教育部审定 2013

首届全国教材建设奖

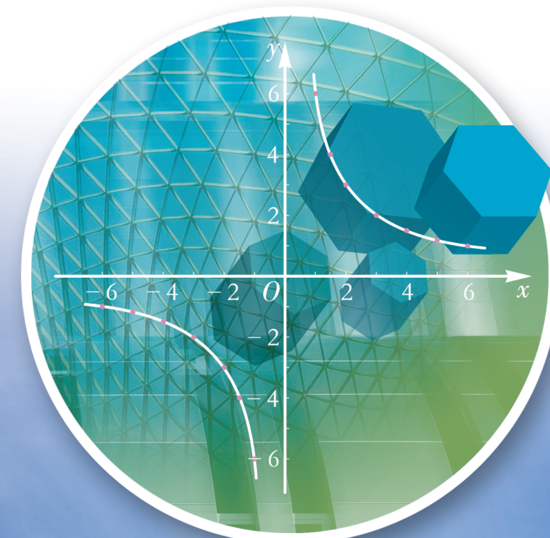
全国优秀教材二等奖

义务教育教科书

数学

S H U X U E

九年级上册



义务教育教科书 数学 九年级上册 湖南教育出版社

ISBN 978-7-5355-4575-6

定价：10.08元

绿色印刷产品

义务教育教科书

数学

SHUXUE

九年级上册

湖南教育出版社

义务教育教科书 数学 九年级上册

主　　编：严士健　黄楚芳

执行主编：丘维声

副 主 编：赵雄辉　胡　旺

编　　委：肖果能　袁宏喜

　　　　　李超贵　邹楚林

数学实现我们从感性到理性的跨越

亲爱的同学们：

经过两年的初中阶段的数学学习，当你们迈进九年级上学期时，对数学的认识是不是又深入了一步？在你的头脑中，哪些数学知识、思维方法给你留下了深刻的印象？当你积累一定的数学经验，在面对有趣的实际问题时，是不是觉得数学不再那么高不可攀了呢？在这里，请不要忘记，数学学习不仅需要感性认识，更需要我们上升到理性认识，只有这样，我们才能发挥出数学的强大威力！

在本书中，我们将学习函数和方程家族中的两位新朋友——“反比例函数”与“一元二次方程”，我们将学会建立数学模型，并对模型进行研究，将研究得出的规律去解决大量的生活实际问题，而这一学习过程意味着思维方法的飞跃，我们也将感受到数学与生活的紧密联系。在“图形的相似”中，我们将从“把一个图形放大(或缩小)得到的图形与原图形是相似的”这一特征出发来认识相似图形，研究相似三角形的性质及判定条件以及如何将一个图形放大或缩小。在“锐角三角函数”中，我们将学会如何利用解直角三角形来解决一些简单的实际问题。在“用样本推断总体”中，我们将通过实例来学习如何根据问题的背景选择合适的方法，用样本来推断总体，以及预测事物发展的趋势，感受统计的价值。

当然，在我们同行的路途中，“综合与实践”“IT 教室”“数学与文化”的精彩都不容错过，它们将会为你开启更宽广的数学世界。

要学好这些内容，需要我们充满信心，养成良好的学习习惯，克服许许多多的困难。要善于回忆学过的知识与方法，并找到适合自己的数学学习方法。同学们可以依照书中的栏目设置，多“观察”“探究”“动脑筋”“说一说”“做一做”“议一议”，多动手试一试，从熟悉的生活事例中认识数学，把数学应用到你的生活中去，不断提高自己探索问题的能力。

同学们，让我们在深入认识数学的旅途中努力吧！

Contents 目录

第1章

反比例函数

一群选手赛马，谁先到达终点？谁用的时间最少？

要回答这个问题，必须了解路程、速度和时间三者之间的关系. 当路程一定时，所花的时间与速度成反比例关系. 把这类实际问题中两个变量成反比例关系的特征加以抽象，便得到了反比例函数的概念.

什么是反比例函数？反比例函数的图象有什么特征？它在实际生活中有哪些应用？本章将要学习这些内容.

1.1 反比例函数

在小学，我们已经知道，如果两个量 x，y 满足 $xy=k$（k 为常数，$k\neq 0$），那么 x，y 就成反比例关系. 例如，如果路程 s 一定，那么速度 v 与时间 t 就成反比例关系.

动脑筋

（1）一群选手在进行全程为 3 000 m 的赛马比赛时，各选手的平均速度 v(m/s)与所用时间 t(s)之间有怎样的关系？并写出它们之间的关系式；

（2）利用(1)的关系式完成下表：

所用时间 t/s	121	137	139	143	149
平均速度 v/(m/s)					

随着时间 t 的变化，平均速度 v 发生了怎样的变化？

（3）平均速度 v 是所用时间 t 的函数吗？为什么？

我们已经知道，路程与速度、时间之间的关系式为 $s=vt$，因此 $v=\frac{s}{t}$.

上述问题中路程 $s=3\ 000$ m，因此选手的平均速度 v(m/s)与所用时间 t(s)之间的关系式为

$$v=\frac{3\ 000}{t}. \qquad ①$$

①式表明：当路程 s 一定时，每当 t 取一个值时，v 都有唯一的一个值与它对应，因此平均速度 v 是所用时间 t 的函数.

由于当路程 s 一定时，平均速度 v 与时间 t 成反比例关系，因此，我们把这样的函数称为反比例函数.

一般地，如果两个变量 y 与 x 的关系可以表示成

$$y=\frac{k}{x}\ (k\ 为常数，k\neq 0)$$

的形式，那么称 y 是 x 的**反比例函数**(inverse proportional function)，其中 x 是

自变量，常数 $k(k \neq 0)$ 称为反比例函数的比例系数.

如在①式中，$v=\dfrac{3\,000}{t}$ 表明速度 v 是时间 t 的反比例函数，3 000 是比例系数.

反比例函数的自变量取值范围是所有非零实数. 但是在实际问题中，应该根据具体情况来确定该反比例函数的自变量取值范围. 例如，在前面得到的 $v=\dfrac{3\,000}{t}$ 中，t 的取值范围是 $t>0$.

例 如图 1-1，已知菱形 $ABCD$ 的面积为 180，设它的两条对角线 AC，BD 的长分别为 x，y. 写出变量 y 与 x 之间的函数表达式，并指出它是什么函数.

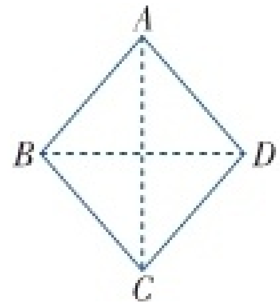


图 1-1

解 因为菱形的面积等于两条对角线长乘积的一半，

所以 $S_{\text{菱形}}=\dfrac{1}{2}xy=180$，

所以 $xy=360$（定值），即 y 与 x 成反比例关系.

所以 $y=\dfrac{360}{x}$.

因此，当菱形的面积一定时，它的一条对角线长 y 是另一条对角线长 x 的反比例函数.

练习

1. 下列函数是不是反比例函数？若是，请写出它的比例系数.

（1）$y=3x^{-1}$；（2）$y=-\dfrac{x}{3}$；

（3）$y=\dfrac{1}{5x}$；（4）$y=-\dfrac{1}{11x}$.

2. 下列问题中，变量间的对应关系可以用怎样的函数表达式表示？

（1）已知矩形的面积为 120 cm^2，矩形的长 y(cm) 随宽 x(cm) 的变化而变化；

（2）在直流电路中，电压为 220 V，电流 I(A) 随电阻 $R(\Omega)$ 的变化而变化.

习题 1.1

A 组

1. 下列函数是不是反比例函数？若是，请写出它的比例系数.

(1) $y=\frac{2}{x}$；　　(2) $y=x^{-1}$；

(3) $y=-\frac{2}{x}$；　　(4) $y=\frac{1}{2x}$.

2. 已知某空游泳池的容积为 270 m^3，用恰当的函数表达式来表示进水速度v(m^3/h)与注满该游泳池所需时间t(h)之间的关系.

3. 已知反比例函数 $y=-\frac{6}{x}$.

(1) 写出这个函数的比例系数和自变量的取值范围；

(2) 求当 $x=-3$ 时函数的值；

(3) 求当 $y=-2$ 时自变量 x 的值.

4. (1) 根据函数表达式填写下表：

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
$y=\frac{8}{x}$								

(2) 观察上表，由此猜测，当 x 取正数时，随着 x 的增大，y 的值是怎样变化的？当 x 取负数时，随着 x 的增大，y 的值是怎样变化的？

B 组

5. 分别写出下列函数的表达式，并指出其中哪些是正比例函数，哪些是反比例函数.

(1) 当速度 $v=3$ m/s 时，路程 s(m)关于时间 t(s)的函数；

(2) 当电压 $U=220$ V 时，电阻 $R(\Omega)$关于电流 I(A)的函数；

(3) 当圆柱体的体积 $V=100$ cm^3 时，其底面积 S(cm^2)关于高 h(cm)的函数.

6. 根据下列式子，写出 y 关于 x 的函数表达式，并指出其中哪些是一次函数，哪些是反比例函数.

(1) $x+y=5$；　　(2) $xy=5$；

(3) $xy=-\frac{1}{4}$；　　(4) $x-y=-\frac{1}{4}$.

1.2 反比例函数的图象与性质

我们已经学习了用“描点法”画一次函数的图象，并且知道一次函数的图象是一条直线，那么怎样画反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ (k 为常数，$k\neq 0$)的图象呢？它的图象的形状是怎样的呢？

探究

如何画反比例函数 $y=\dfrac{6}{x}$ 的图象？

列表：由于自变量 x 的取值范围是所有非零实数，因此，让 x 分别取一些负数值和一些正数值，并且计算出相应的函数值 y，列成下表.

x	…	-6	-5	-4	-3	-2	-1.5	-1	1	1.5	2	3	4	5	6	…
$y=\dfrac{6}{x}$	…	-1	-1.2	-1.5	-2	-3	-4	-6	6	4	3	2	1.5	1.2	1	…

描点：在平面直角坐标系内，以自变量 x 的取值为横坐标，以相应的函数值 y 为纵坐标，描出相应的点，如图 1-2 所示.

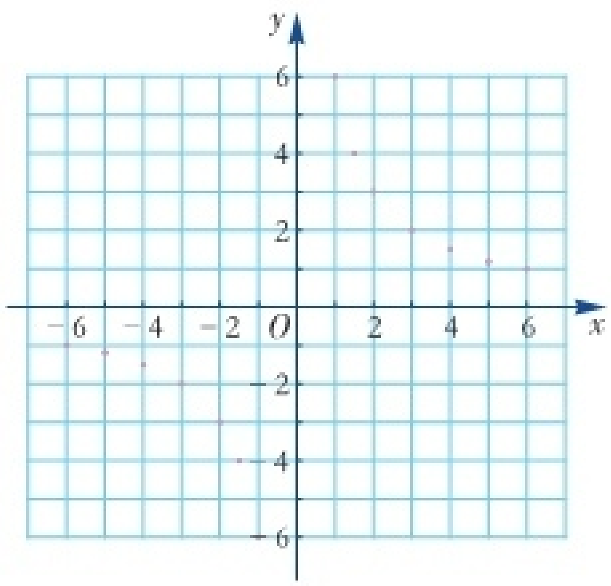
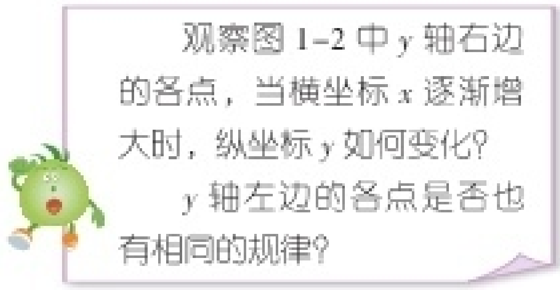


图 1-2



我们可以证明：对于反比例函数 $y=\frac{6}{x}$，当 $x>0$ 时，函数值 y 随自变量 x 的增大而减小；当 $x<0$ 时，也有这一规律.

连线：根据以上分析，我们可以把 y 轴右边各点和左边各点，分别用一条光滑曲线顺次连接起来. 从 $y=\frac{6}{x}$ 可以看出，x 取任意非零实数，都有 $y\neq 0$，因此这两支曲线与 x 轴都不相交. 由于 x 不能取 0，因此这两支曲线与 y 轴也都不相交. 这样就画出了 $y=\frac{6}{x}$ 的图象，如图 1–3 所示.

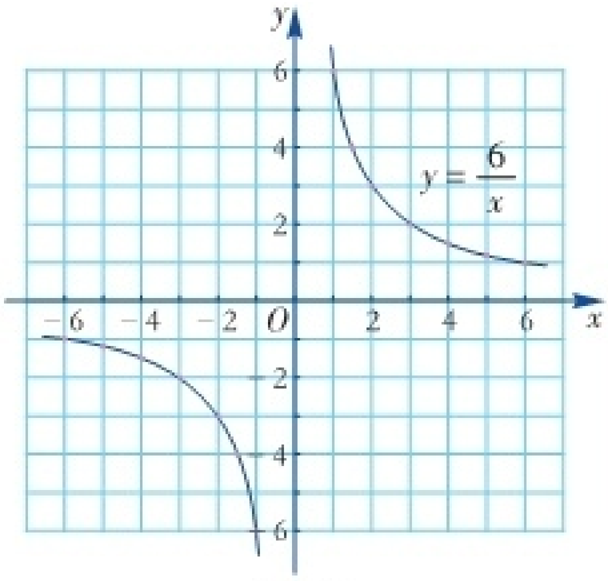


图 1–3

做一做

在图 1–4 所示的平面直角坐标系内，画出反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图象.

