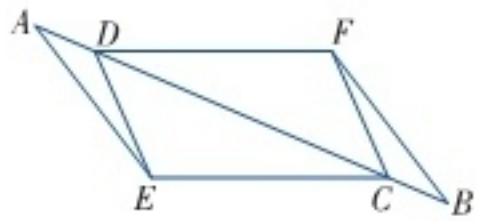
（第 8 题图）

8. 已知：如图，$AB=AD$，$BC=DC$，点 P 在 AC 上．求证：$BP=DP$.

9. 已知：如图，点 A，D，C，B 在同一条直线上，$AD=BC$，$AE=BF$，$CE=DF$.

求证：（1）$AE /\!/ FB$；

（2）$DE=CF$.

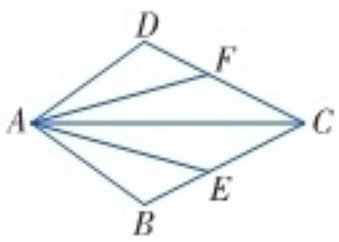


（第 9 题图）

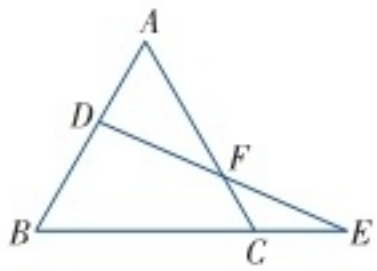
B 组

10. 已知：如图，$AB=AD$，$CE=CF$，AC 是 $\angle DAB$ 的平分线.

求证：$AE=AF$.



（第 10 题图）

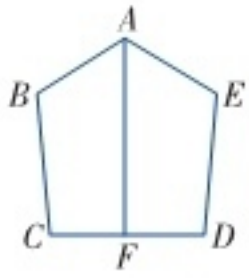


（第 11 题图）

11. 已知：如图，点 D 在等边三角形 ABC 的边 AB 上，延长 BC 至点 E 使 $CE=AD$，连接 DE 交 AC 于点 F．求证：$FD=FE$.

12. 已知：如图，$AB=AE$，$BC=ED$，$\angle B=\angle E$，点 F 是 CD 的中点.

求证：$AF\perp CD$.



（第 12 题图）

2.6 用尺规作三角形

说一说

你已经学会用尺规作哪些图形？动手试一试.

会作一条线段等于已知线段，会作线段的垂直平分线，……

根据三角形全等的判定条件，已知三边、两边及其夹角、两角及其夹边，都可以确定唯一的一个三角形，从而我们可以根据这些条件用尺规来作三角形.

已知三边作三角形.

如图 2-57，已知线段 a，b，c.

求作$\triangle ABC$，使 $AB=c$，$BC=a$，$AC=b$.

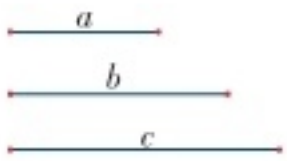
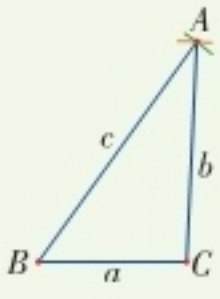


图 2-57

作　法	图　示
①作线段 $BC=a$；	
②以点 C 为圆心，以 b 为半径画弧，再以点 B 为圆心，以 c 为半径画弧，两弧相交于点 A；	
③连接 AB 和 AC，则$\triangle ABC$ 为所求作的三角形.	

已知底边及底边上的高线作等腰三角形.

如图 2-58，已知线段 a，h.

求作$\triangle ABC$，使 $AB=AC$，且 $BC=a$，高 $AD=h$.

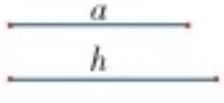
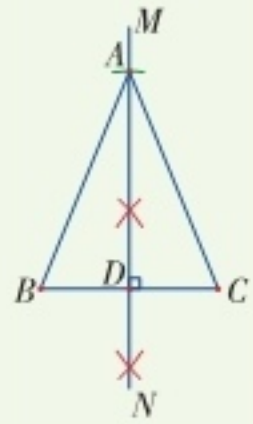


图 2-58

分析　首先作出该等腰三角形的底边及底边的垂直平分线，然后在垂直平分线上以底边中点为一端点，截取长为 h 的线段来确定三角形另一个顶点.

作　法	图　示
①作线段 $BC=a$； ②作线段 BC 的垂直平分线 MN 交 BC 于点 D；	
③在射线 DM(或 DN)上截取线段 DA，使 $DA=h$；	
④连接 AB，AC，则△ABC 为所求作的等腰三角形.	

做一做

如何作一个角的平分线？

如图 2-59，已知∠AOB，求作∠AOB 的平分线.

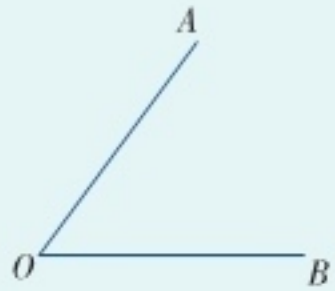
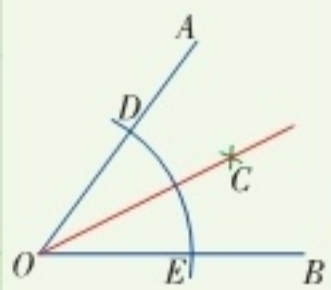


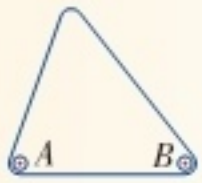
图 2-59

作　法	图　示
①在 OA，OB 上分别截取线段 OD，OE，使 $OD=OE$；	
②分别以 D，E 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径画弧，在∠AOB 内两弧交于点 C；	
③作射线 OC，则 OC 为所求作的∠AOB 的平分线.	

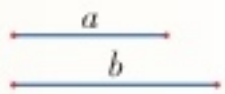
运用所学知识，请说一说：为什么 OC 是∠AOB 的平分线？

练习

1. 如图，一个机器零件上的两个孔的中心 A，B 已定好，又知第三个孔的中心 C 距 A 点 1.5 cm，距 B 点 1.8 cm. 如何找出 C 点的位置呢？



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，已知线段 a，b，求作等腰三角形，使它的腰长等于线段 a，底边长等于线段 b.

动脑筋

如何作一个角等于已知角？

如图 2-60，已知 $\angle AOB$，求作一个角，使它等于 $\angle AOB$.

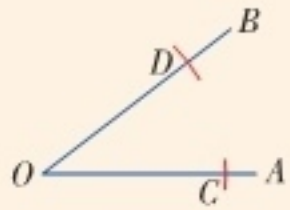
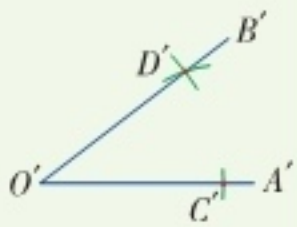


图 2-60

作　法	图　示
①作射线 $O'A'$； ②以点 O 为圆心，以任意长为半径画弧，交 OA 于点 C，交 OB 于点 D（如图 2-60）； ③以点 O' 为圆心，以 OC（或 OD）的长为半径画弧，交 $O'A'$ 于点 C'；	
④以点 C' 为圆心，以 CD 长为半径画弧，交前弧于点 D'； ⑤过点 D' 作射线 $O'B'$，则 $\angle A'O'B'$ 为所求作的角.	

说一说

运用所学知识，请说一说：为什么 $\angle A'O'B'$ 就是所求作的角？

已知两边及其夹角作三角形.

如图 2-61，已知$\angle\alpha$和线段 a，c.

求作$\triangle ABC$，使$\angle B=\angle\alpha$，$BC=a$，$BA=c$.

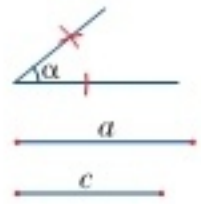
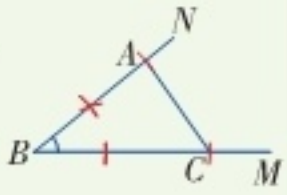


图 2-61

作　法	图　示
①作$\angle MBN=\angle\alpha$；	
②在射线 BM，BN 上分别截取 $BC=a$，$BA=c$；	
③连接 AC，则$\triangle ABC$为所求作的三角形.	

已知两角及其夹边作三角形.

如图 2-62，已知$\angle\alpha$，$\angle\beta$和线段 a.

求作$\triangle ABC$，使$\angle ABC=\angle\alpha$，$\angle ACB=\angle\beta$，$BC=a$.

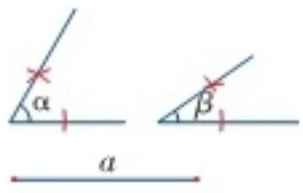
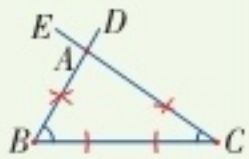


图 2-62

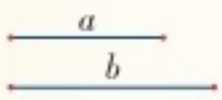
作　法	图　示
①作线段 $BC=a$；	
②在 BC 的同旁，作$\angle DBC=\angle\alpha$，$\angle ECB=\angle\beta$，BD 与 CE 相交于点 A，则$\triangle ABC$为所求作的三角形.	

练习

用尺规完成下列作图(只保留作图痕迹，不要求写出作法).

1. 用尺规作一个角等于 90°.

2. 如图，已知线段 a，b，求作一个直角三角形，使它的两直角边分别为 a 和 b.



(第 2 题图)

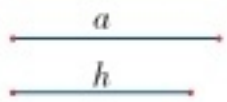
习题 2.6

A 组

用尺规完成下列作图(只保留作图痕迹，不要求写出作法).

1. 如图，已知线段 a，求作$\triangle ABC$，使 $AB=AC=2a$，$BC=a$.

(第 1 题图)

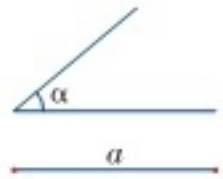


(第 2 题图)

2. 如图，已知线段 a，$h(a>h)$，求作等腰三角形 ABC，使 $AB=AC=a$，底边 BC 上的高 $AD=h$.

3. 如图，已知$\angle\alpha$，$\angle\beta$，求作$\angle ABC$，使$\angle ABC=\angle\alpha+\angle\beta$.

(第 3 题图)

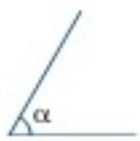


(第 4 题图)

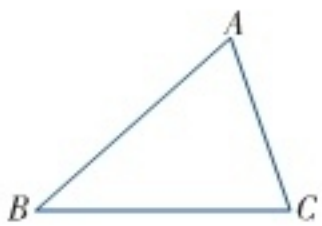
4. 如图，已知$\angle\alpha$ 和线段 a，求作$\triangle ABC$，使 $BC=a$，$\angle B=\angle\alpha$，$\angle C=2\angle\alpha$.

B 组

5. 如图，已知$\angle\alpha$，求作一个锐角等于$\frac{1}{2}\angle\alpha$.



(第 5 题图)



(第 6 题图)

6. 如图，已知$\triangle ABC$，用三种不同的作法作$\triangle DEF$，使$\triangle DEF\cong\triangle ABC$. 比较一下，你认为哪种作法最简便？

用计算机探究“将军饮马”问题

古希腊有一位数学家，名叫海伦. 有一天，一位将军向他请教了一个问题：从 A 地出发到河边饮马，然后再回到 B 地，如何确定饮马的地点 P，才能使得路程最短呢？(如图 1)

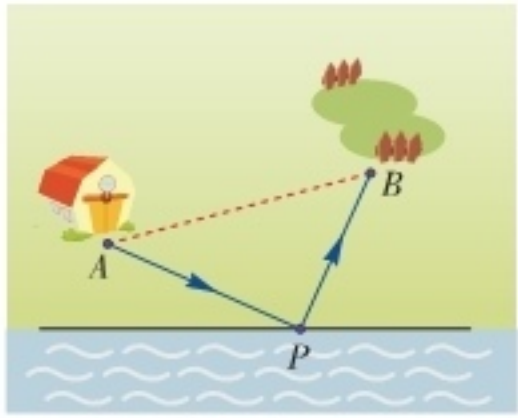


图 1

下面我们用计算机来探究此问题.

1. 打开几何画板，用画点工具作出 A，B 两点(A 表示出发点，B 表示终点)，用直线工具作出直线 CD(CD 表示河)，再在直线 CD 上作点 E (E 表示马饮水处). 用线段工具连接 AE，EB，选择这两条线段，在【度量】菜单中选择“长度”，得到 AE，EB 的长度. 在右键菜单中选择“计算”，弹出“新建计算”对话框，依次点击“AE”，“+”，“EB”，点击“确定”后得到 $AE+EB$ 的值 (如图 2).

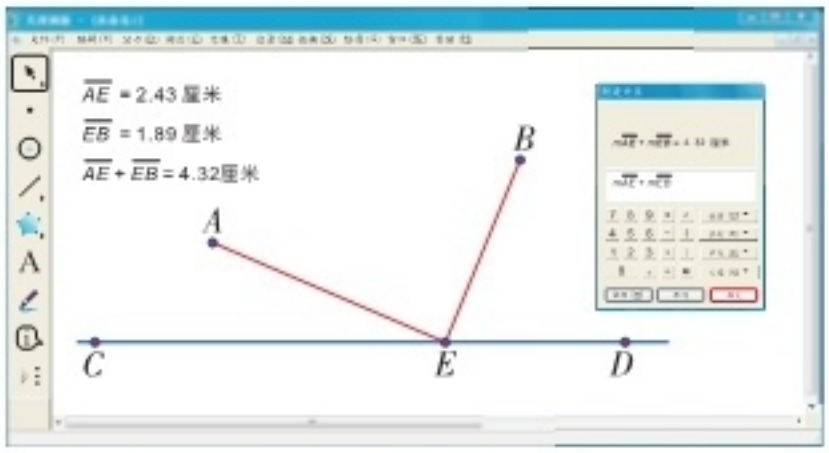


图 2

2. 拖动点 E，观察 $AE+EB$ 的值的变化，你有什么发现？当点 E 在什么位置时，$AE+EB$ 的值最小？(如图 3)

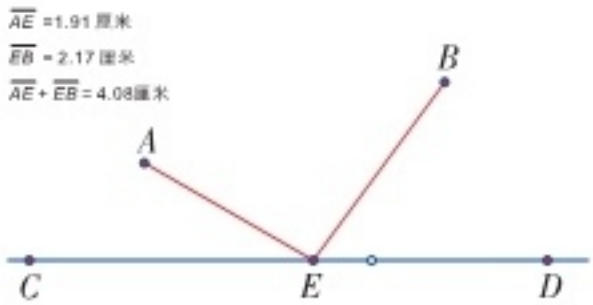


图 3

实际上，求一条折线段的长度，除了在计算机上拖动点 E 来逐步逼近最小值这种方法外，我们还可以想办法将折线转化为直线.

3. 如图 4，选中直线 CD，选择【变换】菜单下的【标记镜面】，使直线 CD 成为对称轴. 选中点 A，选择【变换】菜单下的【反射】，得到点 A 关于对称轴 CD 的对称点 A'，连接线段 $A'B$，设线段 $A'B$ 与直线 CD 相交于点 P，连接 AP.

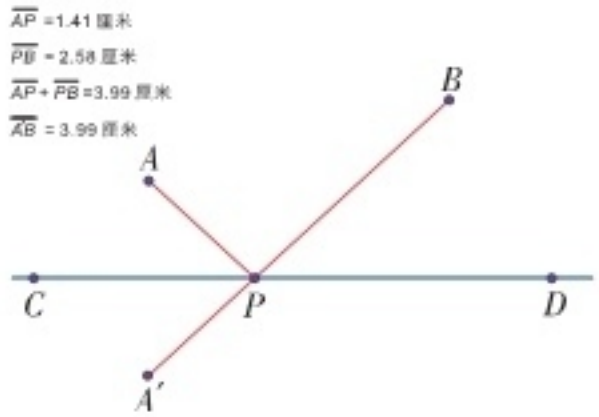


图 4

容易知道 $AP=A'P$，这样求折线 APB 的长度($AP+PB$)就转化为求线段 $A'B$ 的长度了. 选择线段 $A'B$，在【度量】菜单中选择“长度”，得到 $A'B$ 的长度.

4. 如图 5，在直线 CD 上任取一点 E(不同于点P)，连接 AE，EB 及$A'E$，测量 $AE+EB$ 的长度，与 $A'B$ 的长度比较，谁的长度更小，为什么？

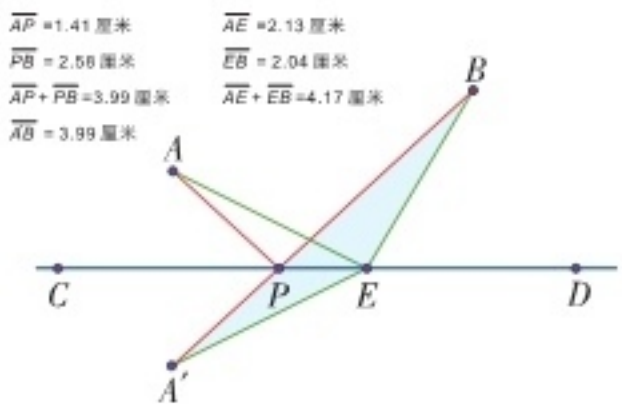


图 5

实际上，在$\triangle A'EB$ 中，由“三角形的任意两边之和大于第三边”可知，$A'E+EB>A'B$，又 $A'E=AE$，则$AE+EB>A'B$.

小结与复习

回顾

1. 三角形的三边之间有怎样的关系？

2. 什么叫三角形的高、角平分线、中线？

3. 结合本章所学的知识，举出一个命题并写出其逆命题，再判断它们的真假.

4. 等腰(等边)三角形具有哪些性质？如何判定一个三角形是等腰(等边)三角形？

5. 线段的垂直平分线的性质定理是什么？如何作线段的垂直平分线？

6. 全等三角形有哪些性质？如何判定两个三角形全等？

本章知识结构

注意

1. 一个命题是真命题，它的逆命题不一定是真命题.

2. 命题有真有假. 要判断一个命题为真命题，需要进行证明，并且证明的过程要言必有据. 要判断一个命题为假命题，只需举一个反例.

3. 要证明某些线段或角相等时，可以考虑转化为证明两个三角形全等.

复习题 2

A 组

1. 若某三角形的两边长分别为 3 和 4，则下列长度的线段能作为其第三边的是（　　）

（A）1　　（B）5　　（C）7　　（D）9

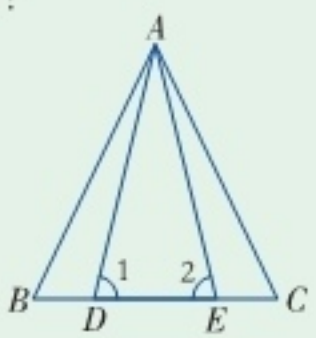
2. 将本章学习的判断三角形全等的基本事实和定理改写成“如果……，那么……”的形式.

3. 填空：

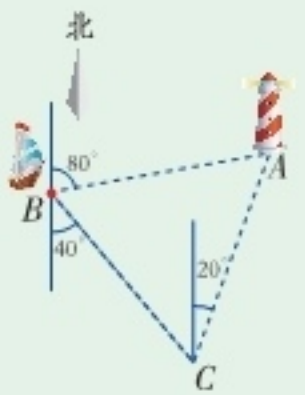
（1）等腰三角形的底角是顶角的 2 倍，则顶角的度数是_____；

（2）在△ABC 中，$AB=AC$，AD 是底边 BC 上的中线，$\angle B=70°$，$BC=15$，则$\angle BAD=$_____，$BD=$ _____.

4. 如图，点 D，E 在线段 BC 上，$BD=CE$，$\angle 1=\angle 2$，那么△ABC 是等腰三角形吗？



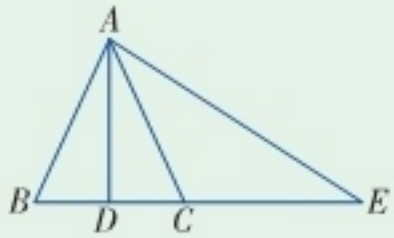
（第 4 题图）



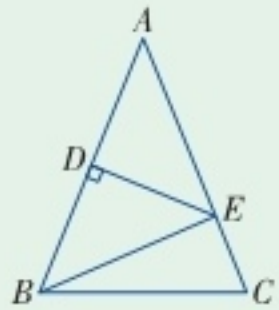
（第 5 题图）

5. 货轮在海上以每小时 40 海里的速度沿南偏东 40°的方向航行，已知货轮在 B 处时，测得灯塔 A 在其北偏东 80°的方向上，航行半小时后货轮到达 C 处，此时测得灯塔 A 在其北偏东 20°的方向上，求货轮到达 C 处时与灯塔 A 的距离.

6. 如图，$AD \perp BC$，$BD=DC$，点 C 在 AE 的垂直平分线上，试问 AB，AC，CE 的长度有什么关系？



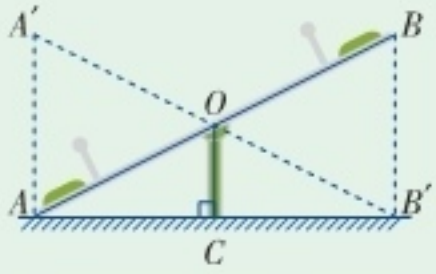
（第 6 题图）



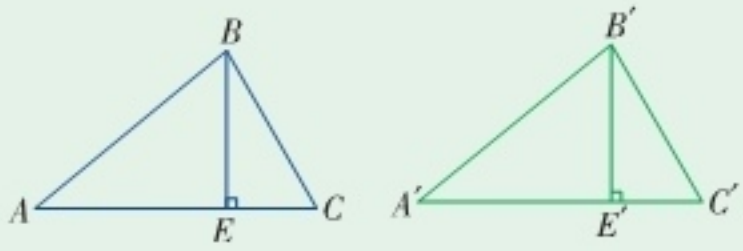
（第 7 题图）

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，DE 是 AB 的垂直平分线，$\triangle BCE$ 的周长为 24，$BC=10$，求 AB 的长.

8. 如图是小明和小刚玩跷跷板的示意图，横板绕它的中点 O 上下转动，立柱 OC 与地面垂直．当一方着地时，另一方上升到最高点．问：在上下转动横板的过程中，两人上升的最大高度 AA'，BB' 有何数量关系，为什么？



（第 8 题图）



（第 9 题图）

9. 已知：如图，$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，$BE$，$B'E'$ 分别是 AC 和 $A'C'$ 上的高.

求证：$BE=B'E'$.

10. 如图，要判定 $\triangle ABC \cong \triangle DBC$，已知 $BC=BC$（公共边），还需添加两个条件，一共有 6 种方法，下面已列出其中一种，请你补充完成其他的方法：

（1）$AB=DB$，$\angle 1=\angle 2$；（SAS）

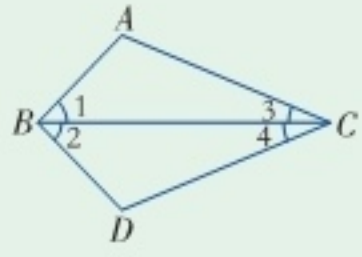
（2）_____，_____；（　　）

（3）_____，_____；（　　）

（4）_____，_____；（　　）

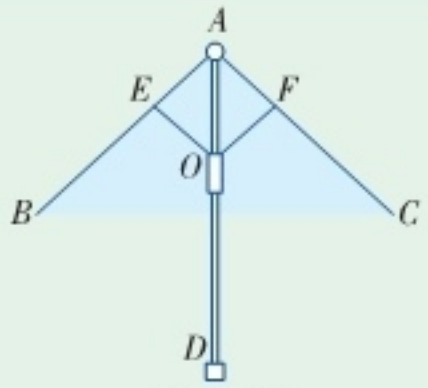
（5）_____，_____；（　　）

（6）_____，_____.（　　）



（第 10 题图）

11. 雨伞的中截面如图所示，伞骨$AB=AC$，支撑杆$OE=OF$，$AE=\frac{1}{3}AB$，$AF=\frac{1}{3}AC$. 当 O 沿 AD 滑动时，雨伞开闭. 问雨伞开闭过程中，$\angle BAD$ 与 $\angle CAD$ 有何关系？试说明理由.

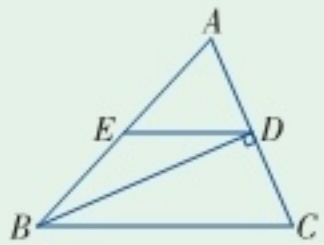


(第 11 题图)

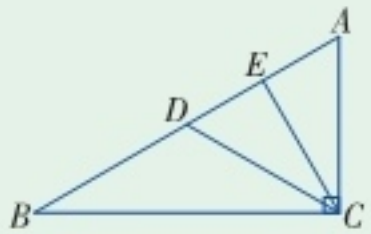
B 组

12. 如果一个等腰三角形的周长为 14，其一边长为 4，那么它的底边长为多少？

13. 如图，在$\triangle ABC$ 中，D 是 AC 的中点，且 $BD\perp AC$，$ED\parallel BC$，ED 交 AB 于点 E，$BC=5$ cm，$AC=4$ cm，求$\triangle AED$ 的周长.



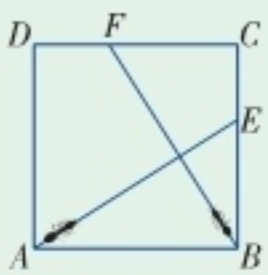
(第 13 题图)



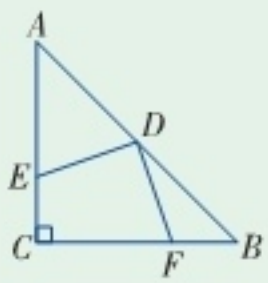
(第 14 题图)

14. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，D，E 是边 AB 上两点，且 CE 所在直线垂直平分线段 AD，CD 平分$\angle BCE$，$AC=5$ cm，求 BD 的长.

15. 如图，两只蚂蚁分别位于一个正方形相邻的两个顶点 A，B 上，它们分别沿 AE 和 BF 的路线向 BC 和 CD 爬行，如果 AE 和 BF 相互垂直，那么它们爬行的距离相等吗？



(第 15 题图)



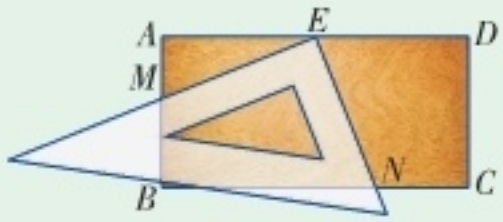
(第 16 题图)

16. 已知：如图，在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，D 是 AB 的中点，$DE\perp DF$，点 E，F 分别在 AC，BC 上.

求证：$DE=DF$.

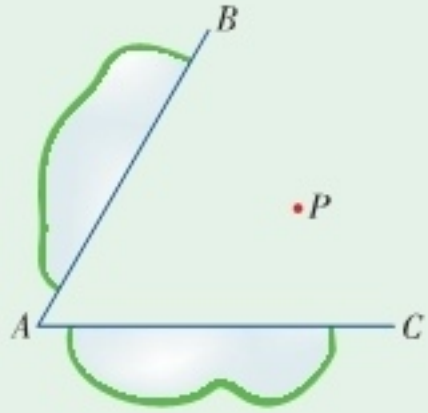
C 组

17. 在长方形 $ABCD$ 中，$AD=2AB$，E 是 AD 的中点，一块三角板的直角顶点与点 E 重合，将三角板绕点 E 按顺时针方向旋转，当三角板的两直角边分别与 AB，BC 相交于点 M，N 时，观察或测量 BM 与 CN 的长度，你能得到什么结论？并证明你的结论.



（第 17 题图）

18. 有一个养鱼专业户，在如图所示地形的两个池塘里养鱼，他每天早上要从住处 P 分别前往两个池塘投放鱼食，试问他怎样走才能以最短距离回到住地？



（第 18 题图）

欧几里得与《原本》


欧几里得

欧几里得(约公元前330—前275年)是古希腊最享有盛名的数学家，以其所著的《原本》而闻名于世. 他将公元前7世纪以来古希腊几何积累起来的丰富成果整理成一个严密的逻辑系统，使几何学成为一门独立的、演绎的科学，因此，欧几里得被誉为“几何学之父”.

1607年，意大利传教士利玛窦与明朝数学家徐光启根据拉丁文本《原本》(原书共15卷)合作译出了《原本》前六卷. 由于他们翻译的内容主要涉及平面几何的知识，于是他们将中文译本命名为《几何原本》，也就是从这个译本开始，中文的数学名词中有了“几何”一词. 1857年，英国人伟烈亚力和清朝数学家李善兰译出《原本》后九卷.


《原本》残片


公元1607年利玛窦、徐光启中文译本

在《几何原本》中，徐光启等人首创的几何学名词，例如点、线、直线、曲线、平面、四边形、多边形、平行线、对角线、直角、钝角等，也一直沿用至今.

欧几里得《原本》把人们公认的一些事实列成定义，通过定义给出概念，建立公理和公设，利用推理从公理和公设出发来论证命题. 这就构建了数学公理体系的雏形，奠定了几何学的公理体系的基本结构，这是人类建立的第一个能够被称之为科学的学科体系，给数学甚至物理学等自然学科的确立做出了楷模，正如爱因斯坦对《原本》的评价：“欧几里得几何为人类发现并验证真理提供了方法.”

综合与实践

找重心

我们知道，三角形三条中线的交点称为三角形的重心.

重心是一个物理名词，从效果上看，我们可以认为物体各部分所受重力的合力集中于一点，这一点就叫作该物体的重心. 在生活中，我们常常用手指来支撑一个物体(如图1)，不断变化手指的位置，物体越稳定，此时手指的位置就越接近重心.

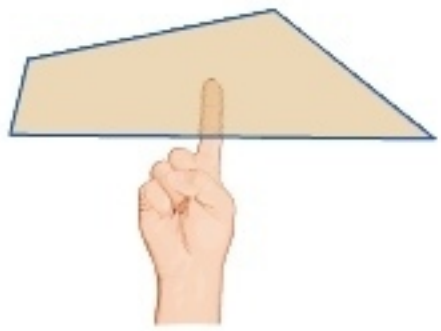


图1

做一做

把一根均匀的木棒悬挂在一根细绳上，不断调整悬挂点的位置，直至木棒处于水平状态(如图2)，记下悬挂点的位置，用刻度尺测量该点在木棒上的位置. 思考：当木棒处于水平状态时，悬挂点的位置与木棒的长度、粗细以及质量大小有关系吗？

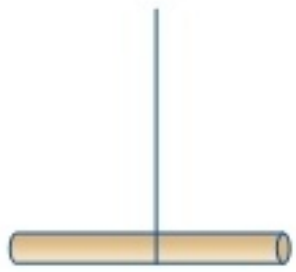


图2

在数学上，我们可以把一根均匀的木棒抽象地看成一条线段，一条线段的重心就是这条线段的中点. 类似地，我们可以抽象地把一块均匀的三角形纸板的重心看作这个三角形的重心，这样就产生了各种平面图形的重心概念.

试一试

取一块均匀的三角形纸板，画出它的两条中线，用一根细绳在两条中线的交点处将三角形纸板悬挂起来(如图3)，纸板处于水平状态吗？如果改变悬挂点，纸板还将平衡吗？

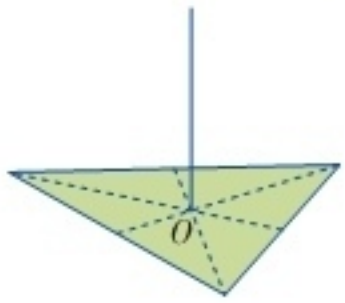


图3

在上述试验中，我们是用所学的几何知识，直接画出三角形中线的交点来找三角形纸板的重心. 在实际生活中，我们常常采用铅垂线法来找重心.

合作试验

(1) 分别准备锐角三角形、直角三角形、钝角三角形纸板，分别用其中的一种纸板做试验；

(2) 如图 4，用一根拴有重物的细绳连接在三角形纸板的一个顶点处，吊起硬纸板，在纸板上画下铅垂线的痕迹；

(3) 在三角形的另两个顶点处重复第(2)步，看看所画的三条铅垂线交于一点 O 吗？

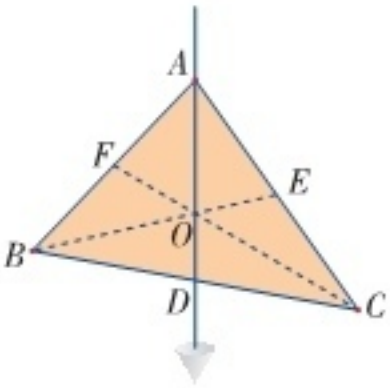


图 4

(4) 用刻度尺验证：这三条铅垂线是不是三角形的中线？

(5) 用手指顶着处于水平面的三角形纸板点 O 处，三角形纸板平衡吗？

拓展

用铅垂线法探寻平行四边形、长方形、正方形的重心.

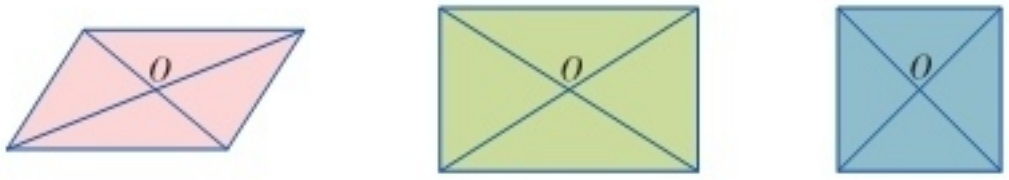


图 5

重心与它们的对角线的交点有什么关系？

通过这个实践活动，你能得出哪些结论？在活动的过程中，你有哪些体会？以小组合作形式写一份研究报告，展示研究成果，并在全班进行交流.

第3章

实 数

有理数都是有限小数或无限循环小数，但是在现实生活中，有些数却是无限不循环小数，例如圆周率π(=3.141 592 65…)就是这样一个数；又例如，一个面积为 8 的正方形的边长也是一个无限不循环小数.

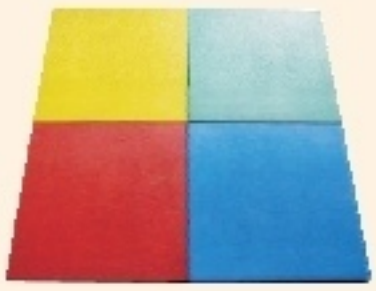
随着对数的认识的不断深入和发展，人们发现了许多无限不循环小数，这种小数叫作无理数. 有理数和无理数统称为实数.

本章我们学习什么是平方根、立方根、无理数、实数等概念，以及如何估计一个无理数的大致范围并求其近似值等.

3.1 平方根

动脑筋

某家庭在装修儿童房时需铺地垫 10.8 m^2，刚好用去正方形的地垫 30 块. 你能算出每块地垫的边长是多少吗？



每块正方形地垫的面积是

$$10.8 \div 30 = 0.36\ (m^2).$$

即　边长 × 边长 = 0.36.

由于　$0.6^2 = 0.36$，

因此面积为 0.36 m^2 的正方形地垫的边长是 0.6 m.

在实际问题中，有时要找一个数，使它的平方等于给定的数．由此我们抽象出下述概念：

如果有一个数 r，使得 $r^2 = a$，那么我们把 r 叫作 a 的一个**平方根**(square root)，也叫作二次方根. 这就是说，

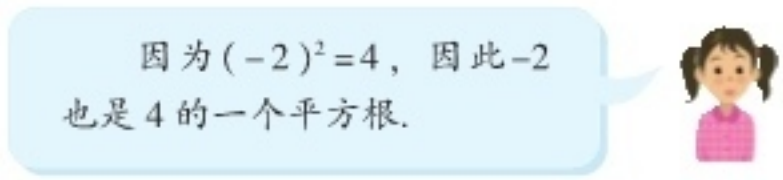
若 $r^2 = a$，则 r 是 a 的一个平方根.

例如，由于 $2^2 = 4$，因此 2 是 4 的一个平方根.