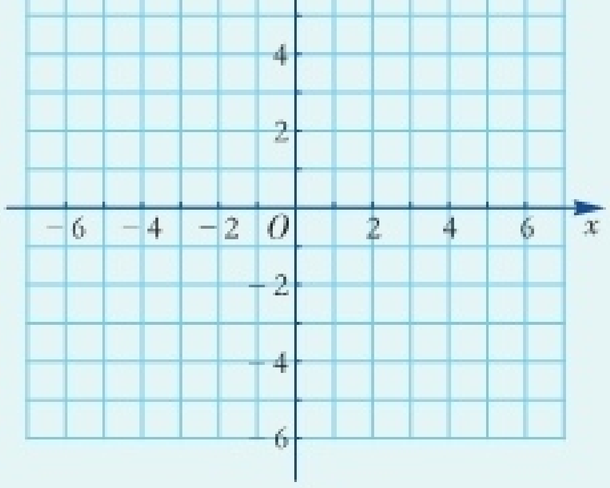


图 1–4

议一议

观察画出的 $y=\frac{6}{x}$，$y=\frac{3}{x}$ 的图象，思考下列问题：

（1）每个函数的图象分别位于哪些象限？

（2）在每一象限内，函数值 y 随自变量 x 的变化如何变化？

可以发现这两个函数的图象均由两支曲线组成，且分别位于第一、三象限.

对于 y 轴右边的点，当自变量 x 逐渐增大时，函数值 y 反而减小；对于 y 轴左边的点也有这一性质.

一般地，当 $k>0$ 时，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象**由分别在第一、三象限内的两支曲线组成，它们与 x 轴、y 轴都不相交，在每个象限内，函数值 y 随自变量 x 的增大而减小.**

练习

画出下列反比例函数的图象：

（1）$y=\frac{4}{x}$；　　（2）$y=\frac{1}{2x}$.

探究

如何画反比例函数 $y=-\frac{6}{x}$ 的图象？$y=-\frac{6}{x}$ 的图象与 $y=\frac{6}{x}$ 的图象有什么关系？

当 $x=3$ 时，$y=-\dfrac{6}{x}$ 的函数值为 -2，而 $y=\dfrac{6}{x}$ 的函数值为 2. 在平面直角坐标系内，点 $A(3,\ -2)$ 与 $B(3,\ 2)$ 关于 x 轴对称，如图 1–5 所示.

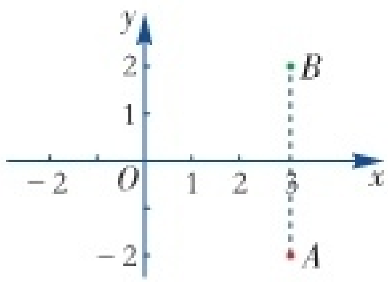


图 1–5

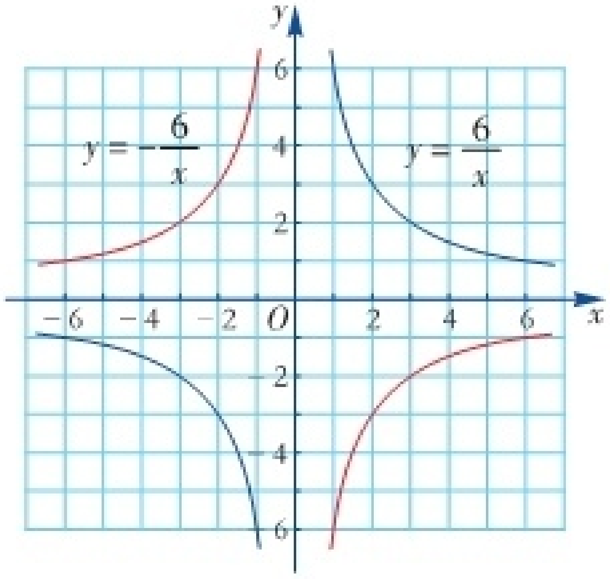


图 1–6

类似地，当 x 取任一非零实数 a 时，$y=-\dfrac{6}{x}$ 的函数值为 $-\dfrac{6}{a}$，而 $y=\dfrac{6}{x}$ 的函数值为 $\dfrac{6}{a}$，从而都有点 $P\left(a,\ -\dfrac{6}{a}\right)$ 与点 $Q\left(a,\ \dfrac{6}{a}\right)$ 关于 x 轴对称，因此 $y=-\dfrac{6}{x}$ 的图象与 $y=\dfrac{6}{x}$ 的图象关于 x 轴对称. 于是只要把 $y=\dfrac{6}{x}$ 的图象沿着 x 轴翻折并将图象“复制”出来，就得到了 $y=-\dfrac{6}{x}$ 的图象，如图 1–6 中的红色曲线所示.

从图 1–6 看出：$y=-\dfrac{6}{x}$ 的图象由分别在第二、四象限的两支曲线组成，它们与 x 轴、y 轴都不相交，在每个象限内，函数值 y 随自变量 x 的增大而增大.

类似地，当 $k<0$ 时，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象与 $y=-\dfrac{k}{x}$ 的图象关于 x 轴对称. 从而当 $k<0$ 时，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象**由分别在第二、四象限内的两支曲线组成，它们与 x 轴、y 轴都不相交，在每个象限内，函数值 y 随自变量 x 的增大而增大.**

由于我们已经知道了当 $k<0$ 时反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象的性质，因此今后画反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k<0$）的图象时，只要“列表、描点、连线”三个步骤就可以了.

例 1 画反比例函数 $y=-\dfrac{4}{x}$ 的图象.

解 列表：让 x 取一些非零实数，并计算出相应的函数值 y，列成下表.

x	…	-6	-5	-4	-3	-2	-1	$-\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{2}{3}$	1	2	3	4	5	6	…
$y=-\dfrac{4}{x}$	…	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{4}{5}$	1	$\dfrac{4}{3}$	2	4	6	-6	-4	-2	$-\dfrac{4}{3}$	-1	$-\dfrac{4}{5}$	$-\dfrac{2}{3}$	…

描点：在平面直角坐标系内，以自变量 x 的取值为横坐标，以相应的函数值 y 为纵坐标，描出相应的点.

连线：把 y 轴左边各点和右边各点分别用一条光滑曲线顺次连接起来，就得到了函数 $y=-\dfrac{4}{x}$ 的图象，如图 1-7 所示.

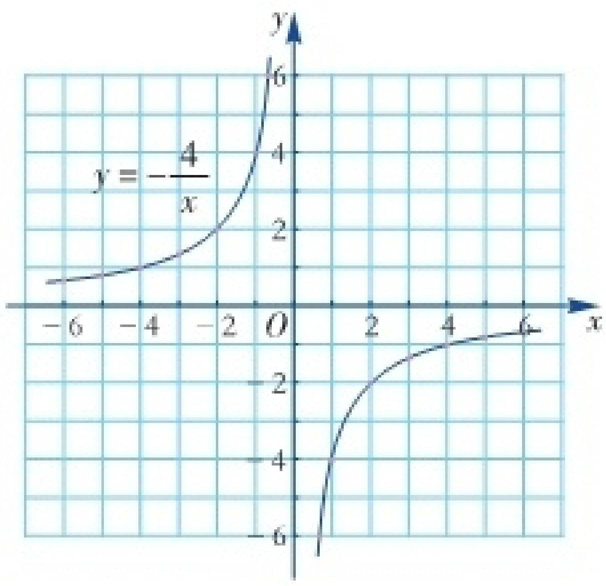


图 1-7

综上所述，我们得到：

反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的图象是由两支曲线组成的，这两支曲线称为**双曲线**（hyperbola）.

练习

画出下列反比例函数的图象：

（1）$y=-\dfrac{3}{x}$；　　（2）$y=-\dfrac{1}{2x}$.

动脑筋

已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点$P(2, 4)$.

(1) 求 k 的值，并写出该函数的表达式；

(2) 判断点 $A(-2, -4)$，$B(3, 5)$是否在这个函数的图象上；

(3) 这个函数的图象位于哪些象限？在每个象限内，函数值 y 随自变量 x 的增大如何变化？

(1) 因为反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $P(2, 4)$，即点 P 的坐标满足这一函数表达式，因而

$$4=\frac{k}{2},$$

解得 $k=8$.

因此，这个反比例函数的表达式为 $y=\frac{8}{x}$.

(2) 把点 A，B 的坐标分别代入 $y=\frac{8}{x}$，可知点 A 的坐标满足函数表达式，点 B 的坐标不满足函数表达式，所以点 A 在这个函数的图象上，点 B 不在这个函数的图象上.

(3) 因为 $k>0$，所以这个反比例函数的图象位于第一、三象限，在每个象限内，函数值 y 随自变量 x 的增大而减小.

例 2 图 1-8 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象. 根据图象，回答下列问题：

(1) k 的取值范围是$k>0$还是 $k<0$？说明理由；

(2) 如果点 $A(-3, y_1)$，$B(-2, y_2)$是该函数图象上的两点，试比较 y_1，y_2 的大小.

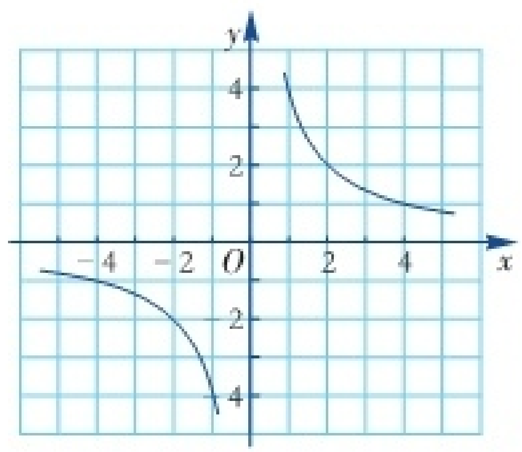


图 1-8

解　(1) 由图 1–8 可知，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象的两支曲线分别位于第一、三象限内，在每个象限内，函数值 y 随自变量 x 的增大而减小，因此，$k>0$.

(2) 因为点 $A(-3,\ y_1)$，$B(-2,\ y_2)$是该图象上的两点，且$-3<0$，$-2<0$，所以点 A，B 都位于第三象限. 又因为$-3<-2$，由反比例函数图象的性质可知：$y_1>y_2$.

例 3 已知一个正比例函数与一个反比例函数的图象交于点$P(-3,\ 4)$. 试求出它们的表达式，并在同一坐标系内画出这两个函数的图象.

解　设正比例函数、反比例函数的表达式分别为 $y=k_1x$，$y=\dfrac{k_2}{x}$，其中 k_1，k_2 为常数，且均不为零.

由于这两个函数的图象交于点 $P(-3,\ 4)$，则点 $P(-3,\ 4)$是这两个函数图象上的点，即点 P 的坐标分别满足这两个表达式.

因此　$4=k_1\times(-3)$，$4=\dfrac{k_2}{-3}$.

解得　$k_1=-\dfrac{4}{3}$，$k_2=-12$.

因此，这两个函数的表达式分别为 $y=-\dfrac{4}{3}x$ 和 $y=-\dfrac{12}{x}$，它们的图象如图 1–9 所示.

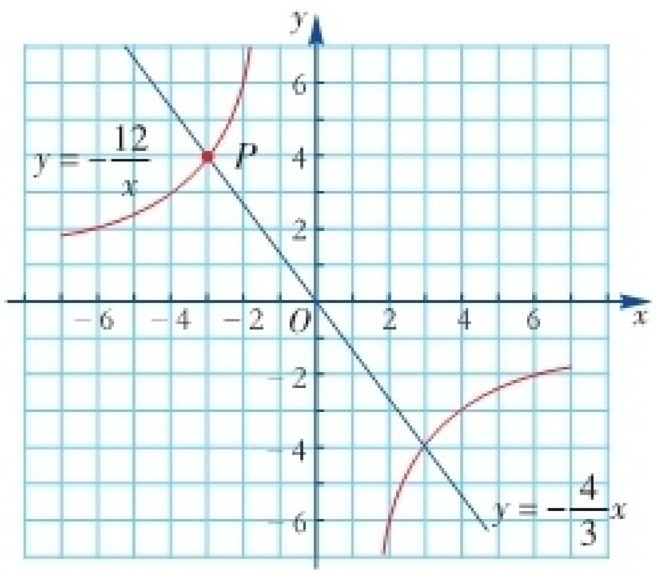


图 1–9

练习

1. 已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象经过点 $M(-2,\ 2)$.

(1) 求这个函数的表达式；

(2) 判断点 $A(-4,\ 1)$，$B(1,\ 4)$是否在这个函数的图象上；

（3）这个函数的图象位于哪些象限？函数值 y 随自变量 x 的增大如何变化？

2. 已知在反比例函数 $y=\dfrac{m+3}{x}$ 的图象的每一支曲线上，函数值 y 随自变量 x 的增大而增大，求 m 的取值范围. 如果点 $M(-2, y_1)$，$N(-4, y_2)$ 是该图象上的两点，试比较函数值 y_1，y_2 的大小.

3. 正比例函数 $y=x$ 的图象与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象的一个交点的纵坐标为 3. 求当 $x=-4$ 时，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的对应函数值.

习题 1.2

A 组

1. 画出反比例函数 $y=\dfrac{5}{x}$ 的图象.

2. 画出反比例函数 $y=-\dfrac{3}{2x}$ 的图象.

3. 已知点 $(3, -3)$ 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象上.

（1）求这个函数的表达式；

（2）判断点 $A(-1, 9)$，$B(-3, 2)$ 是否在这个函数的图象上；

（3）这个函数的图象位于哪些象限？函数值 y 随自变量 x 的增大如何变化？

4. （1）已知反比例函数 $y=\dfrac{k-2}{x}$ 的图象位于第一、三象限，求 k 的取值范围；

（2）已知点 $(-2, y_1)$，$(-3, y_2)$ 在函数 $y=-\dfrac{2}{x}$ 的图象上，试比较函数值 y_1，y_2 的大小.

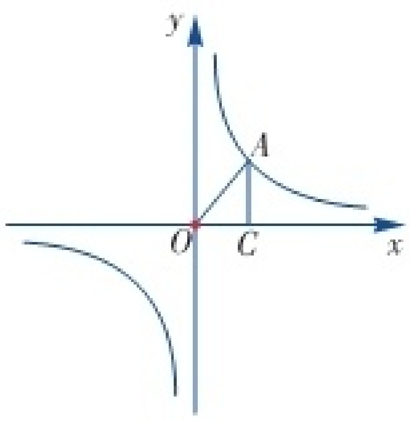
5. 正比例函数 $y=x$ 的图象与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的图象的一个交点的横坐标是 2. 求当 $x=-3$ 时，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的对应函数值.