探究

4 的平方根除了 2 以外，还有其他的数吗？

为什么–2 也是 4 的平方根？



除了 2 和 –2 以外，4 的平方根还有其他的数吗？

因为边长大于 2 的正方形，它的面积一定大于 4，所以，比 2 大的数都不是 4 的平方根 .

类似地，边长小于 2 的正方形，它的面积一定小于 4，因此，比 2 小的正数都不是 4 的平方根.

由于 $(-b)^2=b^2$，因此，–2 以外的负数都不是 4 的平方根.

显然 0 不是 4 的平方根.

所以，4 的平方根有且只有两个：2 与 –2.

一般地，**如果 r 是正数 a 的一个平方根，那么 a 的平方根有且只有两个：r 与 $-r$.**

我们把正数 a 的正平方根叫作 a 的**算术平方根**(arithmetic square root)，记作 $\sqrt{a}$，读作“根号 a”；把 a 的负平方根记作 $-\sqrt{a}$，读作“负根号 a”. 这样，正数 a 的平方根可以用“$\pm\sqrt{a}$”来表示，读作“正、负根号 a”. 例如，4 的平方根是 2 与 –2，即 $\pm\sqrt{4}=\pm 2$.

说一说

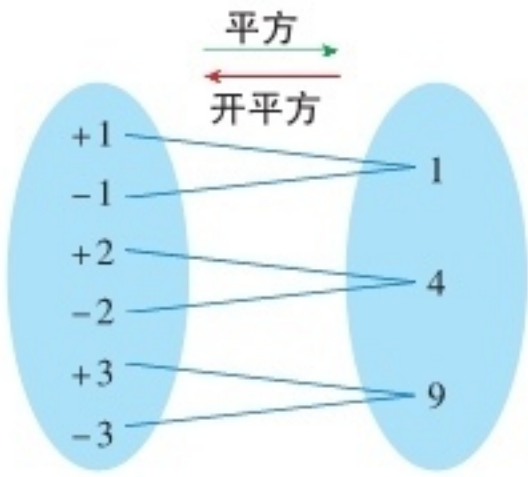
零的平方根是多少？负数有平方根吗？

由于 $0^2=0$，而非零数的平方不等于 0，因此**零的平方根就是 0 本身**. 我们把 0 的平方根也叫作 0 的算术平方根，记作 $\sqrt{0}$，即 $\sqrt{0}=0$.

由于同号两数相乘得正数，且$0^2=0$，即在迄今为止我们所认识的数中，任何一个数的平方都不会是负数，因此**负数没有平方根**.

求一个非负数的平方根的运算，叫作**开平方**(extraction of square root).

开平方与平方互为逆运算，根据这种关系，可以求一个数的平方根.



例 1 分别求下列各数的平方根：

$$36,\ \frac{25}{9},\ 1.21.$$

解 由于$6^2=36$，因此36的平方根是6与-6，即$\pm\sqrt{36}=\pm6$.

由于$\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$，因此$\frac{25}{9}$的平方根是$\frac{5}{3}$与$-\frac{5}{3}$，即$\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$.

由于$1.1^2=1.21$，因此1.21的平方根是1.1与-1.1，即$\pm\sqrt{1.21}=\pm1.1$.

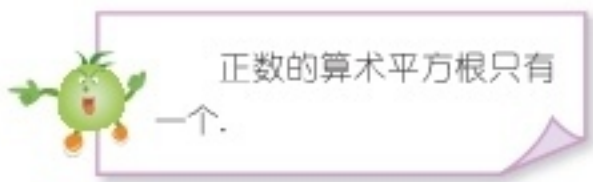
例 2 分别求下列各数的算术平方根：

$$100,\ \frac{16}{25},\ 0.49.$$

解 由于$10^2=100$，因此$\sqrt{100}=10$.

由于$\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$，因此$\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$.

由于$0.7^2=0.49$，因此$\sqrt{0.49}=0.7$.



练习

1. 分别求 64，$\frac{49}{81}$，6.25 的平方根.

2. 分别求 81，$\frac{25}{64}$，0.16 的算术平方根.

3. 判断下列说法是否正确.

（1）$\frac{5}{7}$是$\frac{25}{49}$的一个平方根；　　（2）$\sqrt{6}$是 6 的算术平方根；

（3）$\sqrt{16}$的值是 ±4；　　（4）$(-4)^2$的平方根是-4.

做一做

如图 3-1 所示，将一个长为 4 cm，宽为 2 cm 的长方形纸片剪拼成一个正方形. 最后得到的这个正方形的面积是多少呢？它的边长是整数吗？

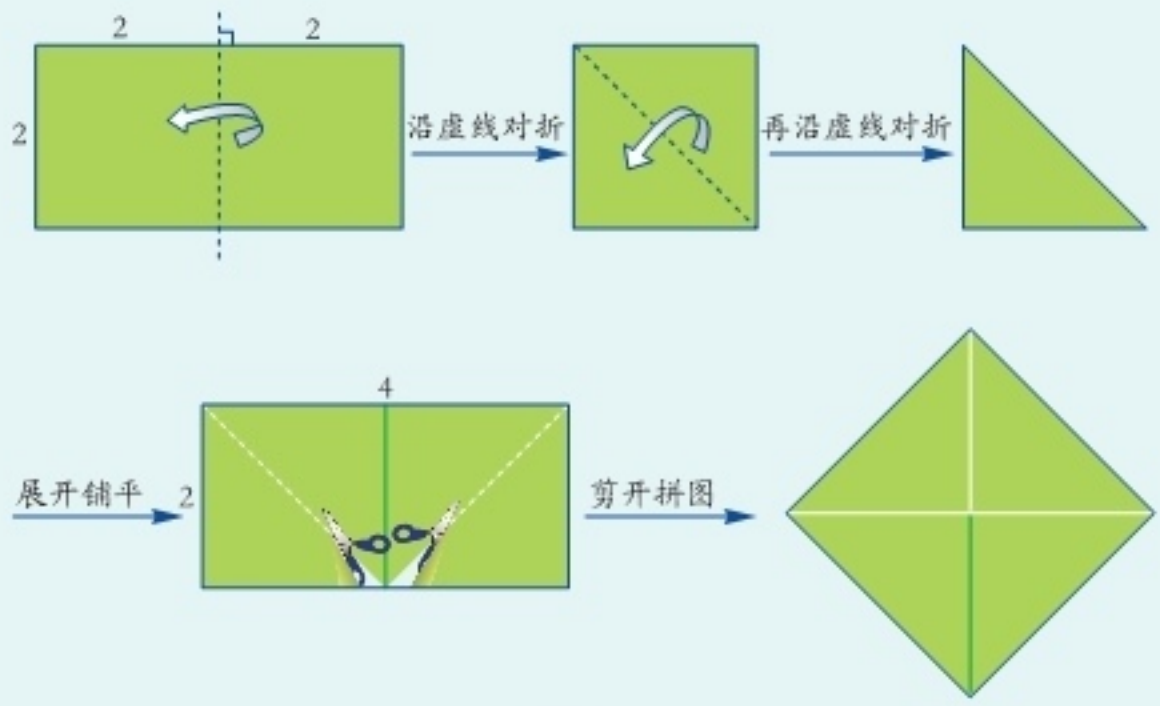


图 3-1

正方形的面积为 8 cm^2，由于$2^2=4$，$3^2=9$，又$4<8<9$，且面积较大的正方形的边长也较大，因此面积为 8 cm^2 的正方形的边长不是整数.

动脑筋

观察下列结果：

$2.8^2=7.84$，　　$2.9^2=8.41$；

$2.82^2=7.952\,4$，　　$2.83^2=8.008\,9$；

$2.828^2=7.997\,584$，　　$2.829^2=8.003\,241$；

…　　…

从上述数据，你能猜出面积为 8 的正方形的边长是多少吗？

面积为 8 的正方形，它的边长应该比 2.828 大，比 2.829 小，……

由此猜想，面积为 8 cm^2 的正方形，它的边长是一个小数点后面的位数可以不断增加的小数.

事实上，我们可以说明这个边长不是分数，从而它既不是有限小数，也不是无限循环小数，这种小数叫作**无限不循环小数**. 我们把无限不循环小数叫作**无理数**(irrational number).

由于正方形的边长的平方等于它的面积，因此面积为 8 cm^2 的正方形的边长可以记作$\sqrt{8}$ cm. 从上述分析知道，$\sqrt{8}$是一个无限不循环小数，即$\sqrt{8}$是一个无理数.

圆周率 $\pi=3.141\,592\,65\cdots$，也是一个无理数.

$\sqrt{2}=1.414\,213\,6\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\,050\,8\cdots$，…都是无理数.

与有理数一样，无理数也有正负之分，例如，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，π 是正无理数，$-\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，$-\pi$ 是负无理数.

根据实际需要，我们往往用一个有限小数来近似地表示一个无理数.

例如 $\pi=3.141\,592\,65\cdots$，用四舍五入法，分别取到小数点后面第二位，第三位，…，得到 $\pi\approx3.14$，$\pi\approx3.142$，…，我们称 3.14，3.142 是 π 的精确到小数点后面第二位，第三位的近似值.

3.14，3.142，3.141 6，…都是 π 的近似值，称它们为近似数.

利用计算器可以求一个正数的算术平方根或它的近似值.

例 3 用计算器求下列各式的值.

(1) $\sqrt{1\,024}$;

(2) $\sqrt{8}$ (精确到小数点后面第三位[①]).

解 (1) 依次按键: $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$

显示: 32

所以, $\sqrt{1\,024}=32$.

(2) 依次按键: $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{8}$ $\boxed{=}$

显示: 2.828 427 125

所以, $\sqrt{8}\approx 2.828$.

练习

1. 用计算器求下列各式的值:

(1) $\sqrt{3\,136}$;　　(2) $\sqrt{1.537\,6}$.

2. 面积为 6 cm^2 的正方形, 它的边长是多少? 用计算器求边长的近似值(精确到 0.001 cm).

3. 用计算器分别求 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{0.58}$ 的近似值(精确到 0.001).

习题 3.1

A 组

1. 分别求 49, 2.56, $\frac{9}{100}$ 的平方根.

① "精确到小数点后面第三位"也可以说成"精确到 0.001".

2. 分别求 25，0.81，$\frac{9}{16}$的算术平方根.

3. 求下列各式的值：

$\sqrt{1}$，　　$-\sqrt{2\frac{1}{4}}$，　　$\pm\sqrt{\frac{49}{16}}$，

$\sqrt{0.004\,9}$，　　$\pm\sqrt{(-7)^2}$，　　$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$.

4. 用计算器分别计算：

$$\sqrt{529}，\sqrt{8.41}，\sqrt{729}.$$

5. 某书房的地面是面积为 10 m^2 的正方形，它的边长是多少？用计算器求出边长的近似值(精确到 0.001 m).

6. 用计算器分别求$\sqrt{7}$，$\sqrt{12}$的近似值(精确到 0.001).

B 组

7. 如果 $b=-169$，那么$-b$ 有平方根吗？如果有，求出$-b$ 的平方根.

8. 填空：

(1) $(\sqrt{16})^2=$ _____，　　$(\sqrt{36})^2=$ _____，

$\sqrt{16^2}=$ _____，　　$\sqrt{(-16)^2}=$ _____.

(2) 由(1)猜测：

一个正数 a 先开平方，然后再平方，最后的结果等于 _____；

一个数 b 先平方，然后再求它的算术平方根，最后的结果等于 _____.

9. 估计与$\sqrt{500}$最接近的两个整数是多少？

10. 计算下表中各式的值，并将结果填在相应的空格中：

式 子	…	$\sqrt{0.000\,9}$	$\sqrt{0.09}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{900}$	$\sqrt{90\,000}$	…
结 果	…						…

你能发现什么规律？

3.2 立方根

说一说

如图 3-2，一个正方体的体积为 8 cm^3，它的棱长是多少？

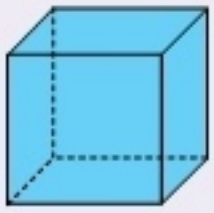
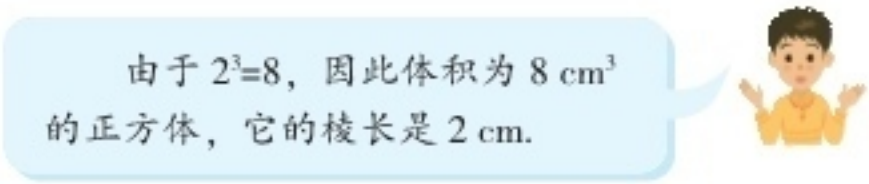


图 3-2



在实际问题中，有时要找一个数，使它的立方等于给定的数. 由此我们抽象出下述概念：

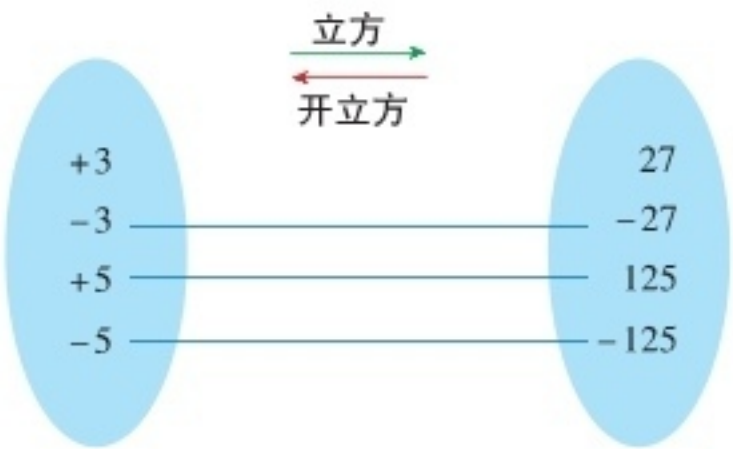
如果一个数b，使得 $b^3=a$，那么我们把 b 叫作 a 的一个**立方根**(cubic root)，也叫作三次方根. a 的立方根记作$\sqrt[3]{a}$，读作“立方根号 a”或“三次根号 a”.

例如，由于 $2^3=8$，因此 2 是 8 的一个立方根，即$\sqrt[3]{8}=2$.

由于$(-2)^3=-8$，因此 -2 是 -8 的一个立方根，即$\sqrt[3]{-8}=-2$.

求一个数的立方根的运算，叫作**开立方**(extraction of cubic root).

开立方与立方也互为逆运算，根据这种关系，可以求一个数的立方根.



例 1 分别求下列各数的立方根：

$$1,\ \frac{8}{27},\ 0,\ -0.064.$$

解 由于 $1^3=1$，因此 $\sqrt[3]{1}=1$；

由于 $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，因此 $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}$；

由于 $0^3=0$，因此 $\sqrt[3]{0}=0$；

由于 $(-0.4)^3=-0.064$，因此 $\sqrt[3]{-0.064}=-0.4$.

一般地，在迄今为止我们所认识的数中，每一个数有且只有一个立方根；一个正数有一个正的立方根，一个负数有一个负的立方根，0 的立方根是 0.

利用计算器可以求一个数的立方根或它的近似值.

例 2 用计算器求下列各数的立方根：

$$343,\ -1.331.$$

解 按键：[2ndF][√][3][4][3][=]①

显示：7

所以，$\sqrt[3]{343}=7$.

按键：[2ndF][√][(-)][1][.][3][3][1][=]

显示：-1.1

所以，$\sqrt[3]{-1.331}=-1.1$.

实际上，许多有理数的立方根都是无理数，如 $\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{3}$，…都是无理数，但我们可以用有理数来近似地表示它们.

例 3 用计算器求 $\sqrt[3]{2}$ 的近似值(精确到 0.001).

解 按键：[2ndF][√][2][=]

显示：1.259 921 05

所以，$\sqrt[3]{2}\approx 1.260$.

---

① [2ndF] 键是第二功能键，相继按 [2ndF][√] 键，意思是执行 [√] 上方所指 $\sqrt[3]{\ }$ 的功能运算.

练习

1. 求下列各数的立方根：

$$1,\ \frac{125}{8},\ -0.125.$$

2. 用计算器求下列各数的立方根：

$$-1\,000,\ 216,\ -3.375.$$

3. 用计算器求下列各数的近似值(精确到 0.001)：

$$\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[3]{-7}.$$

习题 3.2

A 组

1. 判断下列说法是否正确，并说明理由.

(1) ± 4 是 64 的立方根；

(2) -64 没有立方根；

(3) $(-5)^3$ 的立方根是 -5；

(4) 互为相反数的两个数的立方根也互为相反数.

2. 体积为 500 cm^3 的正方体魔方块，它的棱长大约是多少厘米(精确到 0.01 cm)？

3. 求下列各数的立方根：

$$-216,\ \frac{125}{64},\ -0.008,\ 10^6.$$

4. 计算：

$$-\sqrt[3]{-1},\ \sqrt[3]{-0.001},\ -\sqrt[3]{\frac{64}{125}},\ \sqrt[3]{10^3}.$$

B 组

5. 填空：

(1) $(\sqrt[3]{64})^3=$_____，　　$(\sqrt[3]{-64})^3=$_____，

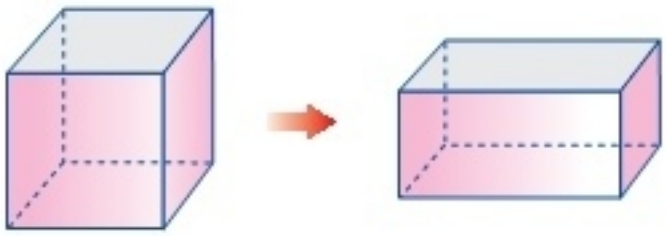
$\sqrt[3]{2^3}=$ _____，　　$\sqrt[3]{(-2)^3}=$ _____.

(2) 由(1)猜测：

一个数 a 先开立方，然后再立方，最后的结果等于 _____；

一个数 b 先立方，然后再求立方根，最后的结果等于 _____.

6. 如图，把一个棱长为 4 cm 的正方体橡皮泥捏成一个侧面边长相等，长为侧面边长 2 倍的长方体，那么捏成的长方体橡皮泥的长大约是多少厘米（精确到 0.1 cm）？



(第 6 题图)

7. 计算下表中各式的值，并将结果填在相应的空格中：

式 子	…	$\sqrt[3]{0.000\,216}$	$\sqrt[3]{0.216}$	$\sqrt[3]{216}$	$\sqrt[3]{216\,000}$	…
结 果	…					…

你能发现什么规律？

3.3 实 数

说一说

下列各数中，哪些是有理数？哪些是无理数？

$\sqrt{2}$，0，1.414，$\sqrt{9}$，π，$-\frac{2}{3}$，

$\sqrt[3]{2}$，0.101 001 000 1…(相邻两个 1 之间逐次增加一个 0).

0，1.414，$\sqrt{9}$，$-\frac{2}{3}$是有理数，

$\sqrt{2}$，π，$\sqrt[3]{2}$，0.101 001 000 1…是无理数.

有理数和无理数统称为**实数**(real number). 这样，我们可以得到：

实数 $\begin{cases} \text{有理数} \begin{cases} \text{整数} \\ \text{分数} \end{cases} \text{（有限小数或无限循环小数）} \\ \text{无理数（无限不循环小数）} \end{cases}$

在七年级上册我们已经学过：任何有理数都可以用数轴上唯一的一个点来表示，那么无理数是否也可以用数轴上的点来表示呢？

动脑筋

如何用数轴上的点表示无理数$\sqrt{8}$和$-\sqrt{8}$？

我们已经知道，一个面积为 8 的正方形(如图 3-3)的边长是$\sqrt{8}$. 因此我们以数轴的原点 O 为圆心，以正方形的边长为半径画弧，与正半轴的交点 M 就表示$\sqrt{8}$，与负半轴的交点 N 就表示$-\sqrt{8}$，如图 3-4 所示. 这样，我们就

图 3-3

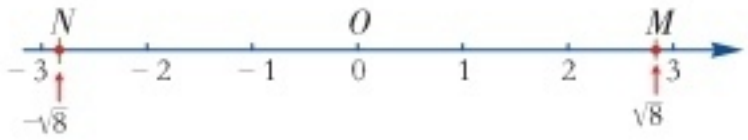


图 3-4

分别用数轴上唯一的一个点表示出了无理数$\sqrt{8}$和$-\sqrt{8}$.

事实上，每一个无理数都可以用数轴上唯一的一个点来表示.

因此综上所述可知：

每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示.

反过来，还可以说明：

数轴上每一个点都表示唯一的一个实数.

上面两个结论合起来可以简洁地说成：

实数和数轴上的点一一对应.

实数分为**正实数、零、负实数**. 与规定有理数的大小一样，规定正实数都大于 0，负实数都小于 0. 数轴上表示正实数的点在原点右边，表示负实数的点在原点左边.

与有理数一样，如果两个实数只有符号不同，那么其中的一个数叫作另一个数的**相反数**，也说它们互为相反数. 例如，$\sqrt{2}$和$-\sqrt{2}$互为相反数，0 的相反数是 0. 我们把实数 a 的相反数记作$-a$.

在数轴上，实数的绝对值意义也与有理数一样：正实数的绝对值是它本身，负实数的绝对值是它的相反数，0 的绝对值是 0. 例如：$|\sqrt{2}|=\sqrt{2}$，$|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$.

设 a 表示一个实数，则

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{当 } a>0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } a=0 \text{ 时}, \\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时}. \end{cases}$$

例 1 求下列各数的相反数和绝对值:

$$-\sqrt{3},\ \pi-3.14.$$

解 因为

$$-(-\sqrt{3})=\sqrt{3},$$

$$-(\pi-3.14)=3.14-\pi,$$

所以，$-\sqrt{3}$，$\pi-3.14$ 的相反数分别为 $\sqrt{3}$，$3.14-\pi$.

由绝对值的意义得：

$$|-\sqrt{3}|=\sqrt{3},\ |\pi-3.14|=\pi-3.14.$$

练习

1. 把下列各数填入相应的框内：

$-\pi$，-3.14，$-\sqrt{3}$，1.732，0，$\frac{3}{10}$，18，$\sqrt{\frac{25}{36}}$，$\sqrt{7}$，$-\sqrt{16}$.

2. 求下列各数的相反数和绝对值：

$$3.14,\ -\sqrt{7},\ -\frac{\pi}{2},\ \pi-3.15.$$

3. 判断(正确的画“√”，错误的画“×”).

(1) 任何一个无理数的绝对值都是正数；（　）

(2) 带根号的数都是无理数；（　）

(3) 实数可以分为正实数和负实数两类.（　）

把数从有理数扩充到实数以后，实数也可以进行加、减、乘、除、乘方运算，而且非负数可以进行开平方运算，任意实数都可以进行开立方运算.

在进行实数的运算时，有理数的运算法则、运算律等，对于实数仍然成立.

做一做

填空：

设 a，b，c 是任意实数，则

(1) $a+b=$_____（加法交换律）；

(2) $(a+b)+c=$_____（加法结合律）；

(3) $a+0=0+a=$_____；

(4) $a+(-a)=(-a)+a=$_____；

(5) $ab=$_____（乘法交换律）；

(6) $(ab)c=$_____（乘法结合律）；

(7) $1\cdot a=a\cdot 1=$_____；

(8) $a(b+c)=$_____（乘法对于加法的分配律），

$(b+c)a=$_____（乘法对于加法的分配律）；

(9) 实数的减法运算规定为 $a-b=a+$_____；

(10) 对于每一个非零实数 a，存在一个实数 b，满足 $a\cdot b=b\cdot a=1$，我们把 b 叫作 a 的_____；

(11) 实数的除法运算(除数 $b\neq 0$)，规定为 $a\div b=a\cdot$_____；

(12) 实数有一条重要性质：如果 $a\neq 0$，$b\neq 0$，那么 ab_____0.

实数也可以比较大小：对于实数 a，b，如果 $a-b>0$，则称 a 大于 b（或者 b 小于 a），记作 $a>b$（或 $b<a$）；同样地，如果 $a-b<0$，则称 a 小于 b，记作 $a<b$.

正实数大于一切负实数；两个负实数，绝对值大的数反而小. 从而数轴上右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大.

对于实数，我们可以得出：

每个正实数有且只有两个平方根，它们互为相反数；
0 的平方根是 0；
在实数范围内，负实数没有平方根；
在实数范围内，每个实数 a 有且只有一个立方根.

前面所学的有关数、式、方程(组)的性质、法则和解法，对于实数仍然成立.

例 2 计算下列各式的值：

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{5}$；　　(2) $2\sqrt{3}-3\sqrt{3}$.

解 (1) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{5}$

$=\sqrt{3}+(\sqrt{5}-\sqrt{5})$（加法结合律）

$=\sqrt{3}+0$

$=\sqrt{3}$.

(2) $2\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

$=(2-3)\sqrt{3}$（乘法对于加法的分配律）

$=-\sqrt{3}$.

例 3 用计算器计算：$\sqrt{2}\times\sqrt{5}$（精确到小数点后面第二位）.

解 按键：$\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$

显示：3.162 277 66

精确到小数点后面第二位得：3.16.

$$\sqrt{2}\times\sqrt{5}\approx 3.16.$$

在实数运算中，如果遇到无理数，并且需要求出结果的近似值时，可按要求的精确度用相应的近似有限小数代替无理数，再进行计算.

动脑筋

不用计算器，$\sqrt{5}$ 与 2 比较哪个大？与 3 比较呢？

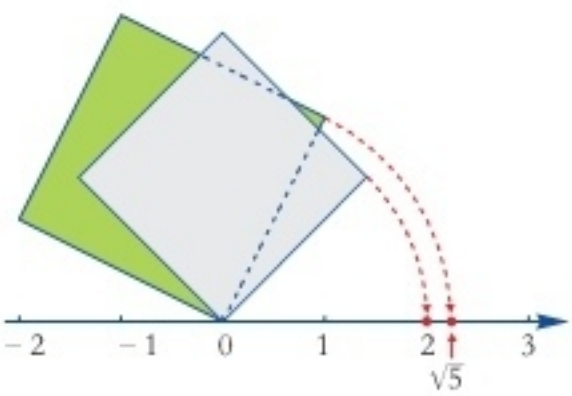


图 3–5

$\sqrt{5}$，2 可以看作分别是面积为 5，4 的正方形的边长，容易说明：面积较大的正方形，它的边长也较大，因此 $\sqrt{5}>2$.

同样，因为 $5<9$，所以 $\sqrt{5}<3$.

练习

1. 计算：

(1) $3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{2}$；　　(2) $3\sqrt{5}-5\sqrt{5}$.

2. 用计算器计算(精确到 0.01)：

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$；　　(2) $\sqrt[3]{5}-1$；　　(3) $\sqrt{5}\pi$.

3. 估计$\sqrt{37}$与 6 的大小.

习题 3.3

A 组

1. 下列各数中，哪些是有理数？哪些是无理数？

$$\frac{22}{7},\ 3.141\,592\,6,\ 3.\dot{3},\ \sqrt{1},\ \sqrt{5},\ -\sqrt[3]{8},\ \sqrt[3]{9}.$$

2. 求下列各数的相反数和绝对值：

$$\sqrt[3]{2},\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ \sqrt{8}-2.8,\ \pi-3.141\,5.$$

3. 设 a 是实数，n 是正整数，规定

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a}.$$

设 a，b 是实数，n，m 是正整数，则

$a^n\cdot a^m=$_____；　$(a^n)^m=$_____；　$(ab)^n=$_____.

4. 计算：

(1) $3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+(-\sqrt{3})$；　　(2) $2\sqrt[3]{5}-(-\sqrt[3]{5})$.

5. 用计算器计算(精确到 0.01)：

(1) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$；　　(2) $\sqrt{23}\div\sqrt{13}$.

6. 估计 5 与 $\sqrt{26}$的大小.

7. 若某圆形花坛的面积为 12.61 m^2，则它的半径大约是多少米(精确到 0.01 m)？

B 组

8. 估计$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$与$\frac{1}{2}$哪个大，与 1 比呢？

9. 当 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt[3]{2}$ 时，求下列各式的值：

(1) a^2-b^3；　　(2) a^6-b^6.

10. 解下列方程：

(1) $3x+\sqrt{2}=0$；　　(2) $-2x+\sqrt{5}=0$.

11. 一座圆锥形建筑物，测得它的底面面积为 1 658 m^2，则它的底面周长大约是多少米(精确到 0.01 m)？

用计算机找$\sqrt{8}$的近似值

我们知道，边长为 x 的正方形的面积为 x^2，例如，当 $x=2$ 时，$x^2=4$；

当 $x=3$ 时，$x^2=9$；

当 $x=\sqrt{8}$ 时，$x^2=8$.

容易知道面积较大的正方形，它的边长也较大，因此我们可知$\sqrt{8}$必介于 2 与 3 之间(如图 1).

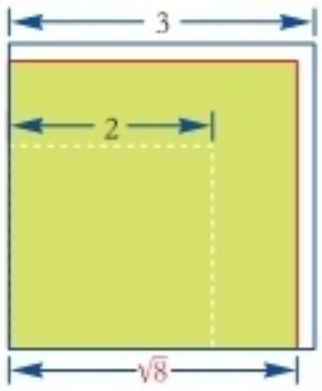
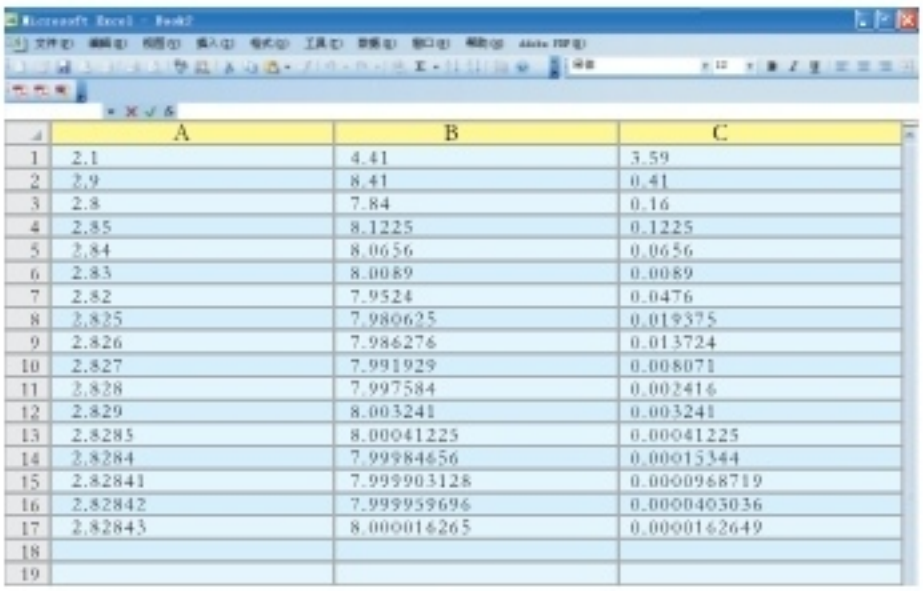


图 1

为了求出$\sqrt{8}$的近似值，我们可以用计算器直接计算，还可以借助 Excel 软件来估计$\sqrt{8}$的近似值.

打开 Excel，在单元格 A1 中，输入一个介于 2 与 3 之间的数值，然后在 B1 中输入："= A1^2"，得到 A1 中数值的平方；再在 C1 中输入："= abs (8-B1)"，得到 8 与 B1 中数值的差的绝对值.



	A	B	C
1	2.1	4.41	3.59
2	2.9	8.41	0.41
3	2.8	7.84	0.16
4	2.85	8.1225	0.1225
5	2.84	8.0656	0.0656
6	2.83	8.0089	0.0089
7	2.82	7.9524	0.0476
8	2.825	7.980625	0.019375
9	2.826	7.986276	0.013724
10	2.827	7.991929	0.008071
11	2.828	7.997584	0.002416
12	2.829	8.003241	0.003241
13	2.8285	8.00041225	0.00041225
14	2.8284	7.99984656	0.00015344
15	2.82841	7.999903128	0.0000968719
16	2.82842	7.999959696	0.0000403036
17	2.82843	8.000016265	0.0000162649
18			
19			

图 2

为得到更准确的近似值，可在某个单元格中点击右键菜单，选择"设置单元格格式"，点击"数值"后即可修改小数位数.

如果 C1 中得到的数值比较大，说明最初输入 A1 中的数与$\sqrt{8}$相差较大，需再作调整(如图 2).

把你所得到的近似值与同学交流，我们还可以如何更快地找到$\sqrt{8}$的近似值？

小结与复习

回顾

1. 试写出几个数来说明什么是一个数的平方根、算术平方根、立方根.
2. 举例说明乘方与开方之间的关系.
3. 什么叫无理数？有理数和无理数的区别是什么？
4. 实数如何分类？实数与数轴上的点之间有什么关系？

本章知识结构

注意

1. 当数扩充到实数后，我们现在再说“数”，通常指的是实数.

2. 正数的平方根有两个，零的平方根是零，在实数范围内，负数没有平方根. 求一个正数的平方根时，不要漏掉其中的负平方根.

3. 在实数范围内，任何实数有且只有一个立方根.

复习题 3

A 组

1. 把下列各数写入相应的横线上：

$-\frac{1}{9}$，$\sqrt[3]{12}$，0.7，$\frac{\pi}{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{-27}$，0，0.686 886 888 6…(相邻两个 6 之间 8 的个数逐次加 1)

(1) 正数：_____；

(2) 负数：_____；

(3) 有理数：_____；

(4) 无理数：_____.

2. 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 的平方根和立方根中，哪些是有理数？哪些是无理数？

3. 分别求$(-4)^2$，$\sqrt{81}$，$\frac{49}{81}$的平方根.

4. 用计算器计算$\sqrt{481}$，$\sqrt{0.357}$，$\sqrt{8.26}$的近似值(精确到 0.001).

5. 分别求$(-4)^3$，$\sqrt{64}$，$-3\frac{3}{8}$的立方根.

6. 填空：

(1) $(\sqrt{81})^2=$ _____；　　(2) $\sqrt{(-13)^2}=$ _____；

(3) $(\sqrt[3]{27})^3=$ _____；　　(4) $\sqrt[3]{(-13)^3}=$ _____.

7. 填空：

(1) 设 $a>0$，则 $(\sqrt{a})^2=$ _____；

(2) 设 a 是任一实数，则$\sqrt{a^2}=$ _____，$(\sqrt[3]{a})^3=$ _____；

(3) 一个数的平方根等于它本身，这个数是 _____；

(4) 一个数的立方根等于它本身，这个数是 _____.

8. 求下列各数的相反数和绝对值：

$$-2.5,\ -\sqrt{7},\ -\frac{\pi}{2},\ 4-\sqrt{15}.$$

9. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{-1}$；　(2) $\sqrt{\frac{25}{121}}$；　(3) $-\sqrt{\frac{4}{81}}$；　(4) $\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$.

10. 计算：

(1) $3(\sqrt{2}-\sqrt{3})+3\sqrt{2}$；　(2) $(-\sqrt{2})^2-(\sqrt[3]{2})^3$.

11. 用计算器计算(精确到 0.01)：

(1) $5\sqrt{2}-2\sqrt{3}+1$；　(2) $3\sqrt{7}+5-\sqrt{11}$.

12. 估计$\sqrt{86}$与 10 的大小.

B 组

13. 满足$\sqrt{3}<x<\sqrt{11}$的整数 x有哪些？

14. 当 $x=\sqrt{5}$ 时，求下列各式的值(精确到 0.001)：

(1) $\sqrt{3}x+2$；　(2) πx^2.

15. 已知某球形建筑物的体积为 100 m^3，则这座球形建筑物的半径是多少米(结果精确到 0.01 m，球体积公式是 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，其中 R 是球的半径)？

C 组

16. 已知一个圆和一个正方形的面积都是 4π cm^2，分别求出圆和正方形的周长(精确到 0.01 cm)，并比较它们周长的大小.