Ⓑ 组

6. 如图，点 A 在某反比例函数的图象上，且点 A 的横坐标为 $a(a>0)$，$AC\perp x$ 轴，垂足为点 C，且 $\triangle AOC$ 的面积为 2.

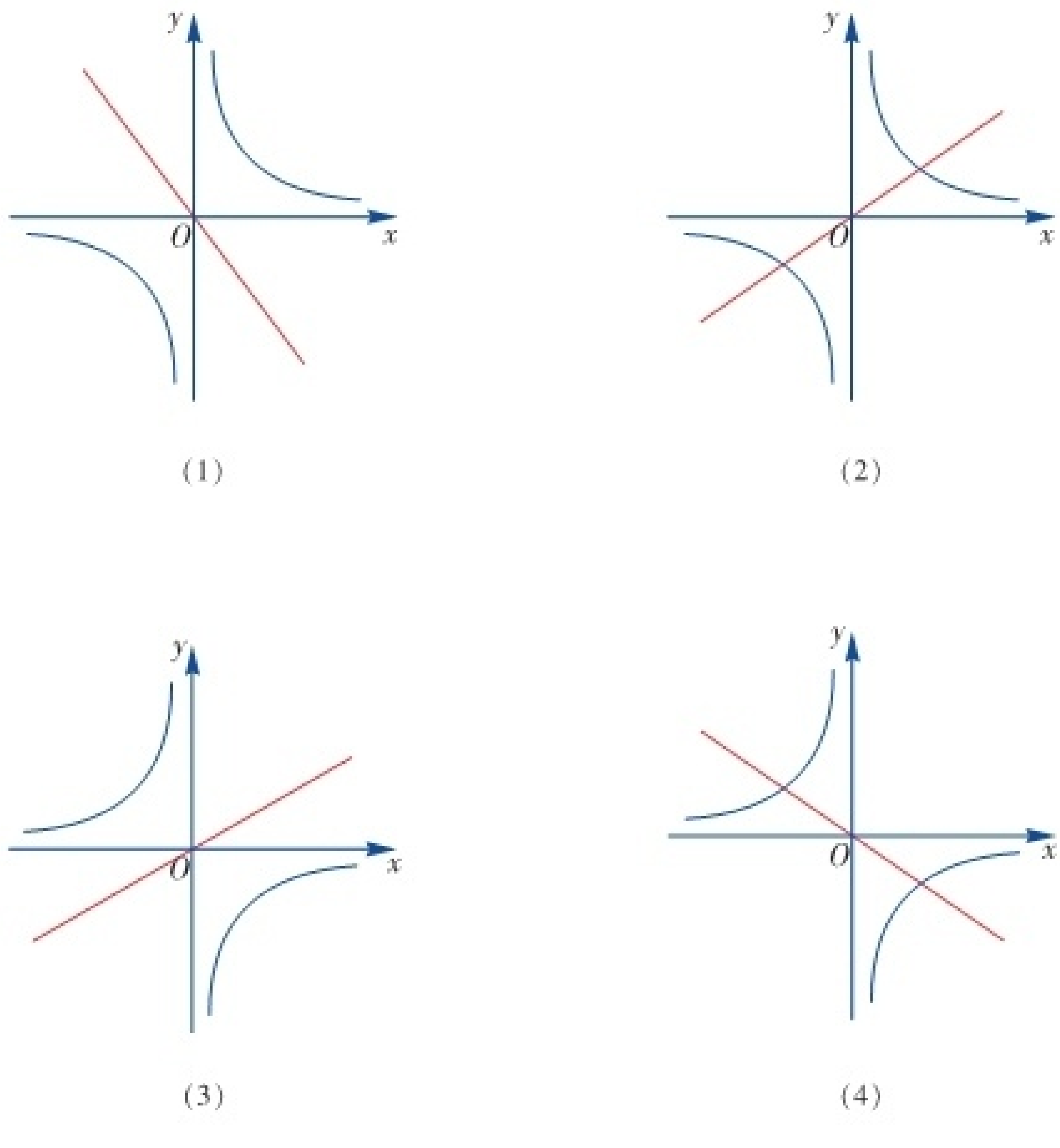
（1）求该反比例函数的表达式；

（2）若点 $(-a, y_1)$，$(-2a, y_2)$ 在该反比例函数的图象上，试比较 y_1 与 y_2 的大小.



（第 6 题图）

7. 指出下列图象中，哪些是 $y=kx$ 与 $y=\dfrac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）在同一平面直角坐标系中的图象.



（第 7 题图）

1.3 反比例函数的应用

对现实生活中的许多问题，我们都可以通过建立反比例函数模型来加以解决.

动脑筋

某科技小组在一次野外考察途中遇到一片烂泥湿地. 为了安全、迅速地通过这片湿地，他们沿着前进路线铺垫了若干块木板，构筑成一条临时通道，从而顺利通过了这片湿地.

(1)根据压力 F(N)、压强 p(Pa)与受力面积 S(m^2)之间的关系式 $p=\frac{F}{S}$，请你判断：当 F 一定时，p 是 S 的反比例函数吗?

(2) 若人对地面的压力 $F=450$ N，完成下表：

受力面积 S/m^2	0.005	0.01	0.02	0.04
压强 p/Pa				

(3) 当 $F=450$ N 时，试画出该函数的图象，并结合图象分析当受力面积 S 增大时，地面所受压强 p 是如何变化的. 据此，请说出他们铺垫木板(木板重力忽略不计)通过湿地的道理.

(1) 对于 $p=\frac{F}{S}$，当 F 一定时，根据反比例函数的定义可知，p 是 S 的反比例函数.

(2) 因为 $F=450$ N，所以当 $S=0.005$ m^{2}时，由 $p=\frac{F}{S}$，得

$$p=\frac{450}{0.005}=90\ 000(\text{Pa}).$$

类似地，当 $S=0.01$ m^{2}时，$p=45\ 000$ Pa；

当 $S=0.02$ m^{2}时，$p=22\ 500$ Pa；

当 $S=0.04$ m^{2}时，$p=11\ 250$ Pa.

(3) 当 $F=450$ N 时，该反比例函数的表达式为 $p=\frac{450}{S}$，它的图象如图 1–10 所示. 由图象及性质可知，当受力面积 S 增大时，地面所受压强 p 会越来越小. 因此，该科技小组通过铺垫木板的方法来增大受力面积，以减小地面所受压强，从而可以顺利地通过湿地.

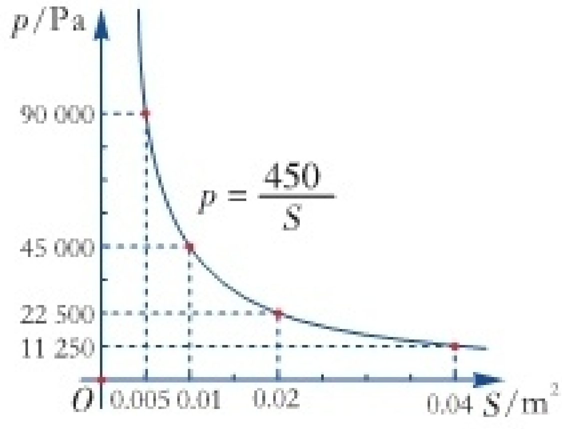


图 1–10

议一议

你能根据波义耳定律(在温度不变的情况下，气体的压强 p 与它的体积 V 的乘积是一个常数 $k(k>0)$，即 $pV=k$)来解释：为什么使劲踩气球时，气球会爆炸？

例 已知某电路的电压 U(V)、电流 I(A)、电阻 R(Ω)三者之间有如下关系式：$U=IR$，且该电路的电压 U 恒为 220 V.

(1) 写出电流 I 关于电阻 R 的函数表达式；

(2) 如果该电路的电阻为 200 Ω，则通过它的电流是多少？

(3) 如图 1–11 所示，如果该电路接入的是一个滑动变阻器，怎样调整电阻 R，就可以使电路中的电流 I 增大？

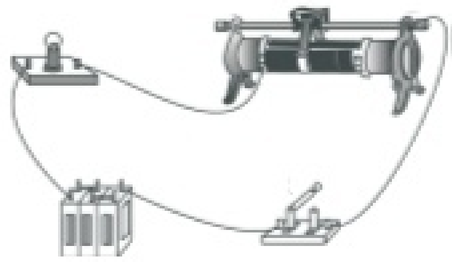


图 1–11

分析 由于该电路的电压 U 为定值，即该电路的电阻 R 与电流 I 的乘积为定值，因此该电路的电阻 R 与电流 I 成反比例关系.

解 (1) 因为 $U=IR$，且 $U=220$ V，所以 $IR=220$，即该电路的电流 I 关于电阻 R 的函数表达式为 $I=\frac{220}{R}$.

(2) 因为该电路的电阻 $R=200$ Ω，

所以通过该电路的电流 $I=\frac{220}{200}=1.1$(A).

(3) 根据反比例函数 $I=\frac{220}{R}$ 的图象(如图 1–12)及性质可知，当滑动变阻器的电阻 R 减小时，就可以使电路中的电流 I 增大.

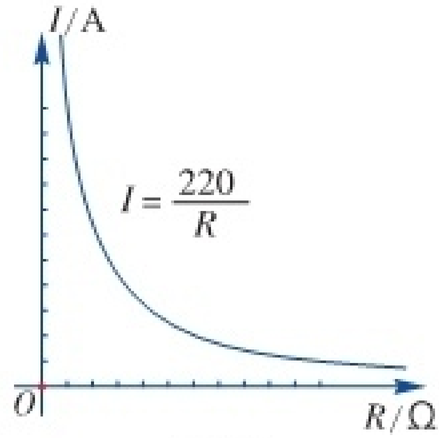


图 1–12

练习

1. 举例说明反比例函数在生活中的应用.

2. 某天然气公司要在地下修建一个容积为 10^5 m^3 的圆柱形天然气储存室.

(1) 储存室的底面积 $S(m^2)$ 与其深度 $d(m)$ 有怎样的函数关系?

(2) 若公司决定把储存室的底面积 S 定为 5 000 m^2，则施工队施工时应该向下掘进多深?

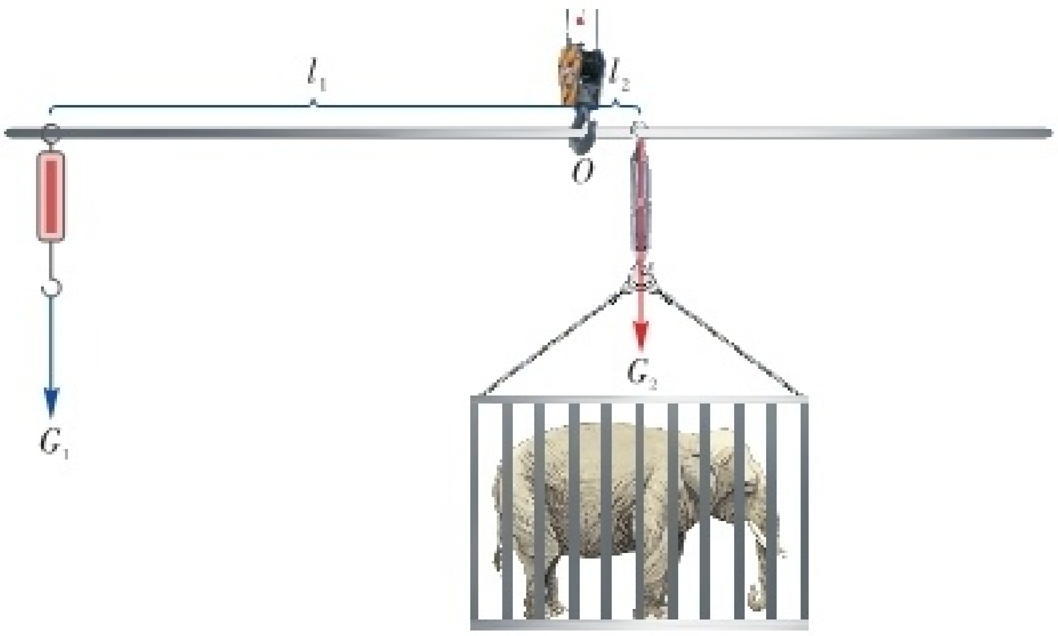
(3) 当施工队按(2)中的计划掘进到地下 15 m 时，碰上了坚硬的岩石，为了节约建设资金，公司决定把储存室的深度改为 15 m，则储存室的底面积应改为多少才能满足需要(精确到 0.01 m^2)?

习题 1.3

A 组

1. 某动物园根据杠杆原理 $G_1 \cdot l_1 = G_2 \cdot l_2$ 上演了一幕现代版"曹冲称象"，具体做法如下：

如图所示，在一根已经水平地挂在起重机上的钢梁的左右两边分别挂上一根弹簧秤(重量可以忽略不计)和装有大象的铁笼，其中 $l_1 = 6$ m，$l_2 = 0.2$ m. 已知当钢梁又呈水平状态(铁笼已经离地)时，弹簧秤显示的读数为 G_1=1 200 N.



(第 1 题图)

（1）根据上述原理，求出装有大象的铁笼及其挂钩的总重量；

（2）若装有大象的铁笼固定不动，向左移动弹簧秤，则弹簧秤的读数是增大还是减小？为什么？

2. 根据牛顿第二定律，物体所受的力 F 与物体的质量 m、物体的加速度 a 有如下关系：

$$F=ma.$$

（1）当物体所受的力 F 一定时，物体的加速度 a 是它的质量 m 的反比例函数吗？若是，写出它的表达式；

（2）在光滑的地面上摆着两辆一样的小车，一辆是空车，另一辆装有石头. 用同样大小的力，向同一个方向猛推这两辆小车，立即撒手. 根据(1)的结果，哪辆车的加速度大？为什么？

（第 2 题图）

B 组

3. 在纳鞋底时，先用锥子穿透鞋底，然后用拴有细绳的针顺着小孔眼从鞋底的这一面穿到另一面. 为什么是用锥子穿透鞋底，而不用小铁棍呢？

4. 为了降低输电线路上的电能损耗，发电站都采用高压输电. 输出电压 U(V)与输出电流 I(A)的乘积等于发电功率 P(即 $P=UI$)(W)，且通常把某发电站在某时段内的发电功率 P 看作是恒定不变的.