17. (1) 请你按照下述规律写出 16 个数：第 1，2 个数都是 1，从第 3 个数起，每个数都是相邻的前面两个数的和；

(2) 对于上述 16 个数，求每一个数与它相邻的后面一个数的比值(精确到 0.000 1)；

(3) 用计算器计算$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$(精确到 0.001)；

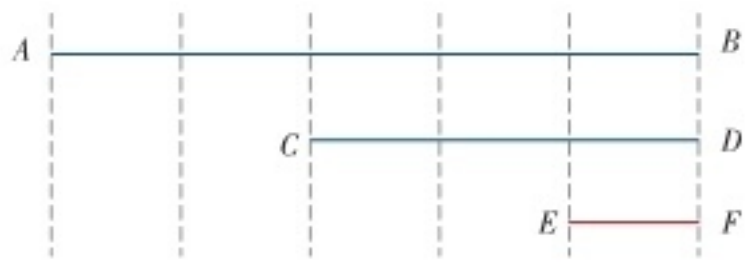
(4) 观察第(2)、(3)题的计算结果，你能作出什么猜测？

无理数的由来

有理数在英文中叫作“rational number”，其中“ratio”源自拉丁文，意思是“比”，有理数也就是两个整数的比，或者说是可以用分数形式写出来的数．不能用两个整数的比来表示的数叫作“irrational number”，例如：$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{5}$，π，翻译成中文就叫“无理数”．

“无理数”在西方数学史上，源自于古希腊人对“不可公度量”的发现，历经两千多年的演进与论辩，直至19世纪才真正在数学中找到坚实的基础．

公元前500年左右，古希腊数学家毕达哥拉斯和他的学徒创立了毕达哥拉斯学派．当时，这个学派的人都认为在比较两条线段的长度时，一定可以找到一个“公度量”，使得这两条线段都是这个“公度量”的整数倍(如图1)．



线段 EF 是线段 AB 与 CD 的最大公度量

图1

在“不可公度量的比”尚未出现之前，毕氏学派认为利用“比”的概念，就可以理解整个宇宙了，认为宇宙的一切事物都可以用自然数或两自然数之比来理解．可是，他们并不把“比”当作“数”来看待，毕氏学派的所谓“数”就是自然数．因此，当$\sqrt{2}$被发现时，毕氏学派便陷入了危机．

无理数的发现是古希腊人对数学的巨大贡献．其发现历程有两种传说：

其一，毕达哥拉斯的一个得意门生希帕苏斯在研究一个边长为1的正方形的对角线 l 的长度时，发现正方形的对角线与其一边之比是不可

公度量的(如图 2).

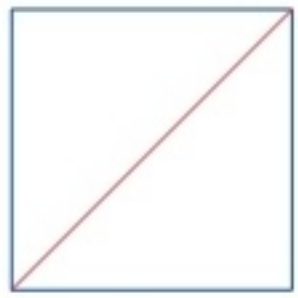


图 2

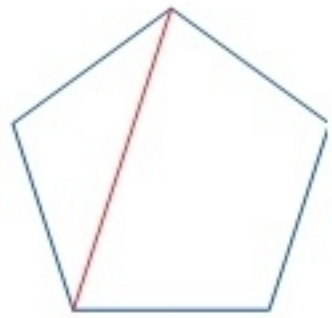


图 3

其二，希帕苏斯在利用辗转丈量法时，发现正五边形的对角线与其一边之比是不可公度量的(如图 3).

希帕苏斯的这个发现打破了该学派的信念，使该学派的成员惊慌不安，他把这种不能用两个整数的比来表达的比称为“不可公度量的比”. 据传，希帕苏斯因此被同门抛入大海，史称“第一次数学危机”.

“第一次数学危机”使人们终于认识到，除了整数和分数以外，确实还存在另外的数，当时希腊称之为“不可公度量”. 因为对这种“怪数”的接受并非情愿，于是后人给它起了一个特殊的名字——“irrational number”.

无理数发现之后，对以后的数学发展起到了极大的推动作用，人们扩大了对数的认识，并认识到：虽然有理数的个数是无穷无尽的，但是仍然不能包括所有的数. 在相邻的两个有理数之间，还有许多无理数. 有理数加上无理数，才能组成完整的实数大家庭.

第4章

一元一次不等式(组)

现实世界中，数量之间不相等关系比比皆是. 例如在高速公路上行驶的所有机动车最低速度不能低于 60 km/h，而对于最高速度，不同路段、不同车型都有不同的规定，如上图中的路段，小客车的速度应不超过 100 km/h，那么通行该路段的小客车的速度 v 的范围为：$v \geqslant 60$，且 $v \leqslant 100$.

本章我们将学习不等式的概念、不等式的基本性质等内容，重点学习一元一次不等式和一元一次不等式组的解法，并利用所学知识来解决一些简单的实际问题.

4.1 不等式

现实生活中，数量之间存在着相等与不相等的关系．对于不相等的关系问题，我们如何用式子来表示它们呢？

例如，小明的身高为 155 cm，小聪的身高为 156 cm，则我们可以用不等号“>”或“<”来表示它们的高度之间的关系，如 $156>155$ 或 $155<156$.

动脑筋

（1）如图 4–1 所示，处于平衡状态的托盘天平的右盘放上一质量为 50 g 的砝码，左盘放上一个圆球后向左倾斜，问圆球的质量 x g 与质量为 50 g 的砝码之间具有怎样的关系？

图 4–1

（2）一辆轿车在一条规定车速不低于 60 km/h，且不高于 100 km/h 的高速公路上行驶，如何用式子来表示轿车在该高速公路上行驶的路程 s(km)与行驶时间 x(h)之间的关系呢？

对于(1)，我们很容易知道圆球的质量大于砝码的质量，即 $x>50$.

对于(2)，根据路程与速度、时间之间的关系可得：$s\geqslant 60x$，且$s\leqslant 100x$.

像$156>155$，$155<156$，$x>50$，$s\geqslant 60x$，$s\leqslant 100x$ 这样，我们把用不等号（$>$，$<$，$\geqslant$，$\leqslant$，$\neq$）[1]连接而成的式子叫作**不等式**(inequality).

① 符号“$\geqslant$”读作“大于或等于”，也可读作“不小于”；符号“$\leqslant$”读作“小于或等于”，也可读作“不大于”；符号“$\neq$”读作“不等于”.

例 用不等式表示下列数量关系：

（1）x 的 5 倍大于 -7；

（2）a 与 b 的和的一半小于 -1；

（3）长、宽分别为 x cm，y cm 的长方形的面积小于边长为 a cm 的正方形的面积.

解 （1）$5x>-7$.

（2）$\frac{a+b}{2}<-1$.

（3）$xy<a^2$.

做一做

已知一支圆珠笔 1.5 元，签字笔与圆珠笔相比每支贵 2 元. 小华想要买 x 支圆珠笔和 10 支签字笔，若付 50 元仍找回若干元，则如何用含 x 的不等式来表示小华所需支付的金额与 50 元之间的关系？

练习

1. 用不等式表示下列数量关系：

（1）a 是非负数；

（2）x 比 -3 小；

（3）两数 m 与 n 的差大于 5.

2. 奥运射箭比赛，每一箭满分为 10 分. 某选手在参加比赛时，前十箭中最低得分为 7 分，求该选手前十箭总得分 x 的范围.

习题 4.1

A 组

1. 为了保障交通安全，隧道入口通常设置有明显的限高标志. 已知图中的隧道限制高度为 4.5 m，若某货车能够安全通过该隧道，则货车的高度 h(m)与限高 4.5 m 之间的关系是怎样的？

(第 1 题图)

2. 用不等式表示下列数量关系：

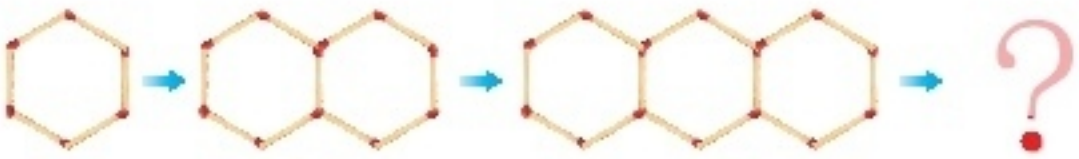
(1) x 的 2 倍与 1 的差大于或等于 3；

(2) x 与 y 的和的平方大于 100；

(3) a 与 b 的积与 a 的和大于 12.

B 组

3. 小强用 81 根火柴依下图的规律摆六边形，请用不等式表示小强可摆出六边形的个数 x 与火柴根数之间的关系.



(第 3 题图)

4. 某商场 A 型冰箱的售价是 2 190 元 / 台，为了减少库存，商场决定对 A 型冰箱降价销售. 已知 A 型冰箱的进价为 1 700 元 / 台，商场为保证利润率不低于 3%，试用不等式表示 A 型冰箱的降价范围.

4.2 不等式的基本性质

我们在七年级上册已经学过等式的基本性质，那么不等式具有哪些性质呢？

探究

1. 用不等号填空：

（1）5 ____ 3；

$5+2$ _____ $3+2$；

$5-2$ _____ $3-2$.

（2）2 ____ 4；

$2+1$ _____ $4+1$；

$2-3$ _____ $4-3$.

2. 水果店的小王从水果批发市场购进 100 kg 梨和 84 kg 苹果. 在卖出 a kg 梨和 a kg 苹果后，又分别各购进了 b kg 的梨和苹果. 请用“>”或“<”填空：

$100-a$ _____ $84-a$；

$100-a+b$ _____ $84-a+b$.

3. 自己任意写一个不等式，在它的两边同时加上或减去同一个数，看看不等关系有没有变化. 与同桌互相交流，你们发现了什么规律？

一般地，不等式具有如下性质：

不等式基本性质1 不等式的两边都加上（或减去）同一个数（或式），不等号的方向不变.

即，如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$，$a-c>b-c$.

例 1 用“>”或“<”填空：

（1）已知 $a>b$，则 $a+3$ ____ $b+3$；

（2）已知 $a<b$，则 $a-5$ ____ $b-5$.

解 （1）因为 $a>b$，两边都加上 3，由不等式基本性质 1，得

$$a+3>b+3.$$

（2）因为 $a<b$，两边都减去 5，由不等式基本性质 1，得

$$a-5<b-5.$$

例 2 把下列不等式化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式：

(1) $x+6>5$；　　(2) $3x<2x-2$.

解 (1) 不等式的两边都减去 6，由不等式基本性质 1，得

$$x+6-6>5-6,$$

即

$$x>-1.$$

(2) 不等式的两边都减去 $2x$，由不等式基本性质 1，得

$$3x-2x<2x-2-2x,$$

即

$$x<-2.$$

由(2)可以看出，运用不等式基本性质1 对 $3x<2x-2$ 进行化简的过程，就是对不等式 $3x<2x-2$ 作了如下变形：

$$3x<\boxed{2x}-2$$

$$3x\ \boxed{-2x}<-2$$

从变形前后的两个不等式可以看出，这种变形就是把不等式一边的某一项变号后移到另一边，我们把这种变形称为**移项**.

动脑筋

我们知道三角形任意两边之和大于第三边，即如图 4-2 所示，在△ABC 中，有

$$AB+BC>AC,$$
$$BC+AC>AB,$$
$$AC+AB>BC.$$

图 4-2

那么，三角形中两边之差与第三边又有怎样的关系呢？

根据不等式基本性质 1，我们可以把不等式 $AB+BC>AC$ 中的 BC 移到右边，于是得到 $AB>AC-BC$，即 $AC-BC<AB$.

同理，$AB-AC<BC$，$BC-AB<AC$.

由此可得，三角形任意两边之差小于第三边.

练习

1. 已知 $a<b$，用“>”或“<”填空：

（1）$a+12$____$b+12$；　　（2）$b-10$____$a-10$.

2. 把下列不等式化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式：

（1）$1+x>3$；　　（2）$2x<x+6$.

探究

1. 用不等号填空：

（1）6____4；　　（2）-2____-4；

6×2____4×2；　　-2×2____-4×2；

$6\div(-2)$____$4\div(-2)$.　　$-2\div(-2)$____$-4\div(-2)$.

2. (1) 已知苹果的价格是 a 元/kg，梨的价格是 b 元/kg，且 $a>b$. 小李各买了 3 kg 苹果和梨，则买哪种水果花钱较多？用不等号填空：

$$3a\_\_\_\_3b.$$

(2) 在某次知识抢答赛中，甲、乙两队的总得分分别为 a，b，其中 $a>b$. 已知每队人员均为 3 名，则哪队的平均得分高？用不等号填空：

$$a\div3\_\_\_\_b\div3.$$

3. 自己写一个不等式，分别在它的两边都乘(或除以)同一个正数或负数，看看有怎样的结果. 与同桌互相交流，你们发现了什么规律？

一般地，不等式还有如下性质：

不等式基本性质 2　**不等式的两边都乘(或除以)同一个正数，不等号的方向不变.**

即，如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$，$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

不等式基本性质 3 不等式的两边都乘(或除以)同一个负数，不等号的方向改变.

即，如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

例 3 用“>”或“<”填空：

(1) 已知 $a>b$，则 $3a$ _____ $3b$；

(2) 已知 $a>b$，则 $-a$ _____ $-b$；

(3) 已知 $a<b$，则 $-\frac{a}{3}+2$ _____ $-\frac{b}{3}+2$.

解 (1) 因为 $a>b$，两边都乘 3，由不等式基本性质 2，得

$$3a>3b.$$

(2) 因为 $a>b$，两边都乘 -1，由不等式基本性质 3，得

$$-a<-b.$$

(3) 因为 $a<b$，两边都除以 -3，由不等式基本性质 3，得

$$-\frac{a}{3}>-\frac{b}{3},$$

因为 $-\frac{a}{3}>-\frac{b}{3}$，两边都加上 2，由不等式基本性质 1，得

$$-\frac{a}{3}+2>-\frac{b}{3}+2.$$

说一说

下面是某同学根据不等式的性质做的一道题：

在不等式 $-4x+5>9$ 的两边都减去 5，得
$-4x>4$.
在不等式 $-4x>4$ 的两边都除以 -4，得
$x>-1$.

请问他做对了吗？如果不对，请改正.

议一议

不等式的基本性质与等式的基本性质有什么相同点和不同点？

练习

1. 已知 $a>b$，用“>”或“<”填空：

（1）$2a$____$2b$；　　（2）$-3a$____$-3b$；

（3）$-\frac{a}{2}+1$____$-\frac{b}{2}+1$.

2. 用“>”或“<”填空：

（1）如果 $1-x>3$，那么 $-x$____$3-1$，得 x____-2；

（2）如果 $x+2<3x+8$，那么 $x-3x$____$8-2$，即 $-2x$____6，得 x____-3.

习题 4.2

A 组

1. 用“>”或“<”填空：

（1）由 $a>b$，可得 $a-\frac{1}{3}$____$b-\frac{1}{3}$；

（2）由 $a<b$，可得 $-2+a$____$-2+b$；

（3）由 $a>b$，可得 $a+m$____$b+m$；

（4）由 $m>n$，可得 $2m$____$m+n$.

2. 把下列不等式化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式：

（1）$x+1<5$；　　（2）$7x<6x+3$.

3. 已知 $a>b$，用“>”或“<”填空：

（1）$5a$____$5b$；　　（2）$-3-a$____$-3-b$；

（3）$-\frac{1}{4}a$____$-\frac{1}{4}b$；　　（4）如果 $c<0$，那么 $\frac{b}{c}$____$\frac{a}{c}$.

4. 把下列不等式化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式：

（1）$2x+5>3$；　　（2）$6x-7<0$；

（3）$-3x+2>4$；　　（4）$-\frac{1}{4}x+4>\frac{1}{2}$.

B 组

5. (1) 由 $a>b$ 得到 $ac^2>bc^2$ 的条件是：c____0；

(2) 由 $4a<3a$，可得 a____0.

6. 用“>”、“<”或“=”填空：

(1) 当 $b>0$ 时，$a+b$ ____ a；

(2) 当 $b=0$ 时，$a+b$ ____ a；

(3) 当 $b<0$ 时，$a+b$ ____ a.

7. 一根 25 cm 长的蜡烛，假设点燃后每小时烧去 5 cm，燃烧 x h 后，长度已不足 15 cm. 请你根据上面的描述列出一个不等式，并将所列不等式化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式.

4.3 一元一次不等式的解法

动脑筋

已知一台升降机的最大载重量是 1 200 kg，在一名重 75 kg 的工人乘坐的情况下，它最多能装载多少件 25 kg 重的货物？

本问题中涉及的数量关系是：

工人重+货物重≤最大载重量.

设能载 x 件 25 kg 重的货物，因为升降机最大载重量是 1 200 kg，所以有

$$75+25x \leqslant 1\,200. \quad ①$$

像 $75+25x \leqslant 1\,200$ 这样，含有一个未知数，且含未知数的项的次数是 1 的不等式，称为**一元一次不等式**(linear inequality with one unknown).

为了求出升降机能装载货物的件数，需要求出满足不等式 $75+25x \leqslant 1\,200$ 的 x 的值. 如何求呢？

与解一元一次方程类似，我们将根据不等式的基本性质，进行如下步骤：

将①式移项，得

$$25x \leqslant 1\,200-75,$$

即

$$25x \leqslant 1\,125. \quad ②$$

将②式两边都除以 25(即将 x 的系数化为 1)，得

$$x \leqslant 45.$$

因此，升降机最多装载 45 件 25 kg 重的货物.

我们把满足一个不等式的未知数的每一个值，称为这个不等式的一个**解**. 例如，5.4，6，$\frac{19}{3}$ 都是 $3x>15$ 的解，这样的解有无数个.

我们把一个不等式的解的全体称为这个不等式的**解集**. 例如我们用 $x>5$ 表示 $3x>15$ 的解集.

求一个不等式的解集的过程称为**解不等式**.

今后我们在解一元一次不等式时，将利用前面讲述的不等式的基本性质，将原不等式化成形如 $x \leqslant a$（或 $x<a$，$x>a$，$x \geqslant a$）的不等式，就可得到原不等式的解集.

例 1 解下列一元一次不等式：

（1）$2-5x<8-6x$；　　（2）$\frac{x-5}{3}+1 \leqslant \frac{3}{2}x$.

解　（1）移项，得

$$-5x+6x<8-2,$$

即

$$x<6.$$

（2）去分母，得

$$2(x-5)+1\times 6 \leqslant 9x.$$

去括号，得

$$2x-10+6 \leqslant 9x.$$

与解一元一次方程类似，有分母要去分母，有括号要去括号.

移项，得

$$2x-9x \leqslant 10-6,$$

合并同类项，得

$$-7x \leqslant 4.$$

两边都除以−7，得

$$x \geqslant -\frac{4}{7}.$$

议一议

解一元一次不等式与解一元一次方程的依据和步骤有什么异同点？

它们的依据不相同. 解一元一次方程的依据是等式的性质，解一元一次不等式的依据是不等式的性质.

它们的步骤基本相同，都是去分母、去括号、移项、合并同类项、两边都除以未知数的系数.

这些步骤中，要特别注意的是：不等式两边都乘(或除以)同一个负数，必须改变不等号的方向. 这是与解一元一次方程不同的地方.

练习

1. 解下列不等式：

(1) $-5x \leqslant 10$；　　(2) $4x-3<10x+7$.

2. 解下列不等式：

(1) $3x-1>2(2-5x)$；　　(2) $\frac{x+2}{3} \geqslant \frac{2x-3}{2}$.

一个不等式的解集常常可以借助数轴直观地表示出来.

动脑筋

如何在数轴上表示出不等式 $3x>6$ 的解集呢？

容易解得不等式 $3x>6$ 的解集是 $x>2$，先在数轴上标出表示 2 的点 A，则点 A 右边所有的点表示的数都大于 2，而点 A 左边所有的点表示的数都小于 2，因此可以像图 4–3 那样表示 $3x>6$ 的解集 $x>2$.

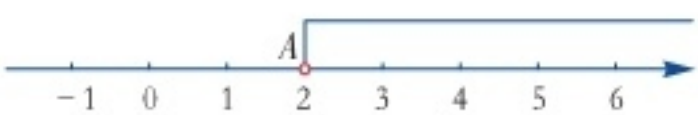


图 4–3

把表示 2 的点 A 画成空心圆圈，表示解集不包括 2.

例 2 解不等式 $12-6x \geqslant 2(1-2x)$，并把它的解集在数轴上表示出来.

解 去括号，得 $12-6x \geqslant 2-4x$.

移项，得 $-6x+4x \geqslant 2-12$.

合并同类项，得 $-2x \geqslant -10$.

两边都除以-2，得 $x \leqslant 5$.

原不等式的解集在数轴上表示如图 4–4 所示.

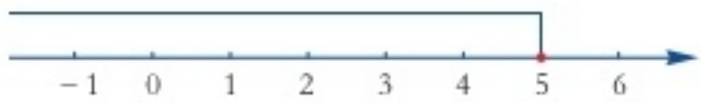
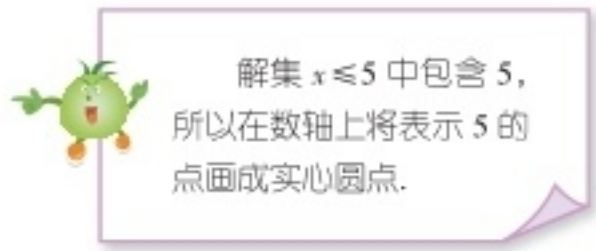


图 4–4



例 3 当 x 取什么值时，代数式 $-\frac{1}{3}x+2$ 的值大于或等于 0？并求出所有满足条件的正整数.

解 根据题意，得 $-\frac{1}{3}x+2 \geqslant 0$.

解这个不等式，得 $x \leqslant 6$.

所以，当 $x \leqslant 6$ 时，代数式 $-\frac{1}{3}x+2$ 的值大于或等于 0.

$x \leqslant 6$ 在数轴上表示如图 4–5 所示.

图 4–5

由图可知，满足条件的正整数有 1，2，3，4，5，6.

练习

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来.

（1）$4x-3<2x+7$；　　（2）$\frac{x-3}{2}>\frac{3x+5}{4}$.

2. 先用不等式表示下列数量关系，然后求出它们的解集，并在数轴上表示出来.

(1) x 的 $\frac{1}{2}$ 大于或等于 2；　　(2) x 与 2 的和不小于 1；

(3) y 与 1 的差不大于 0；　　(4) y 与 5 的差大于 -2.

习题 4.3

A 组

1. 解下列不等式：

(1) $3x-4>11$；　　(2) $4x-5<3x+6$；

(3) $\frac{2x-1}{3}\leqslant\frac{3-4x}{4}$；　　(4) $2(3x+2)+1>\frac{5+x}{2}$.

2. 当 x 取什么值时，代数式 $\frac{3x-5}{7}-\frac{x+4}{3}$ 的值不小于 1？

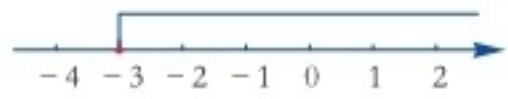
3. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来.

(1) $5x+1\geqslant 7x+5$；　　(2) $1-2x>6x+5$；

(3) $x-\frac{3}{2}<\frac{4x-1}{2}$；　　(4) $\frac{4(1+x)}{3}-1\leqslant\frac{4+x}{2}$.

4. 根据图中数轴所表示的不等式的解集，分别写出对应的不等式(未知数为 x).

(1)



(2)

(第 4 题图)

5. 当 x 取什么值时，代数式 $\frac{3-x}{2}$ 的值小于 3？并求出所有满足条件的负整数.

B 组

6. 关于 x 的不等式 $(a+1)x>a+1$ 的解集是 $x<1$，求 a 的取值范围.

7. (1) 解不等式：$5(x-2)+8<6(x-1)+7$；

(2) 若(1)中的不等式的最小整数解是方程 $2x-ax=3$ 的解，求 a 的值.

4.4 一元一次不等式的应用

动脑筋

小华打算在星期天与同学去登山，计划上午 7 点出发，到达山顶后休息 2 h，下午 4 点以前必须回到出发点．如果他们去时的平均速度是 3 km/h，回来时的平均速度是 4 km/h，他们最远能登上哪座山顶？（图 4–6 中数字表示出发点到山顶的路程.）

图 4–6

问题中涉及的数量关系是：

去时所花时间 + 休息时间 + 回来所花时间 ≤ 总时间.

设从出发点到山顶的距离为 x km，则他们去时所花时间为 $\frac{x}{3}$ h，回来所花时间为 $\frac{x}{4}$ h. 他们在山顶休息了 2 h，又上午 7 点到下午 4 点之间总共相隔 9 h，即所用时间应少于或等于 9 h.

所以有 $$\frac{x}{3}+2+\frac{x}{4}\leqslant 9.$$

解这个不等式，得 $$x\leqslant 12.$$

因此要满足下午 4 点以前必须返回出发点，小华他们最远能登上 D 山顶.

例 1 某童装店按每套 90 元的价格购进 40 套童装，应缴纳的税费为销售额的 10%. 如果要获得不低于 900 元的纯利润，每套童装的售价至少是多少元？

分析 本题涉及的数量关系是：

销售额 − 成本 − 税费 ≥ 纯利润(900 元).

解 设每套童装的售价是 x 元.

则 $$40 \cdot x - 90 \times 40 - 40 \cdot x \cdot 10\% \geqslant 900.$$

解这个不等式，得 $$x \geqslant 125.$$

答：每套童装的售价至少是 125 元.

例 2 当一个人坐下时，不宜提举超过 4.5 kg 的重物，以免受伤. 小明坐在书桌前，桌上有两本各重 1.2 kg 的画册和一批每本重 0.4 kg 的记事本. 如果小明想坐着搬动这两本画册和一些记事本. 问他最多只应搬动多少本记事本？

分析 本题涉及的数量关系是：

画册的总重 + 记事本的总重 ≤ 4.5 kg.

解 设小明应搬动 x 本记事本，则

$$1.2 \times 2 + 0.4x \leqslant 4.5.$$

解这个不等式，得 $$x \leqslant 5.25.$$

由于记事本的数目必须是整数，所以 x 的最大值为 5.

答：小明最多只应搬动 5 本记事本.

议一议

应用一元一次不等式解决实际问题的步骤有哪些？

实际问题 —（找出不等关系 / 设未知数）→ 列不等式 → 解不等式 → 结合实际确定答案

练习

1. 小明家的客厅长 5 m，宽 4 m. 现在想购买边长为 60 cm 的正方形地板砖把地面铺满，至少需要购买多少块这样的地板砖？

2. 某市打市内电话的收费标准是：每次 3 min 以内(含 3 min)0.22 元，以后每分钟 0.11 元(不足 1 min 部分按 1 min 计). 小琴一天在家里给同学打了一次市内电话，所用电话费没超过 0.5 元. 她最多打了几分钟的电话？

习题 4.4

A 组

1. 若一个两位数加上它的一半，所得的和小于 20，则这个两位数最大是多少？

2. 某厂生产一种零件，每个零件的成本为 3 元，售价 5 元，应纳税款为总销售额的 10%. 如果要使纯利润不低于 3 万元，该零件至少要销售多少个？

3. 某工程队计划在 14 天内修路 1 900 m . 开始 4 天受天气影响，每天只能完成 100 m. 后来天气转好，为了按期或提前完成，天气转好后平均每天至少要完成多少米？

4. 根据篮球赛的规则，于 3 分线外投篮命中可得 3 分，于 3 分线内投篮命中得 2 分. 若某球队在一场球赛中共投中 45 个球(只有 2 分球和 3 分球)，而所得总分不大于 100 分，问该球队最多投中多少个 3 分球？

5. 某活动课上，八年级(2)班的一半学生在学习乐器，$\frac{1}{4}$的学生在学习计算机，$\frac{1}{7}$的学生在练习踢足球，还剩不超过 6 名学生在收集植物样本，则这个班上最多有多少名学生？

B 组

6. 甲班同学的平均体重是 46 kg，乙班同学的平均体重是 42 kg，甲、乙两班同学的平均体重不超过 44 kg. 已知甲班有 50 人，乙班至少有多少人？

7. 某服装厂生产一种西装和领带，已知西装每套定价 1 200 元，领带每条定价 200 元. 厂方为促销，特向客户提供两种优惠方案：(1)买一套西装送一条领带；(2)西装和领带均按定价的 90%付款. 某商店采购员现要到该服装厂购买 20 套西装，领带 x 条($x>20$). 请你根据 x 的不同情况，帮助该采购员选择最省钱的购买方案.

4.5 一元一次不等式组

动脑筋

一个长方形足球场的宽为 70 m，如果它的周长大于 350 m，面积小于 7 630 m^2，求这个足球场的长的取值范围，并判断这个足球场是否可以进行国际足球比赛(用于国际比赛的足球场的长在 100 至110 m 之间，宽在 64 至75 m 之间).

如果设足球场的长为 x m，那么它的周长就是 $2(x+70)$ m，面积为 $70x$ m^2. 根据已知条件，我们知道足球场的长 x 的取值必须要使

$$2(x+70)>350 \text{ 和 } 70x<7\,630$$

这两个不等式同时成立.

为此，我们用大括号把上述两个不等式联立起来，得

$$\begin{cases}2(x+70)>350,\\70x<7\,630.\end{cases}$$

像上面这样，把含有相同未知数的几个一元一次不等式联立起来，就组成了一个**一元一次不等式组**(system of linear inequalities with one unknown).

怎样确定上面的不等式组中 x 的取值范围呢?

类比方程组的求解，不等式组中的各个不等式解集的公共部分，就是不等式组中的未知数的取值范围. 我们把几个一元一次不等式解集的公共部分，叫作由它们所组成的**一元一次不等式组的解集**.

求不等式组的解集的过程，叫作**解不等式组**.

下面我们来解不等式组 $\begin{cases} 2(x+70)>350, & ① \\ 70x<7\,630. & ② \end{cases}$

解不等式①，得

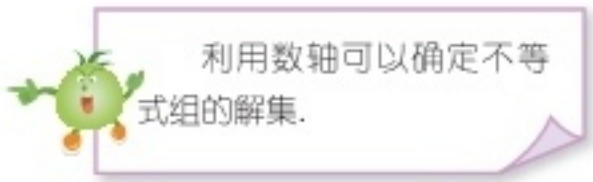
$$x>105.$$

解不等式②，得

$$x<109.$$

不等式组 $\begin{cases} 2(x+70)>350, \\ 70x<7\,630 \end{cases}$ 的解集就是 $x>105$ 与 $x<109$ 的公共部分，我们在同一条数轴上把 $x>105$ 与 $x<109$ 表示出来，如图 4–7 所示.

图 4–7



由图容易发现它们的公共部分是 $105<x<109$，这就是由不等式①、②组成的不等式组 $\begin{cases} 2(x+70)>350, \\ 70x<7\,630 \end{cases}$ 的解集.

由此可知，这个足球场的长度在 105 至 109 m 之间，从场地的大小方面来说，这个足球场可以进行国际足球比赛.

例 1 解不等式组：$\begin{cases} 3-x\geqslant 0, & ① \\ 3(1-x)>2(x+9). & ② \end{cases}$

解 解不等式①，得

$$x\leqslant 3.$$

解不等式②，得

$$x<-3.$$

把不等式①、②的解集在数轴上表示出来，如图 4–8 所示.

图 4–8

由图可知，不等式①、②的解集的公共部分是 $x<-3$，所以这个不等式组的解集是 $x<-3$.

例 2 解不等式组：$\begin{cases} 4x-7<5(x-1), & ① \\ \dfrac{x}{3}>4-\dfrac{x-2}{2}. & ② \end{cases}$

解 解不等式①，得 $x>-2$.

解不等式②，得 $x>6$.

把不等式①、②的解集在数轴上表示出来，如图 4–9 所示.

图 4–9

由图可知，不等式①、②的解集的公共部分是 $x>6$，所以这个不等式组的解集是 $x>6$.

例 3 解不等式组：$\begin{cases} x+5<3, & ① \\ x+6<4x-3. & ② \end{cases}$

解 解不等式①，得 $x<-2$.

解不等式②，得 $x>3$.

把不等式①、②的解集在数轴上表示出来，如图 4–10 所示.

图 4–10

由图可以看出这两个不等式的解集没有公共部分. 这时，我们说这个不等式组无解.

练习

1. 填表：

不等式组	$\begin{cases} x\geqslant -5, \\ x>-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x>-5, \\ x\leqslant -3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-5<0, \\ x+3<0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-5>0, \\ x+3<0 \end{cases}$
不等式组的解集				

2. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}2x-4<x+1,\\2x-4>-(x+1);\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3x+2>2(x-1),\\4x-3\leqslant 3x-2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x+1<3,\\3x+4<2;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}2x<x+2,\\x+6<4x-3.\end{cases}$

习题 4.5

A 组

1. 解不等式组：

(1) $\begin{cases}2x+5>3,\\3x-2<4x;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}6x-7\leqslant 0,\\3x\leqslant 5x+2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\frac{1}{2}x<\frac{7}{12},\\-\frac{1}{4}x>\frac{1}{2};\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}3x-4>11,\\5(x+1)>4x.\end{cases}$

2. 求不等式组 $\begin{cases}5x-1>3x-4,\\-\frac{1}{3}x\leqslant\frac{2}{3}-x\end{cases}$ 的整数解.

3. 如果不等式组 $\begin{cases}x<3a+2,\\x<a-4\end{cases}$ 的解集是 $x<3a+2$，求 a 的取值范围.

B 组

4. 小明和小华的年龄相差 8 岁. 今年，小明的年龄比小华年龄的 2 倍大；两年后，小华的年龄比小明年龄的 $\frac{1}{2}$ 大. 试问小明和小华今年各多少岁？

小结与复习

回顾

1. 不等式的基本性质有哪些？
2. 解一元一次不等式与解一元一次方程，有哪些相同之处和不同之处？
3. 应用一元一次不等式解决实际问题的一般步骤是什么？
4. 如何确定一元一次不等式组的解集？

本章知识结构

注意

1. 在本章的学习中，注意比较不等式的基本性质与等式的基本性质的不同之处：如果不等式的两边都乘(或除以)同一个负数，不等号的方向改变.

2. 在学习解一元一次不等式时，应类比一元一次方程的解法.

3. 在求一元一次不等式组的解集时，特别注意利用数轴(数形结合)来求解.

4. 不等式的解集 $x \geqslant a$ 与 $x>a$ ($x \leqslant a$ 与 $x<a$)是不相同的，它们的区别在于：$x \geqslant a$ ($x \leqslant a$)包含数 a，$x>a$ ($x<a$)不包含数 a. 在数轴上表示这两个解集时，分别用实心圆点和空心圆圈来加以区分.

复习题 4

A 组

1. 用不等式表示下列数量关系：

(1) x 的 4 倍小于 7；

(2) a 的 2 倍与 1 的差小于或等于 -3；

(3) y 的一半与 6 的和不大于 3.

2. 用“>”或“<”填空：

(1) 由 $a<b$，可得 $3a$_____$3b$；

(2) 由 $x>y$，可得 $\frac{1}{2}x$_____$\frac{1}{2}y$；

(3) 由 $m\leqslant n$，可得 $-\frac{1}{4}m$_____$-\frac{1}{4}n$；

(4) 如果 $a\geqslant b$，那么 $a+7$_____$b+7$.

3. 指出下列各题中的错误：

(1) 因为 $-3x<2$，所以两边都除以 -3，得 $x<-\frac{2}{3}$；

(2) 因为 $\frac{1}{x}<1$，所以两边都乘 x，得 $x>1$.

4. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3x+5<1+5x$；　　(2) $2-5x\geqslant 7-6x$；

(3) $\frac{x-3}{2}>\frac{x+6}{5}$；　　(4) $\frac{5(x+2)}{4}>2x-2$.

5. 解下列不等式：

(1) $10-4(x-3)\leqslant 2(x-1)$；　　(2) $\frac{x+5}{2}-1>\frac{3x+2}{2}$.

6. 某校组织开展了“吸烟有害健康”的知识竞赛，共25 道竞赛题，选对得 4 分，不选或选错扣2 分，得分不低于60 分得奖，那么得奖至少应选对多少道题？

7. 某书店的甲、乙两种书籍的进货价分别为每本 m 元和 n 元，且 $n>m$. 由于市场变化，书店只好以每本 $\frac{m+n}{2}$ 元的价格卖光这两种书籍. 已知甲、乙两种书籍的数量分别为 90 本和 70 本，问该书店从这两种书籍中赢利了还是亏本了？

8. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}7-3x>0,\\5-x<2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x+3<5,\\x\geqslant -1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}-(x-1)>3,\\2x+9<3;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\frac{2}{3}x+5>1-x,\\x-1<\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}.\end{cases}$

B 组

9. 下列各式分别在什么条件下成立？为什么？

(1) $a+b>a$；　　(2) $-a>a$；　　(3) $5a>3a$.