（1）输出电压 U 与输出电流 I 之间成反比例关系吗？为什么？

（2）当输出电压提高 1 倍时，由线路损耗电能的计算公式 $Q=I^2Rt$(其中 R 为常数)计算在相同时段内该线路的电能损耗减少多少倍.

IT 教室

用计算机绘制反比例函数的图象

在本章，我们已经学习了如何画反比例函数的图象，但是，仅靠手工操作，很难绘制出准确的图象. 为此，我们可以借助计算机又快又准地绘制出反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象.

1. 打开几何画板，选择菜单【数据】，选择【新建参数】，弹出对话框，在对话框中修改参数名称为 k ，默认值为 1，即 $k=1.00$.

2. 选择菜单【绘图】，选择【绘制新函数】，在弹出的对话框中，输入"k/x"，点击"确定"，就可绘制出函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象，如图 1 所示.

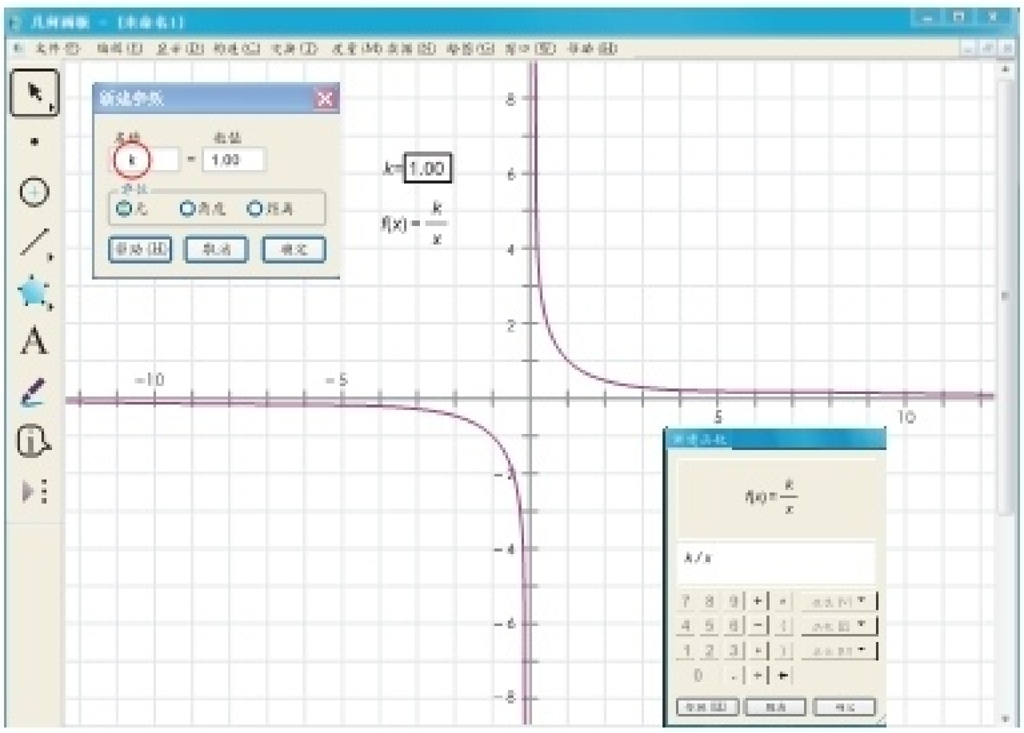


图1

3. 如图 2，在函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象上任取一点 A，选择【度量】菜单中的【坐标】，度量出点 A 的坐标$(x_A,\ y_A)$. 在用鼠标拖动点 A 的过程中，你发现随着横坐标 x_A 的变化，纵坐标 y_A 会发生怎样的变化？$x_A \cdot y_A$ 会变化吗？

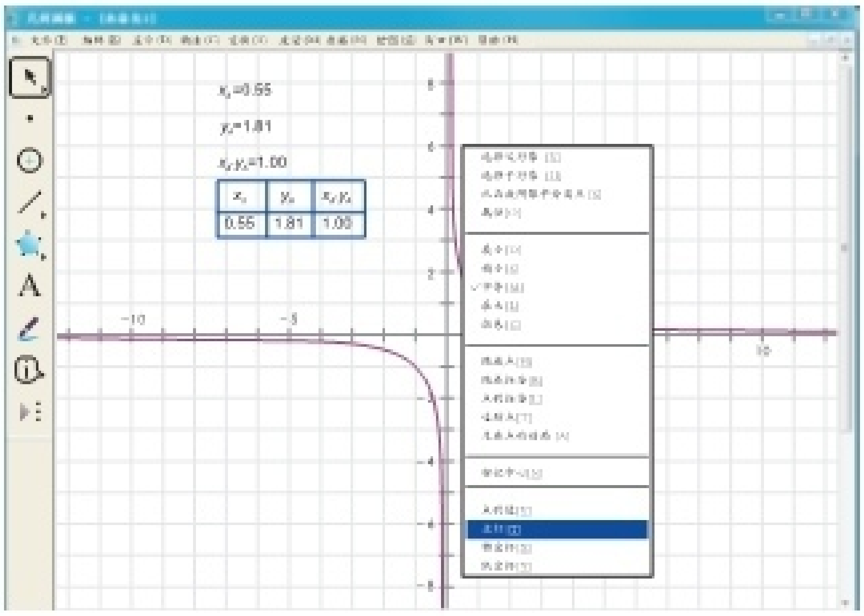


图 2

4. 继续作出反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}$，$y=\dfrac{3}{x}$，$y=\dfrac{4}{x}$ 的图象，如图 3，观察：随着 $k(k>0)$ 的变化，函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象发生了怎样的变化？

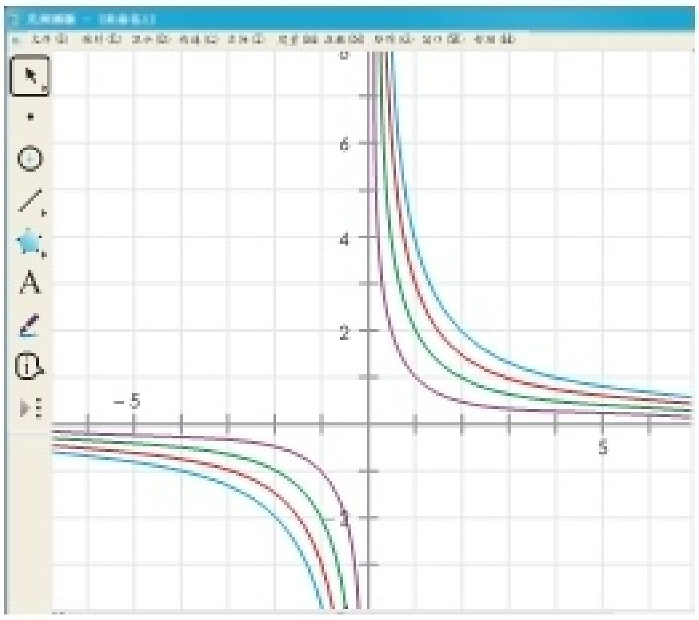


图 3

5. 在同一平面直角坐标系内，作出反比例函数 $y=-\dfrac{1}{x}$，$y=-\dfrac{2}{x}$，$y=-\dfrac{3}{x}$，$y=-\dfrac{4}{x}$ 的图象，观察：随着 $k(k<0)$ 的变化，函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象发生了怎样的变化？

小结与复习

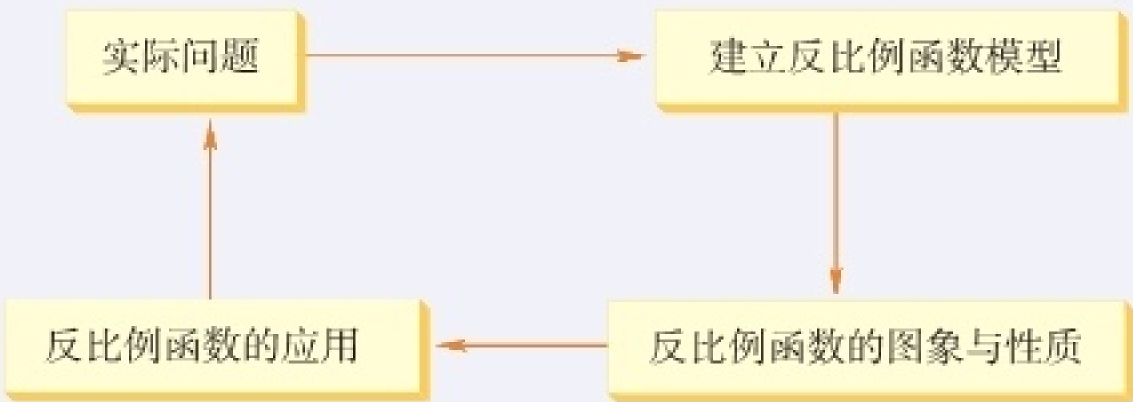
回顾

1. 举例说明什么是反比例函数.

2. 分别画出当 $k>0$，$k<0$时，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$(k 为常数)的大致图象，并说说反比例函数图象的性质.

3. 请你举出一些生活中应用反比例函数的实例.

本章知识结构



注意

1. 学习本章时，应注意从概念、图象和性质等各方面对正比例函数和反比例函数进行研究比较，以形成对“比例”函数的完整认识.

2. 在学习反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$的图象与性质时，要注意从 $k>0$ 与 $k<0$ 两种情况来讨论，从而全面掌握反比例函数的图象与性质.

3. 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$由比例系数 k 决定，自变量与对应函数值的乘积都等于 k，因此知道函数图象上一点的坐标，就能求出 k，进而确定一个反比例函数的表达式.

4. 在利用反比例函数解决某些实际问题时，可利用反比例函数的图象与性质来说明.

复习题 1

A 组

1. 写出下列函数的表达式，并指出其中哪些是反比例函数.

(1) 等边三角形的面积 $S(\text{cm}^2)$关于其边长 $a(\text{cm})$的函数；

(2) 当平行四边形的面积 $S(\text{cm}^2)$一定时，它的一条边长 $a(\text{cm})$关于这条边上的高 $h(\text{cm})$的函数.

2. 画出下列函数的图象：

(1) $y=\frac{5}{2x}$；　　　　(2) $y=-\frac{5}{2x}$.

3. (1) 已知点 $P(3,\ -4)$在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，求 k 的值；

(2) 已知点 $M(7,\ b)$在反比例函数 $y=\frac{21}{x}$ 的图象上，求 b 的值.

4. 下列哪些点在反比例函数 $y=\frac{15}{x}$ 的图象上，哪些点在反比例函数 $y=-\frac{15}{x}$ 的图象上？

(1) $A(2,\ 7.5)$；　　　　(2) $B(-3,\ 5)$；

(3) $C(-5,\ -3)$；　　　　(4) $D(3,\ 5)$.

5. 已知物体的质量 $m(\text{kg})$、密度 $\rho(\text{kg/m}^3)$与体积 $V(\text{m}^3)$满足如下关系式：

$$m=\rho V.$$

(1) 当质量 m 一定时，物体的体积 V 与它的密度 ρ 之间有怎样的函数关系？

(2) 质量均为 1 kg 的铁块与泡沫块，哪个体积大？为什么？(已知铁的密度大于泡沫的密度)

6. 已知反比例函数的图象经过点 $A(-6,\ -3)$.

(1) 求这个函数的表达式；

(2) 点 $B\left(4,\ \frac{9}{2}\right)$，$C(2,\ -5)$ 是否在这个函数的图象上？

(3) 这个函数的图象位于哪些象限？函数值 y 随自变量 x 的增大如何变化？

7. 已知在反比例函数 $y=\frac{k-2}{x}$ 图象的每一支曲线上，函数值 y 随着自变量 x 的增大而增大，求 k 的取值范围.

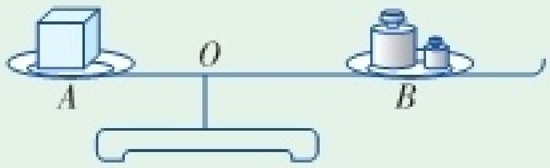
8. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与正比例函数 $y=2x$ 的图象交于点$(2,\ 4)$，

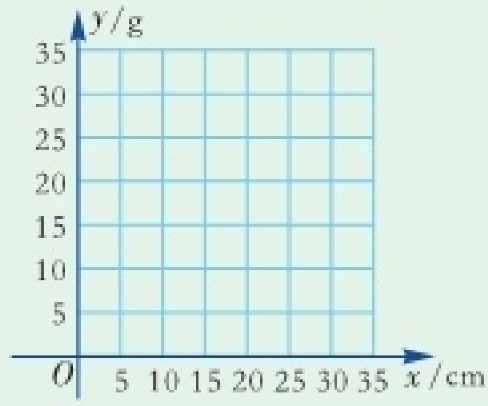
求这个反比例函数的表达式，并在同一平面直角坐标系内，画出这两个函数的图象.

9. 如图，在左边托盘 A（固定）中放置一个重物，在右边托盘 B（可左右移动）中放置一定质量的砝码，可使得仪器左右平衡. 改变托盘 B 与点 O 的距离，记录相应的托盘 B 中的砝码质量，得到下表：

托盘 B 与点 O 的距离 x/cm	10	15	20	25	30
托盘 B 中的砝码质量 y/g	30	20	15	12	10

（1）把上表中 x，y 的各组对应值作为点的坐标，在如图所示的平面直角坐标系中描出这些点，并用一条光滑曲线连接起来；





（第 9 题图）

（2）观察所画的图象，猜测 y 与 x 之间的函数关系，求出该函数表达式；

（3）当砝码质量为 24 g 时，求托盘 B 与点 O 的距离；

（4）当托盘 B 向左移动（不能移动到点 O）时，应往托盘 B 中添加砝码还是减少砝码？为什么？

B 组

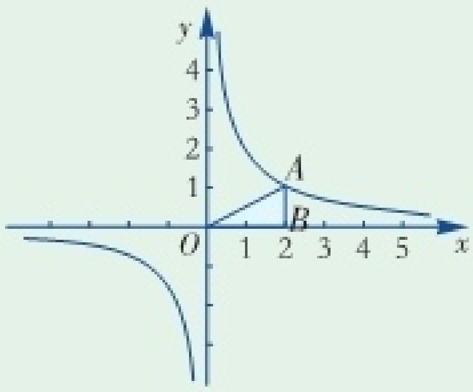
10. 已知点 $A(-2,\ y_1)$，$B(1,\ y_2)$ 和 $C(2,\ y_3)$ 都在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 的图象上，试比较 y_1，y_2 和 y_3 的大小.

11. 已知电功率 P(W)与电压 U(V)、电阻 R(Ω)的关系式是：$P=\frac{U^2}{R}$. 当两个灯泡并联接在电压为 220 V 的电路中时，如果它们的电功率的比 $\frac{P_1}{P_2}=4$，那么它们的电阻的比 $\frac{R_1}{R_2}$ 等于多少？

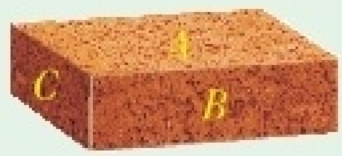
12. 如图，在平面直角坐标系中，点 O 为坐标原点. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$的图象经过点 $A(2, m)$，过点 A 作 $AB\perp x$ 轴，垂足为点 B，且$\triangle AOB$的面积为 1.

(1) 求 k 和 m 的值；

(2) 若点 $C(x, y)$也在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，求当$1\leqslant x\leqslant 3$时，函数值 y 的取值范围.



(第 12 题图)



(第 13 题图)

13. 如图，一块砖的 A，B，C 三个面的面积之比是4∶2∶1，若把砖的 B 面向下放在地上时地面所受压强为 a Pa，则把砖的 A 面和 C 面分别向下放在地上时，地面所受压强分别为多大？

C 组

14. 观察本章图 1-3 中反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象，猜想它是不是中心对称图形. 如果是，它的对称中心是哪个点？下面我们来探究：

(1) 在 $y=\frac{6}{x}$ 的图象的右支上任取一点 $P\left(a, \frac{6}{a}\right)(a>0)$，若一个一次函数的图象经过原点和点 P，求这个一次函数的表达式；

(2) 若(1)中一次函数的图象与 $y=\frac{6}{x}$ 的图象的左支的交点为点 Q，求点 Q 的坐标；

(3) 线段 OP 与 OQ 相等吗？为什么？

(4) 从(3)的结果看出，点 P 绕点 O 旋转 180°得到的点是哪个点？

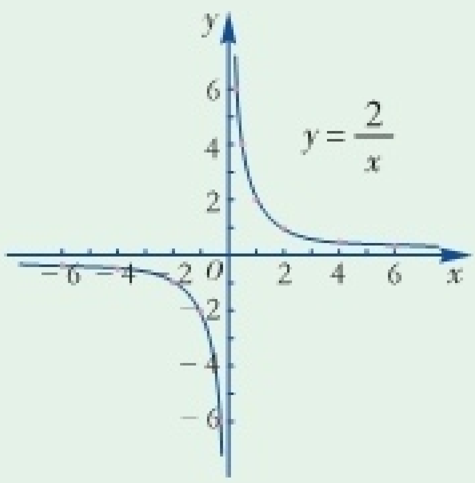
(5) 从(4)的结果看出，把 $y=\frac{6}{x}$ 的图象的右支绕点 O 旋转 180° 得到的图

形是什么？

(6) 同样，把 $y=\dfrac{6}{x}$ 的图象的左支绕点 O 旋转 180° 得到的图形是什么？

(7) 从(5) (6)的结果看出，$y=\dfrac{6}{x}$ 的图象是中心对称图形吗？ 如果是，它的对称中心是哪个点？

15. 用一张薄的白纸把图中反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 的图象和 x 轴、y 轴描下来，试一试：沿着哪条直线翻折，可以使图象在直线两旁的部分互相重合？这样的直线有几条？由此看出：反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 的图象是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？



(第 15 题图)

第2章

一元二次方程

随着人们经济收入的不断提高，汽车产业的快速发展，汽车已越来越多地进入了普通家庭. 据某市交通部门统计，前年该市汽车拥有量为75万辆，两年后增加到108万辆，你能算出该市两年来汽车拥有量的年平均增长率是多少吗？

这个问题需要建立一元二次方程模型来解决.

什么是一元二次方程？如何解一元二次方程？一元二次方程的根与系数之间有怎样的关系？怎样建立一元二次方程模型来解决生活中的实际问题？本章将学习这些新内容.

2.1 一元二次方程

动脑筋

（1）如图 2-1 所示，已知一矩形的长为 200 cm，宽为 150 cm. 现在矩形中挖去一个圆，使剩余部分的面积为原矩形面积的 $\frac{3}{4}$. 求挖去的圆的半径 x cm 应满足的方程(其中 π 取 3)；

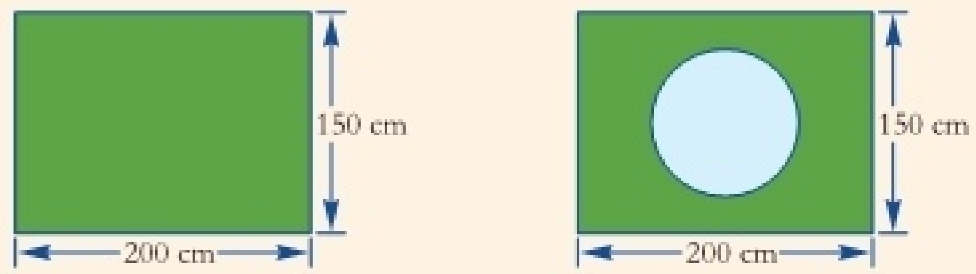


图 2-1

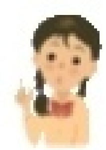
（2）据某市交通部门统计，前年该市汽车拥有量为 75 万辆，两年后增加到 108 万辆. 求该市两年来汽车拥有量的年平均增长率 x 应满足的方程.

要建立方程，关键是找出问题中的等量关系.

问题(1)(2)涉及的等量关系分别是：

矩形的面积 − 圆的面积 = 矩形的面积 × $\frac{3}{4}$.

两年后的汽车拥有量 = 前年的汽车拥有量 × (1 + 年平均增长率)^2.



（1）由于圆的半径为 x cm，则它的面积为 $3x^2$ cm^2.

根据等量关系，可以列出方程

$$200\times150-3x^2=200\times150\times\frac{3}{4}.$$

化简，整理得

$$x^2-2\,500=0. \qquad ①$$

（2）该市两年来汽车拥有量的年平均增长率为 x.

根据等量关系，可以列出方程

$$75(1+x)^2=108.$$

化简，整理得

$$25x^2+50x-11=0. \qquad ②$$

说一说

方程①②中有几个未知数？它们的左边是 x 的几次多项式？

由方程①和②受到启发，如果一个方程通过整理可以使右边为 0，而左边是只含有一个未知数的二次多项式，那么这样的方程叫作**一元二次方程**（quadratic equation with one unknown），它的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0 \ (a,\ b,\ c \text{ 是已知数}，a\neq 0),$$

其中 a，b，c 分别叫作二次项系数、一次项系数、常数项.

例如方程 $x^2-2\ 500=0$ 中二次项系数是 1，一次项系数是 0，常数项是 $-2\ 500$.

例 下列方程是否为一元二次方程？若是，指出其中的二次项系数、一次项系数和常数项.

（1）$3x(1-x)+10=2(x+2)$；　　（2）$5x(x+1)+7=5x^2-4$.

解　（1）去括号，得

$$3x-3x^2+10=2x+4.$$

可以写成 $3x^2-x-6=0$ 吗？

移项，合并同类项，得

$$-3x^2+x+6=0,$$

这是一元二次方程，其中二次项系数是-3，一次项系数是 1，常数项是 6.

（2）去括号，得

$$5x^2+5x+7=5x^2-4.$$

移项，合并同类项，得

$$5x+11=0,$$

这是一元一次方程，不是一元二次方程.

练习

1. 请用线把左边的方程与右边所对应的方程类型连接起来：

$2x^2+5x=x^2-3$	一元一次方程
$(x+1)^2-1=x^2+4$	
$3x+5=2x-1$	一元二次方程
$\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{3}{x}$	分式方程

2. 下列方程是否为一元二次方程？若是，指出其中的二次项系数、一次项系数和常数项.

（1）$4x^2=49$；　　（2）$5x^2-2=3x$；

（3）$0.01t^2=2t$；　　（4）$(9y-1)(2y+3)=18y^2+1$.

习题 2.1

A 组

1. 下列方程是否为一元二次方程？若是，指出其中的二次项系数、一次项系数和常数项.

（1）$x^2+5x=6$；　　（2）$3x-4=x^2$；

（3）$(10-2x)(6-2x)=32$；　　（4）$(3x-2)^2=3x(3x-5)$.

2. 选择题：

（1）某商品经过两次连续降价，每件售价由原来的 55 元降到了 35 元. 设平均每次降价率都为 x，则平均降价率 x 应满足的方程为（　　）

（A）$55(1+x)^2=35$　　（B）$35(1+x)^2=55$

（C）$55(1-x)^2=35$　　（D）$35(1-x)^2=55$

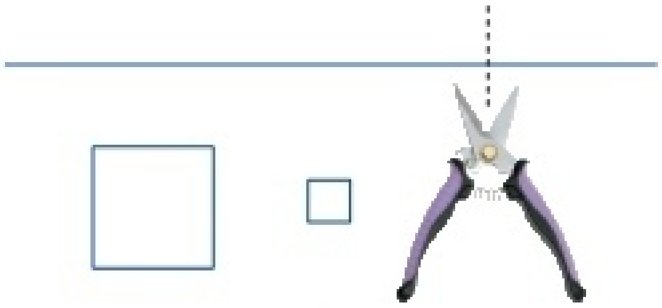
（2）某超市 1 月份的营业额为 36 万元，3 月份的营业额为 49 万元. 设每月营业额的平均增长率都为 x，则平均增长率 x 应满足的方程为（　　）

（A）$49(1+x)^2=36$　　（B）$36(1-x)^2=49$

（C）$36(1+x)^2=49$　　（D）$49(1-x)^2=36$

3. 已知一个数 x 与比它大 2 的数的积等于 35. 请根据题意，列出关于 x 的方程，这个方程是一元二次方程吗？

4. 如图，将一根长为 64 cm 的铁丝剪成两段，每段均折成一个正方形. 若两个正方形的面积和为 160 cm^2，且其中一个正方形的边长为 x cm. 请根据题意，列出关于 x 的方程.



（第 4 题图）

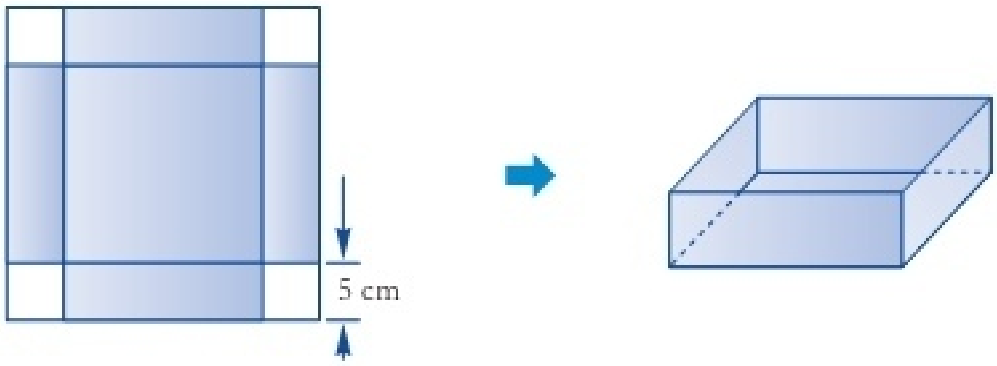
B 组

5. 下列方程中，哪些是一元二次方程？

(1) $3(1+x)^2 = 3x+7$;　　(2) $3(1+x)^2 = x(3x+7)$;

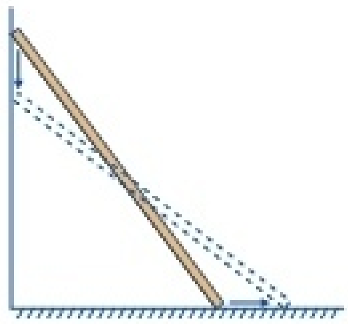
(3) $px^2+x-4 = x(px-1)$.

6. 如图，在一块边长为 x cm 的正方形铁皮的四角各截去一边长为 5 cm 的小正方形，折成一个无盖的长方体形盒子，它的容积是 2 000 cm^3. 请根据题意，列出关于 x 的方程.



（第 6 题图）

7. 长 5 m 的梯子斜靠在墙上，梯子的底端与墙的距离是 3 m. 已知梯子底端向右滑动的距离与梯子顶端向下滑动的距离相等. 设梯子顶端向下滑动的距离为 x m，请根据题意，列出关于 x 的方程.



（第 7 题图）

2.2 一元二次方程的解法

2.2.1 配方法

动脑筋

如何解本章 2.1 节“动脑筋”中的方程①：$x^2-2\,500=0$ 呢？

把方程①写成

$$x^2=2\,500.$$

这表明 x 是 2 500 的平方根，根据平方根的意义，得

$$x=\sqrt{2\,500} \text{ 或 } x=-\sqrt{2\,500},$$

即
$$x_1=50,\ x_2=-50.$$

对于实际问题中的方程①而言，$x_2=-50$ 不合题意，应当舍去. 而 $x_1=50$ 符合题意，因此该圆的半径为 50 cm.

使一元二次方程左、右两边相等的未知数的值叫作**一元二次方程的解**. 一元二次方程的解也叫作一元二次方程的**根**(root). $x_1=50$ 和 $x_2=-50$ 就是方程 $x^2-2\,500=0$ 的根.

例 1 解方程：$4x^2-25=0$.