10. 将 $1<2x-3<5$ 改写成不等式组，并求出它的解.

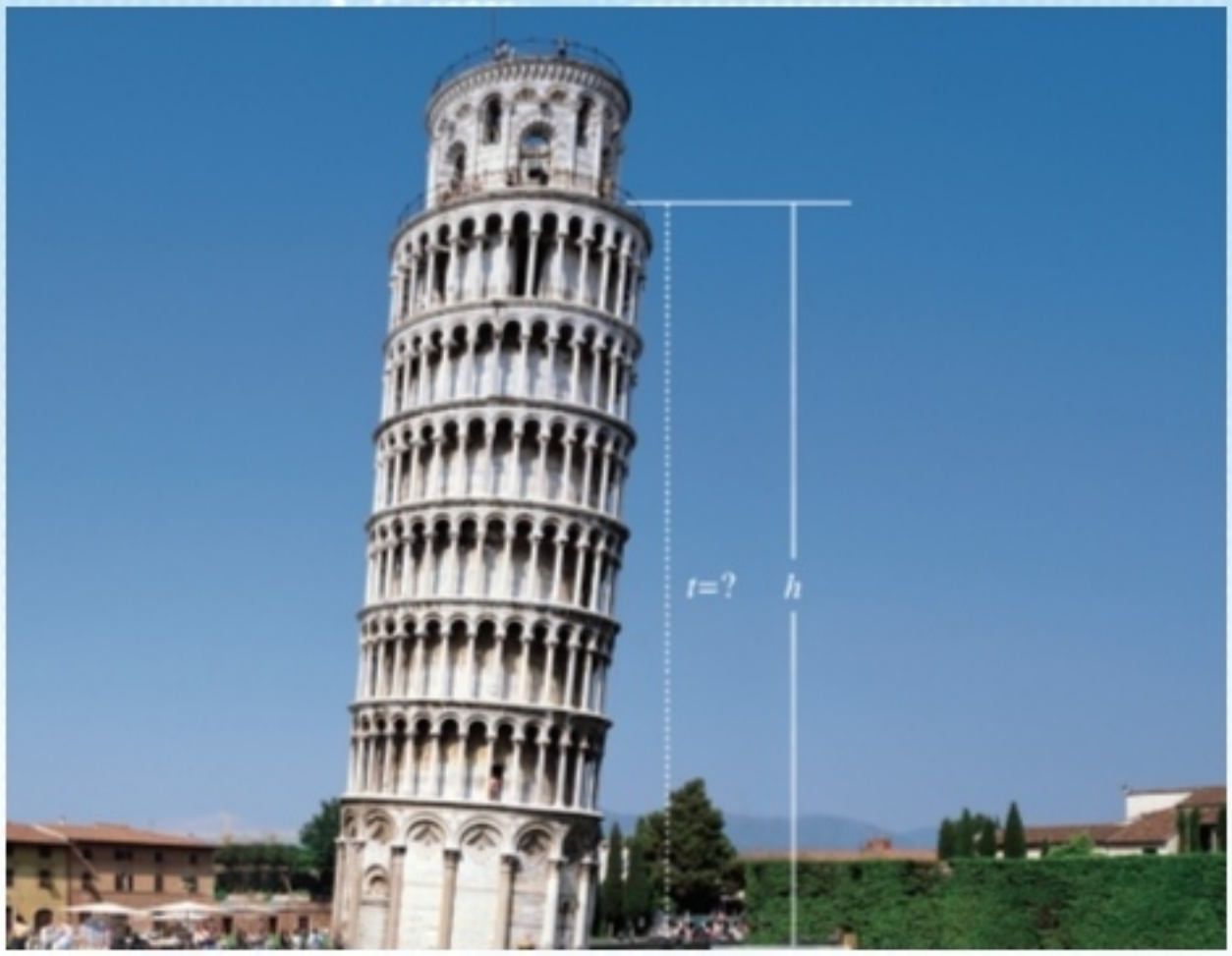
11. 一幢学生宿舍楼有一些空宿舍，现有一批学生要入住. 若每间住 4 人，则有 20 人无法入住；若每间住 8 人，则有 1 间房还剩余一些空床位. 求空宿舍的间数和这批学生的人数.

C 组

12. a 为何值时，方程 $x-\frac{3}{2}(x+2a)=3-\frac{x-6a}{5}$ 的解为正数？

13. 不等式组 $\begin{cases}2x-3a<4b,\\6b-4x<5a\end{cases}$ 的解集是 $2<x<9$，求 a，b 的值.

14. 某码头货场现有甲种货物 1 530 t，乙种货物 1 150 t. 安排用 A，B 两种不同规格的集装箱共 50 个将这批货物运往外地. 已知甲种货物 35 t 和乙种货物 15 t 可装满一个 A 型集装箱；甲种货物 25 t 和乙种货物 35 t 可装满一个 B 型集装箱. 按此要求安排 A，B 两种集装箱的个数，有哪几种运输方案？你会设计吗？



第5章

二次根式

意大利物理学家伽利略曾在比萨斜塔塔顶上做过著名的自由落体实验，验证了："在地球上同一地点，不同质量的物体从同一高度同时下落，如果除地球引力外不考虑其他外力的作用，那么它们的落地时间相同，并且物体的下落距离 h(m)与下落时间 t(s)之间的关系约为 $h=4.9t^2$ 或 $t=\sqrt{\frac{h}{4.9}}$"．像 $\sqrt{\frac{h}{4.9}}$ 这样的式子叫作二次根式．

学完本章，你将知道什么叫二次根式、最简二次根式，以及如何进行二次根式的运算，并能用之解决一些简单的实际问题．

5.1 二次根式

说一说

(1) 5 的平方根是____，0 的平方根是____，正实数 a 的平方根是____.

(2) 运用运载火箭发射航天飞船时，火箭必须达到一定的速度(称为第一宇宙速度)，才能克服地球的引力，从而将飞船送入环地球运行的轨道. 而第一宇宙速度 v 与地球半径 R 之间存在如下关系：$v^2=gR$，其中重力加速度常数 $g\approx 9.8\ \mathrm{m/s^2}$. 若已知地球半径 R，则第一宇宙速度 v 是多少？

5 的平方根是 $\pm\sqrt{5}$，0 的平方根是 0，正实数 a 的平方根是 $\pm\sqrt{a}$.

因为速度一定大于 0，所以第一宇宙速度 $v=\sqrt{gR}$.

我们已经知道：每一个正实数 a 有且只有两个平方根，一个记作 $\sqrt{a}$，称为 a 的算术平方根；另一个是 $-\sqrt{a}$.

我们把形如 $\sqrt{a}$ 的式子叫作**二次根式**(radical of degree two)，根号下的数叫作**被开方数**(radicand).

由于在实数范围内，负实数没有平方根，因此**只有当被开方数是非负实数时，二次根式才在实数范围内有意义**.

例 1 当 x 是怎样的实数时，二次根式 $\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义？

解 由 $x-1\geqslant 0$，解得

$$x\geqslant 1.$$

因此，当 $x\geqslant 1$ 时，$\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义①.

① 本书中，我们都是在实数范围内讨论二次根式有没有意义.

对于非负实数 a，由于 $\sqrt{a}$ 是 a 的一个平方根，因此

$$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0).$$

例 2 计算：

(1) $(\sqrt{5})^2$；　　(2) $(2\sqrt{2})^2$.

解　(1) $(\sqrt{5})^2=5$.

(2) $(2\sqrt{2})^2=2^2\times(\sqrt{2})^2=4\times 2=8$.

做一做

填空：

$\sqrt{2^2}=$____，

$\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2}=$____，

$\sqrt{1.2^2}=$____，

…

根据上述结果猜想，当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^2}=$_____.

由于 a 的平方等于 a^2，因此 a 是 a^2 的一个平方根. 当 $a\geqslant 0$ 时，根据算术平方根的意义，有 $\sqrt{a^2}=a$，由此得出：

$$\sqrt{a^2}=a\ (a\geqslant 0).$$

例 3 计算：

(1) $\sqrt{(-2)^2}$；　　(2) $\sqrt{(-1.2)^2}$.

解　(1) $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{2^2}=2$.

(2) $\sqrt{(-1.2)^2}=\sqrt{1.2^2}=1.2$.

议一议

当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}=a$ 是否仍然成立？为什么？

一般地，当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}=-a$. 因此，我们可以得到：

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a\ (a\geqslant 0), \\ -a\ (a<0). \end{cases}$$

练习

1. 当 x 是怎样的实数时，下列二次根式有意义？

(1) $\sqrt{1-x}$；　　(2) $\sqrt{2x-3}$.

2. 计算：

(1) $(-\sqrt{3})^2$；　　(2) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

3. 计算：

(1) $\sqrt{7^2}$；　　(2) $\sqrt{(-3)^2}$；

(3) $\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$；　　(4) $\sqrt{(-0.01)^2}$.

动脑筋

计算下列各式，观察计算结果，你发现了什么？

(1) $\sqrt{4\times 9}=$ _____，$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=$ _____；

(2) $\sqrt{9\times 16}=$ _____，$\sqrt{9}\times\sqrt{16}=$ _____.

$\sqrt{4\times 9}=\sqrt{4}\times\sqrt{9}$，

$\sqrt{9\times 16}=\sqrt{9}\times\sqrt{16}$.

一般地，当 $a \geqslant 0$，$b \geqslant 0$ 时，由于

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b,$$

因此 $$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

由此得出：

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\ (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0).$$

上述公式从左至右看，是积的算术平方根的性质. 利用这一性质，可以化简二次根式.

例 4 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{18}$；　　(2) $\sqrt{20}$；　　(3) $\sqrt{72}$.

解 (1) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2}$

$= \sqrt{9} \times \sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2}$.

化简二次根式时，最后结果要求被开方数中不含开得尽方的因数.

(2) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5}$

$= \sqrt{4} \times \sqrt{5}$

$= 2\sqrt{5}$.

(3) $\sqrt{72} = \sqrt{9 \times 8} = \sqrt{3^2 \times 2^2 \times 2}$

$= 3 \times 2 \times \sqrt{2}$

$= 6\sqrt{2}$.

例 4 说明，在二次根式化简过程中，可以把被开方数中的“完全平方因数（或因式）”，用它的算术平方根代替，直接从根号下移到根号外，从而达到化简的目的.

例 5 化简下列二次根式：

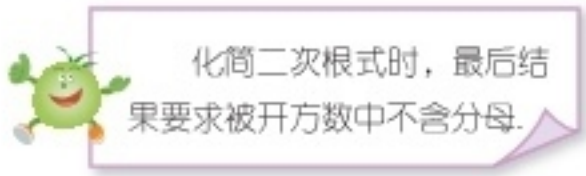
(1) $\sqrt{\frac{1}{2}}$；　　(2) $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

解 (1) $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1 \times 2}{2 \times 2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

(2) $\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{3\times5}{5\times5}}=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2\times15}$

$=\frac{1}{5}\sqrt{15}$.



从例 4、例 5 可以看出，这些式子的最后结果，具有以下特点：

(1) 被开方数中不含开得尽方的因数(或因式)；

(2) 被开方数不含分母.

我们把满足上述两个条件的二次根式，叫作**最简二次根式**.

在二次根式的运算中，一般要把最后结果化为最简二次根式.

练习

1. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{24}$；　　(2) $\sqrt{28}$；

(3) $\sqrt{32}$；　　(4) $\sqrt{54}$.

2. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{\frac{45}{2}}$；　　(2) $\sqrt{\frac{125}{12}}$.

习题 5.1

A 组

1. 当 x 是怎样的实数时，下列二次根式有意义？

(1) $\sqrt{2x-1}$；　　(2) $\sqrt{1+x^2}$.

2. 计算：

(1) $(-5\sqrt{2})^2$；　　(2) $\left(3\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2$.

3. 计算：

(1) $\sqrt{11^2}$；　　(2) $\sqrt{(-6)^2}$；

(3) $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$；　　(4) $\sqrt{(-0.005)^2}$.

4. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{96}$；　　(2) $\sqrt{128}$；

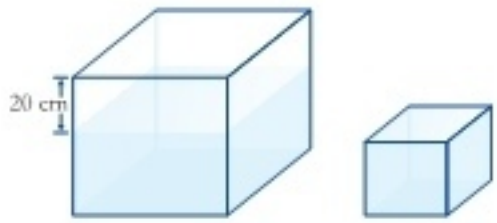
(3) $\sqrt{243}$.

5. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{\frac{27}{4}}$；　　(2) $\sqrt{\frac{8}{3}}$；

(3) $\sqrt{\frac{49}{18}}$.

6. 一个底面是 40 cm×45 cm 的长方体玻璃容器中装满水，现将一部分水倒入一个底面为正方形、高为 10 cm 的陶瓷容器中. 当陶瓷容器装满水时，玻璃容器中的水面下降了 20 cm，求陶瓷容器的底面边长.



(第 6 题图)

7. 在比萨斜塔上做自由落体实验得知：物体的下落距离 h(m)与下落时间 t(s)之间的关系约为 $h=4.9t^2$. 当物体从 39.2 m 的高度下落时，求该物体到达地面所需的时间.

B 组

8. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{9a^2}$；　　(2) $\sqrt{a^4}$.

9. 在实数范围内，把下列多项式分解因式：

(1) x^2-2；　　(2) $2x^2-9$.

10. 若$\sqrt{38-n}$是整数，求自然数 n 的值.

5.2 二次根式的乘法和除法

说一说

积的算术平方根的性质是什么？

$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0,b\geqslant 0)$.

我们把$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0,b\geqslant 0)$从右至左看，就可得：

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0).$$

利用上述公式，可以进行二次根式的乘法运算.

例 1 计算：

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{6}$；　　(2) $\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{72}$.

解 (1) $\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\sqrt{3\times 6}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$.

(2) $\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{72}=\sqrt{\frac{1}{3}\times 72}=\sqrt{24}=\sqrt{2^2\times 6}=2\sqrt{6}$.

例 2 计算：

(1) $2\sqrt{3}\times 5\sqrt{21}$；　　(2) $3\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{18}}{4}\right)$.

解 (1) $2\sqrt{3}\times 5\sqrt{21}=2\times 5\times\sqrt{3\times 21}$

$=10\sqrt{3^2\times 7}$

$=30\sqrt{7}$.

(2) $3\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{18}}{4}\right)=3\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\sqrt{2}\times\sqrt{18}$

$$=-\frac{3}{4}\sqrt{2\times18}$$

$$=-\frac{9}{2}.$$

例 3 一个长方形的长和宽分别是 $3\sqrt{7}$ cm 和 $\sqrt{7}$ cm，求这个长方形的面积.

解 $3\sqrt{7}\times\sqrt{7}=3\times7=21(\text{cm}^2)$.

答：这个长方形的面积为 21 cm^2.

练习

1. 计算：

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{15}$；　　(2) $\sqrt{6}\times\sqrt{12}$；

(3) $3\sqrt{2}\times2\sqrt{10}\times\sqrt{5}$.

2. 计算：

(1) $\sqrt{3}\times2\sqrt{2}$；　　(2) $4\sqrt{3}\times(-3\sqrt{15})$.

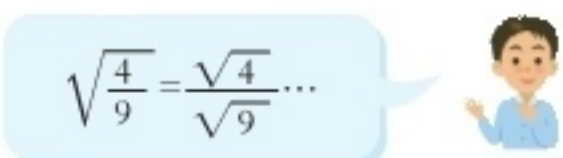
3. 已知三角形的一条边为 $\sqrt{3}$ cm，这条边上的高为 $2\sqrt{2}$ cm，求该三角形的面积.

动脑筋

计算下列各式，观察计算结果，你发现了什么？

(1) $\sqrt{\frac{4}{9}}=$ _____，$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=$ _____；

(2) $\sqrt{\frac{16}{49}}=$ _____，$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}}=$ _____.



一般地，如果 $a>0$，则 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=\sqrt{1}=1$，

因此，$\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ (a>0)$.

$\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{a}}$ 互为倒数.

设 $a>0$，$b\geqslant 0$，则

$$\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{b\cdot\frac{1}{a}}=\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}.$$

因此得出：

$$\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\ (a>0,\ b\geqslant 0). \qquad (*)$$

上述公式从左至右看，是商的算术平方根性质. 利用这一性质，可以化简二次根式.

例 4 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{\frac{7}{16}}$；　　(2) $\sqrt{\frac{9}{5}}$.

解 (1) $\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

(2) $\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}}$

$=\frac{3}{\sqrt{5}}$

$=\frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$

$=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

从 $\frac{3}{\sqrt{5}}$ 变形到 $\frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$ 是为了去掉分母中的根号.

化简二次根式时，最后结果一般要求分母中不含有二次根式.

把公式(*)从右至左看就可得：

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}\ (a>0,\ b\geqslant 0).$$

利用上述公式，可以进行二次根式的除法运算.

例 5 计算：

(1) $\sqrt{15}\div\sqrt{3}$；　　(2) $\dfrac{3\sqrt{42}}{5\sqrt{6}}$；　　(3) $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}$.

解 (1) $\sqrt{15}\div\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{15}{3}}=\sqrt{5}$.

(2) $\dfrac{3\sqrt{42}}{5\sqrt{6}}=\dfrac{3}{5}\sqrt{\dfrac{42}{6}}=\dfrac{3}{5}\sqrt{7}$.

(3) $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{14}{6}}=\sqrt{\dfrac{7}{3}}=\sqrt{\dfrac{7\times3}{3\times3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

例 6 电视塔越高，从塔顶发射出的电磁波传播得越远，从而能接收到电视节目信号的区域就越广. 已知电视塔高 h(km) 与电视节目信号的传播半径 r(km)之间满足 $r=\sqrt{2Rh}$（其中 R 是地球半径）. 现有两座高分别为 $h_1=400$ m，$h_2=450$ m 的电视塔，问它们的传播半径之比等于多少？

解 设两座电视塔的传播半径分别为 r_1，r_2.