解 原方程可化为

$$x^2=\frac{25}{4}.$$

根据平方根的意义，得

$$x=\sqrt{\frac{25}{4}} \text{ 或 } x=-\sqrt{\frac{25}{4}},$$

因此，原方程的根为

$$x_1=\frac{5}{2},\quad x_2=-\frac{5}{2}.$$

动脑筋

如何解方程 $(1+x)^2=81$？

若把 $1+x$ 看作一个整体，则由 $(1+x)^2=81$，

得 $1+x=\sqrt{81}$ 或 $1+x=-\sqrt{81}$，即 $1+x=9$ 或 $1+x=-9$.

解得 $x_1=8$，$x_2=-10$.

例 2 解方程：$(2x+1)^2=2$.

解 根据平方根的意义，得

$2x+1=\sqrt{2}$ 或 $2x+1=-\sqrt{2}$，

因此，原方程的根为

$$x_1=\frac{\sqrt{2}-1}{2}，\ x_2=-\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

通过"降次"，将一个一元二次方程转化为两个一元一次方程.

做一做

解方程：$4(x+1)^2-25=0$.

练习

1. 解下列方程：

(1) $9x^2-49=0$；　　(2) $36-x^2=0$；

(3) $(x+3)^2-36=0$；　　(4) $9(1-2x)^2-16=0$.

2. （古代数学问题）直田七亩半，忘了长和短.

记得立契时，长阔争一半.

今问俊明公，此法如何算.

意思是：有一块面积为 7 亩半的长方形田，忘了长与宽各是多少. 只记得在立契约的时候说过，宽是长的一半. 现在请你帮他算出它的长和宽各是多少步[①].（1 亩 = 240 步²）

① 步，古代的一种长度单位. 1 步约等于 1.67 m.

做一做

(1) $(a\pm b)^2=$______________;

(2) 把完全平方公式从右到左地使用，在下列各题中，填上适当的数，使等式成立：

① x^2+6x+______$=(x+$______$)^2$；

② x^2-6x+______$=(x-$______$)^2$；

③ $x^2+6x+5=x^2+6x+$______$-$______$+5=(x+$______$)^2-$______.

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

① $x^2+6x+9=(x+3)^2$；

② $x^2-6x+9=(x-3)^2$；

③ $x^2+6x+5=x^2+6x+9-9+5=(x+3)^2-4$.

探究

解方程：$x^2+4x=12$. ①

我们已经知道，如果能把方程①写成$(x+n)^2=d(d\geqslant 0)$的形式，那么就可以根据平方根的意义来求解.

因此，需要在方程①的左边加上一次项系数的一半的平方，即加上$\left(\frac{4}{2}\right)^2=2^2$；为了使等式仍然成立，应当再减去$2^2$. 为此，把方程①写成：

$$x^2+4x+2^2-2^2=12,$$

可以将“2^2”换成其他数的平方吗？

因此，有

$$x^2+4x+2^2=2^2+12.$$

即
$$(x+2)^2=16.$$

根据平方根的意义，得

$$x+2=4 \text{ 或 } x+2=-4.$$

解得
$$x_1=2,\ x_2=-6.$$

一般地，像上面这样，在方程 $x^2+4x=12$ 的左边加上一次项系数的一半的平方，再减去这个数，使得含未知数的项在一个完全平方式里，这种做法叫作**配方**. 配方、整理后就可以直接根据平方根的意义来求解了. 这种解一元二次方程的方法叫作**配方法**(solving by completing the sequare).

配方是为了直接运用平方根的意义，从而把一个一元二次方程转化为两个一元一次方程来解.

例 3 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+10x+9=0$；　　(2) $x^2-12x-13=0$.

解 (1) 配方，得

$$x^2+10x+5^2-5^2+9=0,$$

因此 $$(x+5)^2=16.$$

由此得 $$x+5=4 \text{ 或 } x+5=-4.$$

解得 $$x_1=-1,\ x_2=-9.$$

(2) 配方，得

$$x^2-12x+6^2-6^2-13=0,$$

因此 $$(x-6)^2=49.$$

由此得 $$x-6=7 \text{ 或 } x-6=-7.$$

解得 $$x_1=13,\ x_2=-1.$$

练习

1. 填空：

(1) $x^2+4x+1=x^2+4x+$ ____ $-$ ____ $+1=(x+$ ____ $)^2-$ ____；

(2) $x^2-8x-9=x^2-8x+$ ____ $-$ ____ $-9=(x-$ ____ $)^2-$ ____；

(3) $x^2+3x-4=x^2+3x+$ ____ $-$ ____ $-4=(x+$ ____ $)^2-$ ____.

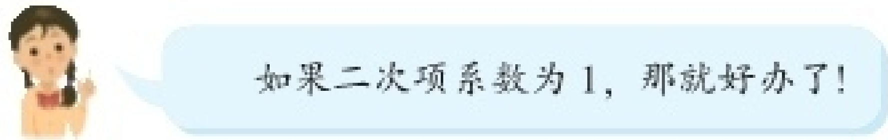
2. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+4x+3=0$；　　(2) $x^2+8x-9=0$；

(3) $x^2+8x-2=0$；　　(4) $x^2-5x-6=0$.

动脑筋

如何用配方法解本章 2.1 节“动脑筋”中的方程②：$25x^2+50x-11=0$ 呢？



由于方程$25x^2+50x-11=0$ 的二次项系数不为 1，为了便于配方，我们可根据等式的性质，在方程两边同除以 25，将二次项系数化为 1，得

$$x^2+2x-\frac{11}{25}=0.$$

配方，得 $$x^2+2x+1^2-1^2-\frac{11}{25}=0,$$

因此 $$(x+1)^2=\frac{36}{25}.$$

由此得 $$x+1=\frac{6}{5}\text{ 或 }x+1=-\frac{6}{5},$$

解得 $$x_1=0.2,\quad x_2=-2.2.$$

对于实际问题的方程②而言，$x_2=-2.2$ 不合题意，应当舍去．而 $x_1=0.2$ 符合题意，因此年平均增长率为 20%.

例 4 用配方法解方程：$4x^2-12x-1=0.$

解 将二次项系数化为 1，得

$$x^2-3x-\frac{1}{4}=0.$$

配方，得 $$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0,$$

因此 $$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4}.$$

由此得 $$x-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}\text{ 或 }x-\frac{3}{2}=-\frac{\sqrt{10}}{2},$$

解得 $$x_1=\frac{3+\sqrt{10}}{2},\quad x_2=\frac{3-\sqrt{10}}{2}.$$

议一议

解方程：$-2x^2+4x-8=0$.

将上述方程的二次项系数化为 1，得 $x^2-2x+4=0$.
将其配方，得 $x^2-2x+1^2-1^2+4=0$，即 $(x-1)^2=-3$.

因为在实数范围内，任何实数的平方都是非负数，因此，$(x-1)^2=-3$ 不成立，即原方程无实数根.

练习

用配方法解下列方程：

(1) $2x^2=3x-1$；

(2) $3x^2+2x-3=0$；

(3) $4x^2-x-9=0$；

(4) $-x^2+4x-12=0$.

2.2.2 公式法

探究

运用配方法解一元二次方程时，我们对于每一个具体的方程，都重复使用了一些相同的计算步骤，这启发我们思考：能不能对一般形式的一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$$

使用配方法，求出这个方程的根呢？

对于方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0), \qquad ①$$

为了便于配方，在方程①的两边同除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

把方程的左边配方，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0,$$

为什么要加上$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$？

因此 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad ②$$

当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，方程②可化为

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2.$$

根据平方根的意义，得

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{或} x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这就将一元二次方程转化为了两个一元一次方程.

解得 $$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

于是，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 在 $b^2-4ac\geqslant 0$ 的条件下，它的根为：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (b^2-4ac\geqslant 0).$$

我们通常把这个式子叫作一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的**求根公式**.

由求根公式可知，一元二次方程的根由方程的系数 a，b，c 决定，这也反映出了一元二次方程的根与系数 a，b，c 之间的一个关系.

今后我们可以运用一元二次方程的求根公式直接求每一个一元二次方程的根，这种解一元二次方程的方法叫作**公式法**(solving by formula).

例 5 用公式法解下列方程：

(1) $x^2-x-2=0$； (2) $x^2-2x=1$.

解 (1) 这里 $a=1$，$b=-1$，$c=-2$.

因而　$b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-2)=1+8=9>0$,

所以　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2\times1}=\dfrac{1\pm3}{2}$.

因此，原方程的根为 $x_1=2$，$x_2=-1$.

（2）移项，得

$$x^2-2x-1=0,$$

这里 $a=1$，$b=-2$，$c=-1$.

因而　$b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-1)=8>0$,

所以　$x=\dfrac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$.

因此，原方程的根为 $x_1=1+\sqrt{2}$，$x_2=1-\sqrt{2}$.

先将方程化为一般形式，再确定 a，b，c 的值.

例 6 用公式法解方程：$9x^2+12x+4=0$.

解　这里 $a=9$，$b=12$，$c=4$.

因而　$b^2-4ac=12^2-4\times9\times4=0$,

所以　$x=\dfrac{-12\pm\sqrt{0}}{2\times9}=-\dfrac{2}{3}$.

因此，原方程的根为 $x_1=x_2=-\dfrac{2}{3}$.

此时方程的两个实数根相等.

练习

用公式法解下列方程：

（1）$x^2-6x+1=0$；　　（2）$2t^2-t=6$；

（3）$4x^2-3x-1=x-2$；　　（4）$3x(x-3)=2(x-1)(x+1)$.

2.2.3 因式分解法

动脑筋

解方程：$x^2-3x=0$.　　①

可以用公式法求解.

方程①的左边提取公因式 x，得 $x(x-3)=0$.

由此得 $x=0$ 或 $x-3=0$.

即 $x_1=0$，$x_2=3$.

若 $ab=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$.

像上面这样，利用因式分解来解一元二次方程的方法叫作**因式分解法**(solving by factorization).

议一议

请用公式法解方程 $x^2-3x=0$，并与上面的因式分解法进行比较，你觉得用哪种方法更简单？

例 7 用因式分解法解下列方程：

(1) $x(x-5)=3x$；　　(2) $2x(5x-1)=3(5x-1)$；

(3) $(35-2x)^2-900=0$.

解 (1) 原方程可化为

$$x^2-8x=0.$$

把方程左边因式分解，得

$$x(x-8)=0,$$

由此得　$x=0$ 或 $x-8=0$.

解得　$x_1=0$，$x_2=8$.

利用因式分解法解一元二次方程的实质也是将一个一元二次方程“降次”，转化为两个一元一次方程.

(2) 原方程可化为

$$2x(5x-1)-3(5x-1)=0.$$

把方程左边因式分解，得

$$(5x-1)(2x-3)=0,$$

由此得　$5x-1=0$ 或 $2x-3=0$.

解得　$x_1=\frac{1}{5}$，$x_2=\frac{3}{2}$.

（3）原方程可化为 $$(35-2x)^2-30^2=0.$$

把方程左边因式分解，得

$$(35-2x+30)(35-2x-30)=0.$$

由此得 $$65-2x=0 \text{ 或 } 5-2x=0.$$

解得 $$x_1=32.5,\ x_2=2.5.$$

例 8 用因式分解法解方程：$x^2-10x+24=0$.

解 配方，得 $$x^2-10x+5^2-5^2+24=0,$$

因而 $$(x-5)^2-1^2=0.$$

把方程左边因式分解，得 $(x-5+1)(x-5-1)=0$,

即 $$(x-4)(x-6)=0,$$

由此得 $$x-4=0 \text{ 或 } x-6=0.$$

解得 $$x_1=4,\ x_2=6.$$

由例 8 可以看出，若我们能把方程 $x^2+bx+c=0$ 的左边进行因式分解后，写成

$$x^2+bx+c=(x-d)(x-h)=0,$$

则 d 和 h 就是方程 $x^2+bx+c=0$ 的根.

反过来，如果 d 和 h 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的根，则方程的左边就可以分解成

$$x^2+bx+c=(x-d)(x-h).$$

练习

1. 用因式分解法解下列方程：

（1）$x^2-7x=0$；　（2）$x(x-3)=5x$；

（3）$4x^2-20x+25=0$；　（4）$(x+1)^2-4=0$.

2. 用因式分解法解下列方程：

（1）$2x(x-1)=1-x$；　（2）$5x(x+2)=4x+8$；

（3）$(x-3)^2-2=0$；　（4）$x^2+6x+8=0$.

我们已经学习了用配方法、公式法和因式分解法解一元二次方程，在具体的问题中，我们要根据方程的特点，选择合适的方法来求解.

议一议

下列方程用哪种方法求解较简便？说说你的理由.

（1）$x^2-4x=0$；（2）$2x^2+4x-3=0$；（3）$x^2+6x+9=16$.

例9 选择合适的方法解下列方程：

（1）$x^2+3x=0$；（2）$5x^2-4x-1=0$；

（3）$x^2+2x-3=0$.

解 （1）将方程左边因式分解，得 $x(x+3)=0$，

由此得 $x=0$ 或 $x+3=0$.

解得 $x_1=0$，$x_2=-3$.

（2）这里 $a=5$，$b=-4$，$c=-1$.

因而 $b^2-4ac=(-4)^2-4\times5\times(-1)=36$，

所以 $x=\dfrac{4\pm\sqrt{36}}{2\times5}=\dfrac{4\pm6}{10}$.

因此，原方程的根为 $x_1=\dfrac{4+6}{10}=1$，$x_2=\dfrac{4-6}{10}=-\dfrac{1}{5}$.

（3）原方程可化为 $x^2+2x+1-4=0$，

即 $(x+1)^2=4$，

由此得 $x+1=2$ 或 $x+1=-2$.

解得 $x_1=1$，$x_2=-3$.

说一说

如何选择合适的方法来解一元二次方程呢？

公式法适用于所有一元二次方程. 因式分解法(有时需要先配方)适用于所有一元二次方程.

配方法是为了推导出求根公式，以及先配方，然后用因式分解法.