因为 $r=\sqrt{2Rh}$，400 m = 0.4 km，450 m = 0.45 km，

所以 $\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{\sqrt{2Rh_1}}{\sqrt{2Rh_2}}=\sqrt{\dfrac{2Rh_1}{2Rh_2}}=\sqrt{\dfrac{h_1}{h_2}}=\sqrt{\dfrac{0.4}{0.45}}=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\sqrt{\dfrac{2^2\times2}{3^2}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$.

练习

1. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{\dfrac{25}{16}}$；　　(2) $\sqrt{\dfrac{9}{2}}$；　　(3) $\sqrt{\dfrac{162}{169}}$.

2. 计算：

(1) $8\sqrt{55}\div 2\sqrt{11}$；　　(2) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$；　　(3) $\dfrac{2\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$.

3. 已知长方形的面积是 $48\sqrt{6}$ m²，宽为 $3\sqrt{2}$ m，求长方形的长.

习题 5.2

A 组

1. 计算：

(1) $\sqrt{90}\times\sqrt{6}$；　　(2) $4\sqrt{35}\times 3\sqrt{70}$；

(3) $(-2\sqrt{42})\times\left(-\dfrac{\sqrt{14}}{7}\right)$；　　(4) $\sqrt{18}\times 3\sqrt{10}\times 2\sqrt{15}$.

2. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{\dfrac{9}{4}}$；　　(2) $\sqrt{\dfrac{18}{5}}$.

3. 计算：

(1) $3\sqrt{15}\div\sqrt{5}$；　　(2) $\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}}$；

(3) $\sqrt{24}\times\sqrt{12}\div\sqrt{5}$；　　(4) $\sqrt{18}\times\sqrt{30}\div 2\sqrt{3}$.

4. 若一个长方体的长为 $2\sqrt{6}$ cm，宽为 $\sqrt{3}$ cm，高为 $\sqrt{2}$ cm，求它的体积.

5. 在下面的方格中，若要使横、竖、斜对角的所有 3 个实数相乘都得到同样的结果，则 3 个空格中的实数之积为多少？

$2\sqrt{3}$	1	
3		2
$\sqrt{2}$	6	

B 组

6. 当 $a=3$，$b=4$ 时，求下列各式的值：

（1）$\dfrac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt{ab^2}}$；　　（2）$\dfrac{\sqrt{20ab}}{\sqrt{5a^5}}$.

7. 解方程：$-2\sqrt{3}\,x=\sqrt{24}$.

8. 站在海拔高度为 h(m)的地方可看见的水平距离为 d（m），它们两者之间的关系近似为 $d=8\sqrt{\dfrac{h}{5}}$. 某一登山者从海拔 h 处登上海拔 $2h$ 的山顶，那么他看到的水平距离是原来的多少倍？

5.3 二次根式的加法和减法

做一做

计算：

(1) $2\sqrt{5}+3\sqrt{5}$；　　(2) $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}$.

$2\sqrt{5}+3\sqrt{5}=(2+3)\sqrt{5}=5\sqrt{5}$,

$5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=(5-3)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

动脑筋

图 5-1 是由面积分别为 8 和 18 的正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEGH$ 拼成. 求 BE 的长.

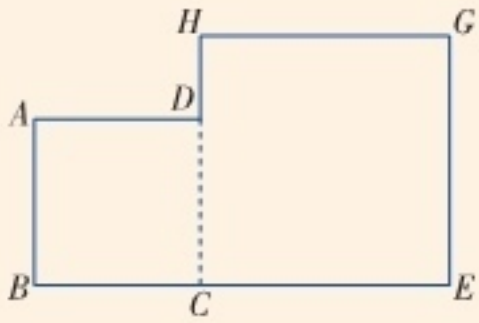


图 5-1

因为正方形 $ABCD$ 和 $CEGH$ 的边长分别为$\sqrt{8}$ 和$\sqrt{18}$，所以 BE 的长度为（$\sqrt{8}+\sqrt{18}$）.

$$\begin{aligned}&\sqrt{8}+\sqrt{18}\\=&2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\text{（化成最简二次根式）}\\=&(2+3)\sqrt{2}\text{（分配律）}\\=&5\sqrt{2}.\end{aligned}$$

在进行二次根式的加减运算时，通常应先将每个二次根式化简，然后再将被开方数相同的二次根式的系数相加减，但被开方数不变.

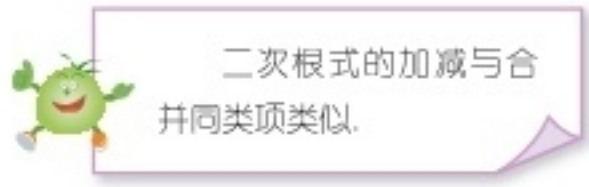
例 1 计算：

(1) $5\sqrt{8}-2\sqrt{27}+\sqrt{18}$；　　(2) $2\sqrt{18}-\sqrt{50}+\frac{1}{3}\sqrt{45}$.

解 (1) $5\sqrt{8}-2\sqrt{27}+\sqrt{18}$

$=10\sqrt{2}-6\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

$=13\sqrt{2}-6\sqrt{3}$.



(2) $2\sqrt{18}-\sqrt{50}+\frac{1}{3}\sqrt{45}$

$=6\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\sqrt{5}$

$=\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

例 2 图 5–2 是某土楼的平面剖面图，它是由两个相同圆心的圆构成．已知大圆和小圆的面积分别为763.02 m² 和 150.72 m²，求圆环的宽度d(π 取 3.14).

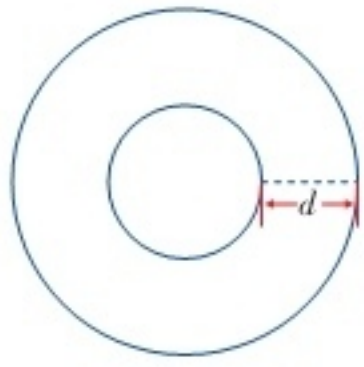


图 5–2

解 设大圆和小圆的半径分别为 R，r，面积分别为 S_1，S_2，由 $S_1=\pi R^2$，$S_2=\pi r^2$ 可知 $R=\sqrt{\frac{S_1}{\pi}}$，$r=\sqrt{\frac{S_2}{\pi}}$. 则

$$\begin{aligned}d&=R-r\\&=\sqrt{\frac{S_1}{\pi}}-\sqrt{\frac{S_2}{\pi}}\\&=\sqrt{\frac{763.02}{3.14}}-\sqrt{\frac{150.72}{3.14}}\\&=\sqrt{243}-\sqrt{48}\\&=9\sqrt{3}-4\sqrt{3}\\&=5\sqrt{3}.\end{aligned}$$

答：圆环的宽度 d 为 $5\sqrt{3}$ m.

练习

1. 计算：

(1) $5\sqrt{2}+\sqrt{18}$；　　(2) $4\sqrt{18}-9\sqrt{2}$；

(3) $10\sqrt{2}+3\sqrt{8}-7\sqrt{2}$；　　(4) $5\sqrt{12}-3\sqrt{8}-2\sqrt{27}$.

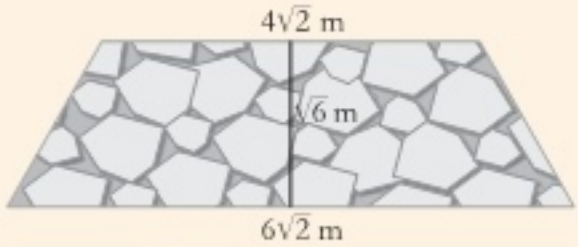
2. 计算:

(1) $\sqrt{2}-(3\sqrt{8}+2\sqrt{7})$；

(2) $(2\sqrt{3}-5\sqrt{8})-(\sqrt{75}-\sqrt{18})$.

动脑筋

甲、乙两个城市间计划修建一条城际铁路，其中有一段路基的横断面设计为上底宽 $4\sqrt{2}$ m，下底宽 $6\sqrt{2}$ m，高 $\sqrt{6}$ m 的梯形，这段路基长 500 m，那么这段路基的土石方为多少立方米呢(路基的土石方即等于路基的体积)?



路基的土石方等于路基横断面面积乘以路基的长度，所以，这段路基的土石方为：

$$\frac{1}{2}(4\sqrt{2}+6\sqrt{2})\times\sqrt{6}\times500=(2\sqrt{2}+3\sqrt{2})\times\sqrt{6}\times500$$

$$=5\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times500$$

$$=5\,000\sqrt{3}\ (\mathrm{m}^3).$$

即这段路基的土石方为 $5\,000\sqrt{3}$ m^3.

从上面的解答过程可以看到，二次根式的混合运算是根据实数的运算律进行的.

例 3 计算：

(1) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\times\sqrt{2}$；　　(2) $(2+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$.

解 (1) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\times\sqrt{2}$

$=\sqrt{6}\times\sqrt{2}-\sqrt{\frac{3}{8}}\times\sqrt{2}$

$=\sqrt{6\times2}-\sqrt{\frac{3}{8}\times2}$

$=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

(2) $(2+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$

$=2-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

$=2-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-2$

$=-\sqrt{2}$.

从例 3 可以看到，二次根式相乘，与多项式的乘法相类似，我们可以利用多项式的乘法公式，对某些二次根式的乘法进行简便运算.

例 4 计算：

(1) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$；　　(2) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$.

解 (1) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$

$=(\sqrt{2})^2-1^2$

$=1$.

(2) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

$=(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=2-2\sqrt{2\times3}+3$

$=5-2\sqrt{6}$.

例 5 计算：

(1) $(\sqrt{32}+\sqrt{2})\div\sqrt{2}$；　　(2) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$.

解 (1) $(\sqrt{32}+\sqrt{2})\div\sqrt{2}$

$=(4\sqrt{2}+\sqrt{2})\div\sqrt{2}$

$=5\sqrt{2}\div\sqrt{2}$

$=5.$

(2) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{4}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{4}{2^2-(\sqrt{3})^2}=4.$

练习

1. 计算：

(1) $\sqrt{5}\times\left(\sqrt{15}-4\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$；

(2) $(\sqrt{80}+\sqrt{40})\div\sqrt{5}$；

(3) $(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$；

(4) $(3+\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{5})$.

2. 计算：

(1) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$；　　(2) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})$.

3. 计算：

(1) $\dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$；　　(2) $(\sqrt{8}-\sqrt{4})\div\sqrt{2}$.

习题 5.3

A 组

1. 计算：

(1) $3\sqrt{12}+\sqrt{27}$；　　(2) $2\sqrt{18}-\sqrt{\frac{9}{2}}$；

(3) $3\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{8}}$；　　(4) $\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{18}}$.

2. 计算：

(1) $5\sqrt{12}-7\sqrt{8}+\sqrt{48}$；　　(2) $\sqrt{8}-(3\sqrt{32}+2\sqrt{18})$；

(3) $\sqrt{80}-\sqrt{20}+\sqrt{5}$；　　(4) $\sqrt{18}+(\sqrt{98}-\sqrt{27})$.

3. 计算：

(1) $\sqrt{8}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)$；　　(2) $(2+\sqrt{5})(3-2\sqrt{5})$；

(3) $\sqrt{\frac{1}{2}}-8\times\frac{1}{\sqrt{8}}$.

4. 计算：

(1) $(\sqrt{12}-\sqrt{2})^2$；

(2) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$；

(3) $(\sqrt{96}-\sqrt{24})\div\sqrt{3}$；

(4) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$.

B 组

5. 一个长方形的窗户，如果使得它的宽与高的比值等于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，那么看上去就比较美观. 若它的高为$\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ m，求它的宽.

6. 设 $a=-1+\sqrt{2}$，$b=-1-\sqrt{2}$.

(1) 求 $a+b$，ab，$\frac{b}{a}$ 的值；

(2) 求 a^2+2a-1，$a^2-2ab+b^2$ 的值.

小结与复习

回顾

1. 二次根式$\sqrt{a}$在实数范围内有意义的条件是什么？
2. 二次根式有哪些性质？
3. 举例说明什么叫最简二次根式，试写出一个二次根式并将它进行化简.
4. 如何进行二次根式的加、减、乘、除运算？

本章知识结构

- 二次根式
  - 最简二次根式
  - 性质
    - $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$
    - $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$
    - 积的算术平方根的性质：$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$
    - 商的算术平方根的性质：$\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\ (a>0,\ b\geqslant 0)$
  - 加、减、乘、除运算

注意

1. 二次根式$\sqrt{a}$在实数范围内有意义，必须满足$a\geqslant 0$.

2. 学习了二次根式以后，代数式可看成是把数和表示数的字母用运算符号(加、减、乘、除、乘方和开方)连接而成的式子.

3. 积与商的算术平方根性质公式从右至左地使用，可以进行二次根式的乘、除运算.

4. 实数的运算律在二次根式的加、减、乘、除运算中仍然成立.

复习题 5

A 组

1. 当 x 是怎样的实数时，下列二次根式有意义？

(1) $\sqrt{2-3x}$；　　(2) $\sqrt{x^2+4}$；

(3) $\sqrt{(2-3x)^2}$；　　(4) $\sqrt{\frac{1}{x}}$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{56}$；　　(2) $-\sqrt{0.5}$.

3. 计算：

(1) $2\sqrt{12}+\sqrt{27}$；　　(2) $\sqrt{18}-2\sqrt{8}$；

(3) $\sqrt{54}-5\sqrt{6}-2\sqrt{6}$；　　(4) $\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{8}$.

4. 计算：

(1) $5\sqrt{12}\times3\sqrt{18}$；　　(2) $-6\sqrt{45}\times(-4\sqrt{48})$；

(3) $3\sqrt{6}\div6\sqrt{3}$；　　(4) $\sqrt{8.5}\div(-\sqrt{1.7})$.

5. 计算：

(1) $\sqrt{50}\times\sqrt{8}+\sqrt{18}$；　　(2) $(\sqrt{3}+2\sqrt{6})\div\sqrt{3}$；

(3) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2$；　　(4) $(2+3\sqrt{5})^2$；

(5) $(\sqrt{91}+\sqrt{13})\div\sqrt{13}$；　　(6) $(\sqrt{9}+\sqrt{7})(\sqrt{9}-\sqrt{7})$.

6. 计算下列各式，根据它们的运算结果与表盘的相应刻度位置进行连线.

$\sqrt{9}\times\sqrt{16}$　　$\sqrt{(-1)^2}$

$(\sqrt{10}+1)(\sqrt{10}-1)$

$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{7^2}$　　$\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}$

7. 我国南宋著名数学家秦九韶在他的著作《数书九章》一书中，给出了下面的公式：如果一个三角形的三边长分别为 a，b，c，则该三角形的面积为

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}.$$

如果已知△ABC 的三边长 a，b，c 分别为 3，4，5，请你根据该公式计算△ABC 的面积.

B 组

8. 在实数范围内，把下列多项式因式分解：

（1）x^2-11；　　（2）$3x^2-16$；

（3）$9x^2-19$；　　（4）x^4-14x^2+49.

9. 当 $x=3$，$y=4$ 时，求代数式 $\sqrt{x^2y-4x^2y^2+4x^2y^3}$ 的值.

10. 设 $x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

（1）求 x_1+x_2，x_1-x_2，x_1x_2，$\frac{x_2}{x_1}$ 的值；

（2）求 $x_1^2+x_1-1$，$x_2^2+x_2-1$ 的值.

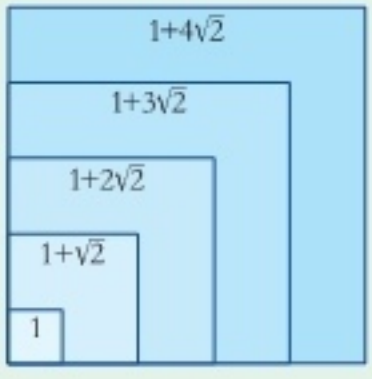
C 组

11. 若 x 表示 $\sqrt{10}$ 的整数部分，y 表示它的小数部分，求 $(\sqrt{10}+x)y$ 的值.

12. 将边长分别为 $1+\sqrt{2}$，$1+2\sqrt{2}$，$1+3\sqrt{2}$，$1+4\sqrt{2}$ 的正方形的面积记作 S_1，S_2，S_3，S_4.

（1）计算：S_2-S_1，S_3-S_2，S_4-S_3；

（2）把边长为 $1+n\sqrt{2}$ 的正方形的面积记作 S_n，其中 n 是正整数，从(1)的计算结果，你能猜出 $S_{n+1}-S_n$ 等于多少吗？你的猜想是否正确，为什么？



数学词汇汉英对照表

（按词汇所在页码出现的先后排序）

后　记

本册教科书是依据教育部颁布的《义务教育数学课程标准》（2011年版），在原实验教科书的基础上修订而成的，经国家基础教育课程教材专家工作委员会2013年审查通过.

本书在修订过程中，吸收了基础教育课程改革实验的优秀成果，凝聚了参与课程改革实验的广大数学家、数学课程专家、教研人员以及一线教师的集体智慧，一大批数学教师为本书的修订提出了宝贵的意见. 在此，对所有为本次修订提供过帮助和支持的社会各界朋友表示衷心的感谢.

在本书出版之前，我们通过多种渠道与教科书所选用资料和图片的作者进行了联系，得到了他们的大力支持. 对此，我们表示诚挚的感谢！但仍有部分作者未能取得联系，恳请这些作者尽快与我们联系，以便支付稿酬.

教材建设是一项长期的任务，我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵意见，并将这些意见和建议及时反馈给我们. 让我们携起手来，共同完成义务教育教科书建设这一光荣的使命！

湖南教育出版社

2013年5月

义务教育教科书
数　学
八年级上册
责任编辑：邹伟华　邹楚林
美术编辑：熊玉心
插图：尹　愕　陈　煌
湖南教育出版社出版（长沙市韶山北路443号）
电子邮箱：hnephmath@126.com
客服电话：0731－85486796
湖南出版中心重印
湖南省新华书店发行
湖南天闻新华印务有限公司印装
787×1092　16开　印张：11.5　字数：225000
2003年6月第1版　2021年5月第2版第9次印刷
印数：1—500 000册
ISBN 978－7－5355－3941－0
定价：10.95元（2021秋）