总之，解一元二次方程的基本思路都是：将一元二次方程转化为一元一次方程，即**降次**，其本质是把方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的左边的二次多项式分解成两个一次多项式的乘积，即 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 x_1 和 x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

练习

选择合适的方法解下列方程：

(1) $3x^2-4x=2x$；

(2) $\frac{1}{3}(x+3)^2=1$；

(3) $x^2+(\sqrt{3}+1)x=0$；

(4) $x(x-6)=2(x-8)$；

(5) $(x+1)(x-1)=2\sqrt{2}x$；

(6) $x(x+8)=25$；

(7) $(x+2)(x-5)=1$；

(8) $(2x+1)^2=2(2x+1)$.

习题 2.2

A 组

1. 根据平方根的意义解下列方程：

(1) $25x^2-9=0$；

(2) $64-9x^2=0$；

(3) $(3-2x)^2=1$；

(4) $(1-x)^2-3=0$.

2. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+2x-8=0$；

(2) $x^2-7x+6=0$；

(3) $x^2+4x-1=0$.

3. 用配方法解下列方程：

(1) $2x^2-5x+3=0$；

(2) $-3x^2-6x+4=0$；

(3) $4x^2-6x-3=0$.

4. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2-10x+21=0$；　(2) $x^2-3x-1=0$；

(3) $x^2-7x+11=0$；　(4) $-5x^2=2x-1$.

5. 用因式分解法解下列方程：

(1) $6x^2+x=0$；　(2) $0.2t^2-3t=0$；

(3) $x(2-3x)+(3x-2)=0$；　(4) $3(x-5)^2=x^2-25$；

(5) $x^2+3x-28=0$.

6. 已知 $y_1=x^2-2x+3$，$y_2=3x-1$，当 x 为什么值时，y_1 与 y_2 相等？

7. 选择合适的方法解下列方程：

(1) $3x(2x-7)=5x^2$；　(2) $(1-3x)^2=4x^2$；

(3) $(5x-2)^2=3(5x-2)$；　(4) $x^2-9=2\sqrt{3}x$.

B 组

8. 解下列方程：

(1) $(x+1)^2-2(x+1)(2-x)+(2-x)^2=0$；

(2) $(1+2x)^2=(x+4)^2$.

9. 已知关于 x 的方程 $(m+1)x^{m^2+1}+(m-3)x-1=0$.

(1) 当 m 为何值时，它是一元一次方程；

(2) 当 m 为何值时，它是一元二次方程，并求出方程的根.

10. 先化简，再求值：

$$\left(x+1-\frac{3}{x-1}\right)\div\frac{x^2-4x+4}{x-1},$$

其中 x 满足方程：$x^2+x-6=0$.

2.3 一元二次方程根的判别式

议一议

我们在运用公式法求解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 时，总是要求 $b^2-4ac\geqslant 0$. 这是为什么？

将方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 配方后得到

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

由于 $a\neq 0$，所以$4a^2>0$，因此我们不难发现：

（1）当 $b^2-4ac>0$ 时，$\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}>0$.

由于正数有两个平方根，所以原方程的根为

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}，\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

此时，原方程有两个不相等的实数根.

（2）当 $b^2-4ac=0$ 时，$\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=0$.

由于 0 的平方根为 0，所以原方程的根为

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

此时，原方程有两个相等的实数根.

（3）当 $b^2-4ac<0$ 时，$\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}<0$.

由于负数在实数范围内没有平方根，所以原方程没有实数根.

因此，若方程要有实数根，则 b^2-4ac 必须为非负数.

关于在 $b^2-4ac<0$ 时方程的根的情况，我们将在高中阶段学习.

我们把 b^2-4ac 叫作一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的根的**判别式**（discriminant），记作“Δ”，即 $\Delta=b^2-4ac$.

综上可知，我们不难发现一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的根的情况可由 $\Delta=b^2-4ac$ 来判断：

当 $\Delta>0$ 时，原方程有两个不相等的实数根，其根为

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

当 $\Delta=0$ 时，原方程有两个相等的实数根，其根为

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a};$$

当 $\Delta<0$ 时，原方程没有实数根.

例 不解方程，利用判别式判断下列方程根的情况：

（1）$3x^2+4x-3=0$；（2）$4x^2=12x-9$；

（3）$7y=5(y^2+1)$.

解 （1）因为 $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times 3\times(-3)$

$=16+36=52>0$，

所以，原方程有两个不相等的实数根.

（2）将原方程化为一般形式，得

$4x^2-12x+9=0$.

因为 $\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\times 4\times 9$

$=144-144=0$，

所以，原方程有两个相等的实数根.

要先将方程化为一般形式，才能确定 a，b，c 的值.

（3）将原方程化为一般形式，得

$$5y^2-7y+5=0.$$

因为 $\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times 5\times 5$

$=49-100=-51<0$，

所以，原方程没有实数根.

练习

1. 一元二次方程 $x^2-x+1=0$ 的根的情况为（　　）

(A) 有两个相等的实数根　　(B) 有两个不相等的实数根

(C) 只有一个实数根　　(D) 没有实数根

2. 不解方程，利用判别式判断下列方程根的情况：

(1) $x^2+3x-1=0$；　　(2) $x^2-6x+9=0$；

(3) $2y^2-3y+4=0$；　　(4) $x^2+5=2\sqrt{5}x$.

习题 2.3

A 组

1. 一元二次方程 $3x^2-2x-1=0$ 的根的情况为（　　）

(A) 有两个相等的实数根　　(B) 有两个不相等的实数根

(C) 只有一个实数根　　(D) 没有实数根

2. 不解方程，利用判别式判断下列方程根的情况：

(1) $3x^2-4x+1=0$；　　(2) $3x^2-6x+1=0$；

(3) $x(x+8)=16$；　　(4) $(x+2)(x-5)=1$.

B 组

3. 不解方程，利用判别式判断方程

$$x^2-(1+2\sqrt{3})x+3+\sqrt{3}=0$$

的根的情况.

4. 先阅读下面的材料：

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$，如果方程有两个不相等的实数根，那么 $\Delta>0$；如果方程有两个相等的实数根，那么 $\Delta=0$；如果方程没有实数根，那么 $\Delta<0$.

再解答下面的题目：

当 t 取什么值时，关于 x 的一元二次方程 $x^2+x+t=2t-1$，

(1) 有实数根；

(2) 没有实数根.

*2.4 一元二次方程根与系数的关系

我们已经知道，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的根的值由方程的系数 a，b，c 来决定，除此之外，根与系数之间还有什么关系呢？

做一做

（1）先解方程，再填表：

方　程	x_1	x_2	x_1+x_2	$x_1\cdot x_2$
$x^2-2x=0$	0	2		
$x^2+3x-4=0$				
$x^2-5x-6=0$				

由上表猜测：若方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根为 x_1，x_2，则

$$x_1+x_2=\_\_\_\_,\quad x_1\cdot x_2=\_\_\_\_;$$

（2）方程 $x^2-5x+6=0$ 的两个根为 $x_1=$____，$x_2=$____，

根据 2.2 节例 8 下面的一段话，得 $x^2-5x+6=(x-\_\_\_\_)(x-\_\_\_\_)$.

动脑筋

对于方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$，当 $\Delta\geqslant 0$ 时，该方程的根与它的系数之间有什么关系呢？

当 $\Delta\geqslant 0$ 时，设 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的两个根为 x_1，x_2，则

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a(x-x_1)(x-x_2)\\&=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2],\end{aligned}$$

又

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right),$$

* 本节为选学内容.

于是 $$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2.$$

根据七年级上册教科书 2.5 节关于两个多项式相等的规定，得

$$\frac{b}{a}=-(x_1+x_2),\quad \frac{c}{a}=x_1x_2.$$

即

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

这个关系通常被称为韦达定理.

这表明，当 $\Delta\geqslant 0$ 时，一元二次方程的根与系数之间具有如下关系：**两根的和等于一次项系数与二次项系数的比的相反数，两根的积等于常数项与二次项系数的比.**

例 1 根据一元二次方程根与系数的关系，求下列方程的两根 x_1，x_2 的和与积：

（1）$2x^2-3x+1=0$；（2）$x^2-3x+2=10$；

（3）$7x^2-5=x+8$.

解 （1）$x_1+x_2=-\dfrac{-3}{2}=\dfrac{3}{2}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{2}$.

（2）整理，得 $x^2-3x-8=0$，所以

$$x_1+x_2=-(-3)=3,\quad x_1x_2=-8.$$

（3）整理，得 $7x^2-x-13=0$，所以

$$x_1+x_2=-\frac{-1}{7}=\frac{1}{7},\quad x_1x_2=\frac{-13}{7}=-\frac{13}{7}.$$

例 2 已知关于 x 的方程 $x^2+3x+q=0$ 的一个根为 -3，求它的另一个根及 q 的值.

解 设 $x^2+3x+q=0$ 的另一个根为 x_2，则

$$(-3)+x_2=-3.$$

解得 $$x_2=0.$$

由根与系数之间的关系得

$$q=(-3)\times 0=0.$$

因此，方程的另一个根是 0，q 的值为 0.

还可用其他方法求出 q 的值吗?

练习

1. 根据一元二次方程根与系数的关系，求下列方程的两根的和与积：

（1）$x^2-6x+1=0$；（2）$2x^2-x=6$.

2. 已知方程 $3x^2-19x+m=0$ 的一个根为 1，求它的另一个根及 m 的值.

习题 2.4

A 组

1.（1）设方程 $x^2-4x-1=0$ 的两个根为 x_1 与 x_2，则 $x_1x_2=$__________；

（2）设方程 $x^2+5x+6=0$ 的两根为 x_1 与 x_2，则 $x_1+x_2=$__________.

2. 设 x_1，x_2 是方程 $3x^2+2x-3=0$ 的两个根，求下列各式的值：

（1）x_1+x_2；（2）x_1x_2.

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx+3=0$ 的一个根为-1，求它的另一个根及 m 的值.

B 组

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+k+1=0$ 的两个实数根为 x_1，x_2，且 $x_1^2+x_2^2=24$，则 k 的值是多少？

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x-a=0$ 的两个实数根为 x_1，x_2，且 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{2}{3}$，求 a 的值.

2.5 一元二次方程的应用

一元二次方程模型在数学和实际生活中有着广泛的应用.

动脑筋

某省农作物秸秆资源巨大，但合理使用量十分有限，因此该省准备引进适用的新技术来提高秸秆的合理使用率. 若今年的使用率为 40%，计划后年的使用率达到 90%，求这两年秸秆使用率的年平均增长率(假定该省每年产生的秸秆总量不变).

由于今年到后年间隔两年，所以问题中涉及的等量关系是：

$$今年的使用率\times(1+年平均增长率)^2=后年的使用率.$$

设这两年秸秆使用率的年平均增长率为 x，则根据等量关系，可列出方程：

$$40\%(1+x)^2=90\%.$$

整理，得 $(1+x)^2=2.25.$

解得 $x_1=0.5=50\%$，$x_2=-2.5$ (不合题意，舍去).

因此，这两年秸秆使用率的年平均增长率为 50%.

例 1 为执行国家药品降价政策，给人民群众带来实惠，某药品经过两次降价，每瓶零售价由 100 元降为 81 元. 求平均每次降价的百分率.

分析 问题中涉及的等量关系是：

$$原价\times(1-平均每次降价的百分率)^2=现行售价.$$

解 设平均每次降价的百分率为 x，则根据等量关系得

$$100(1-x)^2=81.$$

整理，得 $(1-x)^2=0.81.$

解得 $x_1=0.1=10\%$，$x_2=1.9$(不合题意，舍去).

答：平均每次降价的百分率为 10%.

为什么 $x=1.9$ 不合题意呢?

例 2 某商店从厂家以每件 21 元的价格购进一批商品. 若每件商品的售价为 x 元，则可卖出 $(350-10x)$ 件，但物价局限定每件商品的售价不能超过进价的 120%. 若该商店计划从这批商品中获取 400 元利润(不计其他成本)，问需要卖出多少件商品，此时的售价是多少？

分析 本问题中涉及的等量关系是：(售价 − 进价) × 销售量 = 利润.

解 根据等量关系得

$$(x-21)(350-10x)=400.$$

整理，得 $$x^2-56x+775=0.$$

解得 $$x_1=25，x_2=31.$$

又因为 $21\times120\%=25.2$，即售价不能超过 25.2 元，所以 $x=31$ 不合题意，应当舍去. 故 $x=25$，从而卖出 $350-10x=350-10\times25=100$ (件).

答：该商店需要卖出 100 件商品，且每件商品的售价是 25 元.

议一议

运用一元二次方程模型解决实际问题的步骤有哪些？

练习

1. 某校图书馆的藏书在两年内从 5 万册增加到 7.2 万册，问平均每年藏书增长的百分率是多少？

2. 某品牌服装专营店平均每天可销售该品牌服装 20 件，每件可盈利 44 元. 若每件降价 1 元，则每天可多售出 5 件. 若要平均每天盈利 1 600 元，则应降价多少元？

动脑筋

如图 2-2，在一长为 40 cm、宽为 28 cm 的矩形铁皮的四角截去四个全等的小正方形后，折成一个无盖的长方体形盒子. 若已知长方体形盒子的底面积为 364 cm²，求截去的四个小正方形的边长.

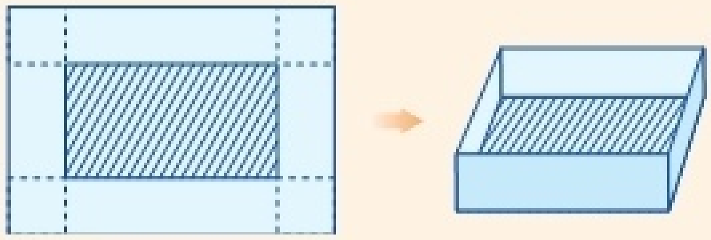


图 2-2

将铁皮截去四个小正方形后，可以得到图 2-3. 这个长方体形盒子的底面就是图 2-3 中的阴影部分，因此本问题涉及的等量关系是：

盒子的底面积 = 盒子的底面长 × 盒子的底面宽.

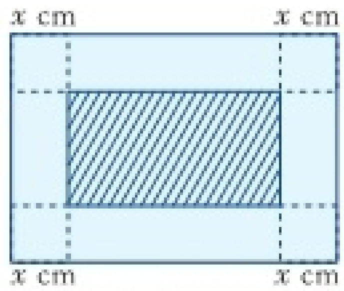


图 2-3

设截去的小正方形的边长为 x cm，则无盖长方体形盒子的底面长与宽分别为 $(40-2x)$ cm，$(28-2x)$ cm. 根据等量关系，可以列出方程

$$(40-2x)(28-2x)=364.$$

整理，得 $$x^2-34x+189=0.$$

解得 $$x_1=27，x_2=7.$$

如果截去的小正方形的边长为 27 cm，那么左下角和右下角的两个小正方形的边长之和为 54 cm，这超过了矩形铁皮的长度(40 cm). 因此 $x_1=27$ 不合题意，应当舍去.

因此，截去的小正方形的边长为 7 cm.

例 3 如图 2-4，一长为 32 m、宽为 20 m 的矩形地面上修建有同样宽的道路(图中阴影部分)，余下部分进行了绿化. 若已知绿化面积为 540 m²，求道路的宽.

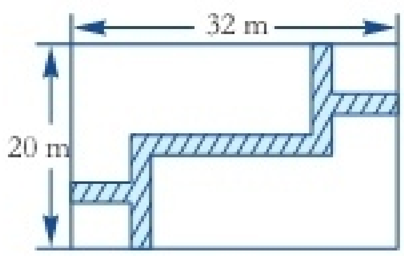


图 2-4

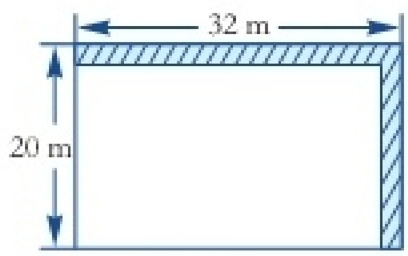


图 2-5

分析 虽然"整个矩形的面积－道路所占面积＝绿化面积"，但道路不是规则图形，因此不便于计算！若把道路平移，则可得到图 2–5，此时绿化部分就成了一个新的矩形了，再由本问题涉及的等量关系：矩形的面积＝矩形的长×矩形的宽，就可建立一个一元二次方程.

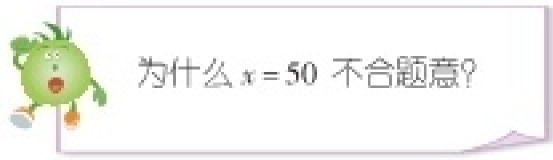
解 设道路宽为 x m，则新矩形的长为 $(32-x)$ m，宽为 $(20-x)$ m.

根据等量关系得 $(32-x)(20-x)=540.$

整理，得 $x^2-52x+100=0.$

解得 $x_1=2$，$x_2=50$（不合题意，舍去）.

答：道路宽为 2 m.



例 4 如图 2–6 所示，在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=6$ cm，$BC=8$ cm. 点 P 沿 AC 边从点 A 向终点 C 以 1 cm/s 的速度移动；同时点 Q 沿 CB 边从点 C 向终点 B 以 2 cm/s 的速度移动，且当其中一点到达终点时，另一点也随之停止移动. 问点 P，Q 出发几秒后，可使△PCQ 的面积为 9 cm²?

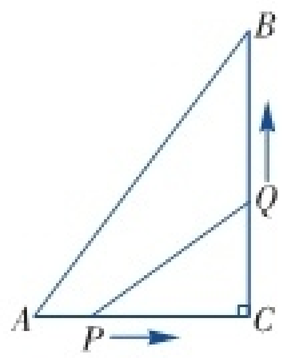


图 2–6

解 设点 P，Q 出发 x s 后可使△PCQ 的面积为 9 cm².

根据题意得 $AP=x$ cm，$PC=(6-x)$ cm，$CQ=2x$ cm.

则由 $S_{\triangle PCQ}=\frac{1}{2}PC\cdot CQ$ 可得

$$\frac{1}{2}\cdot(6-x)\cdot 2x=9.$$

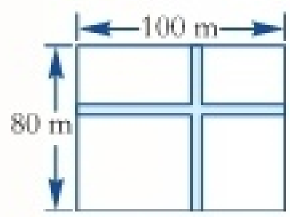
整理，得 $x^2-6x+9=0.$

解得 $x_1=x_2=3.$

答：点 P，Q 同时出发 3 s 后可使△PCQ 的面积为 9 cm².

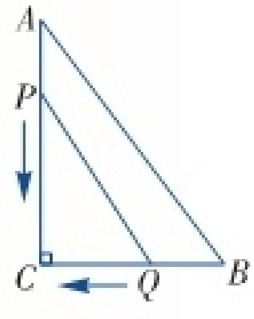
练习

1. 如图，在长为 100 m、宽为 80 m 的矩形地面上要修建两条宽度相等且互相垂直的道路，剩余部分进行绿化. 若要使绿化面积为 7 644 m²，则道路的宽应为多少米?



（第 1 题图）

2. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=8$ cm，$BC=6$ cm. 点 P，Q 同时从 A，B 两点出发，分别沿 AC，BC 向终点 C 移动，它们的速度都是 1 cm/s，且当其中一点到达终点时，另一点也随之停止移动. 问点 P，Q 出发几秒后可使△PCQ 的面积为 Rt△ABC 面积的一半？



(第 2 题图)

习题 2.5

A 组

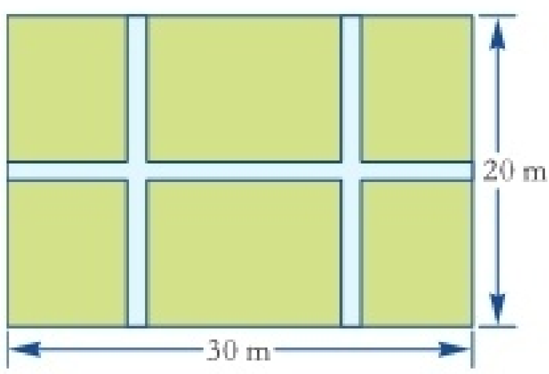
1. 某市政府为落实保障性住房政策，去年已投入 3 亿元资金，并规划投入资金逐年增加，明年将投入 12 亿元资金用于保障性住房建设. 求这两年中投入资金的年平均增长率.

2. 某店只销售某种进价为 40 元/kg 的特产. 已知该店按 60 元/kg 出售时，平均每天可售出 100 kg，后来经过市场调查发现，单价每降低 1 元，则平均每天的销售量可增加 10 kg. 若该店销售这种特产计划平均每天获利2 240 元.

(1) 每千克该种特产应降价多少元？

(2) 为尽可能让利于顾客，则该店应按原售价的几折出售？

3. 某单位准备将院内一块长 30 m、宽 20 m 的长方形空地，建成一个矩形花园，要求在花园中修建两条纵向和一条横向的小道，剩余的地方种植花草，如图所示. 要使种植花草的面积为 532 m²，那么小道进出口的宽度应为多少米？(注：所有小道进出口的宽度相等.)



(第 3 题图)

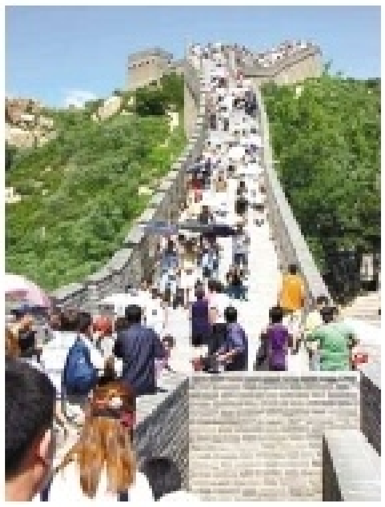
日	一	二	三	四	五	六
			1 建军节	2 十五	3 十六	4 十七
5 十八	6 十九	7 立秋	8 廿一	9 廿二	10 廿三	11 廿四
12 廿五	13 廿六	14 廿七	15 廿八	16 廿九	17 七月	18 初二
19 初三	20 初四	21 初五	22 初六	23 初七	24 初八	25 初九
26 初十	27 十一	28 十二	29 十三	30 十四	31 十五	

(第 4 题图)

4. 如图是某年 8 月的日历表，在此日历表上可以用一个矩形圈出 3×3 个位

置相邻的 9 个数（如 6，7，8，13，14，15，20，21，22）．若圈出的 9 个数中，最大数与最小数的积为 192，求这 9 个数的中的最大数．

B 组



5. 某旅行社在某地组织旅游团到北京旅游参观，每人的交通费、住宿费、门票费等费用共需 3 200 元，如果把每人收费标准定为 4 600 元，那么只有 20 人参加旅游团；高于 4 600 元时，没有人参加；从 4 600 元每降低 100 元，参加人数就增加 10 人．每人收费标准定为多少时，该旅行社从这个旅游团可获取利润 64 000 元？

6.（古代数学问题）直田积八百六十四步，

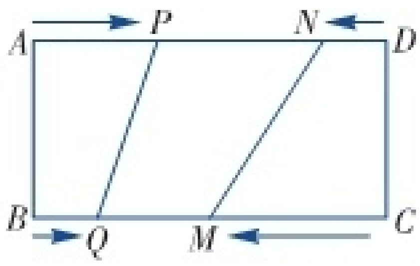
只云长阔共六十步，

问长多阔几何．

——摘自古代数学家杨辉的《田亩比类乘除捷法》

意思是：一块矩形田地的面积为 864 平方步，只知道它的长与宽共 60 步，问它的长比宽多多少步？

7. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$BC=24$ cm，P，Q，M，N 分别从点 A，B，C，D 同时出发，分别沿边 AD，BC，CB，DA 移动，且当有一个点先到达所在边的另一个端点时，其他各点也随之停止移动．已知移动一段时间后，若 $BQ=x$ cm $(x\neq0)$，则 $AP=2x$ cm，$CM=3x$ cm，$DN=x^2$ cm．



（第 7 题图）

（1）当 x 为何值时，P，N 两点重合？

（2）问 Q，M 两点能重合吗？若 Q，M 两点能重合，则求出相应的 x 的值；若 Q，M 两点不能重合，请说明理由．

（3）当 x 为何值时，以 P，Q，M，N 为顶点的四边形是平行四边形？

小结与复习

回顾

1. 什么样的方程是一元二次方程？它的一般形式是什么？

2. 分别举例说明如何运用配方法、公式法、因式分解法解一元二次方程.

3. 如何根据一元二次方程根的判别式来判断方程是否有实根？

***4.** 一元二次方程的根与系数之间有什么关系？

5. 利用一元二次方程模型解决实际问题有哪些步骤？

本章知识结构

- 一元二次方程
  - 一元二次方程的有关概念
  - 一元二次方程的解法
    - 配方法
    - 公式法
    - 因式分解法
  - 一元二次方程根的判别式
  - * 一元二次方程根与系数的关系
  - 一元二次方程的应用

注意

1. 一元二次方程的二次项系数不能为 0.

2. 解一元二次方程的常用方法有配方法、公式法、因式分解法，使用时要根据方程的特征灵活选择合适的方法. 解一元二次方程的基本思路是——降次，其本质是将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$左边的二次多项式进行因式分解，转化为一元一次方程来求解.

3. 建立一元二次方程模型解决实际问题时，要注重对数量关系的抽象和分析，在得到方程的根之后，还需检验所得根是否符合题意. 在这种“问题情境—建立模型—求解验证”的过程中，我们需进一步体会模型思想.

复习题 2

A 组

1. 把下列方程化为一元二次方程的一般形式，并指出其中的二次项系数、一次项系数和常数项.

（1）$5x^2=49$；（2）$6x^2-7x^2=3x+5$；

（3）$0.01t^2-3t=2t-1$；（4）$(2y-1)(2y+5)=6y+4$.

2. 解下列方程：

（1）$49x^2-144=0$；（2）$(1-x)^2=1$；

（3）$x^2+8x+16=0$；（4）$x(7-x)=4x^2$；

（5）$x(x-2)-3x^2=0$；（6）$x^2-4x+4=64$.

3. 解下列方程：

（1）$2x^2-6x-3=0$；（2）$x(x+5)=24$；

（3）$x(x+1)+2(x-1)=0$；（4）$(x-3)^2+2x(x-3)=0$；

（5）$3(x-2)^2=x(x-2)$.

4. 不解方程，利用判别式判断下列方程的根的情况.

（1）$4x^2+6x+9=0$；（2）$y^2=y+5$.

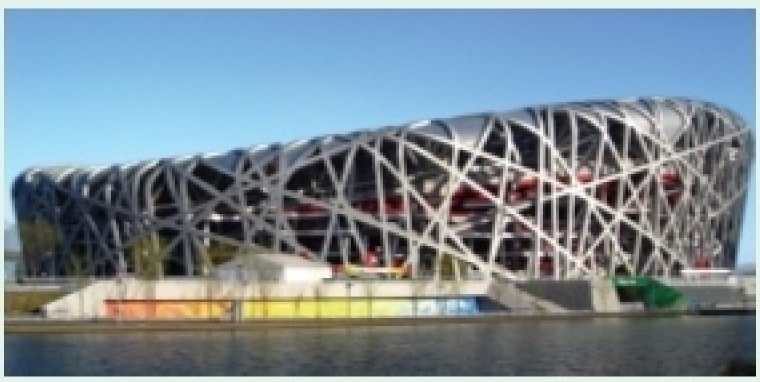
***5.** 设 x_1，x_2 是方程 $2x^2-6x+3=0$ 的两根，求下列各式的值：

（1）x_1+x_2；（2）$x_1 \cdot x_2$；（3）$x_1^2+x_2^2$.

***6.** 若方程 $x^2-3x-1=0$ 的两根为 x_1，x_2，求 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值.

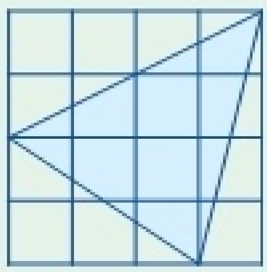
7. 已知三个连续奇数的平方和是 371，求这三个奇数.

8. 北京奥运会的主会场“鸟巢”给世人留下了深刻的记忆. 据了解，在鸟巢设计的最后阶段，经过了两次优化，鸟巢的结构用钢量从最初的 54 000 t 减少到 42 000 t. 求平均每次用钢量降低的百分率 x(精确到 1%).

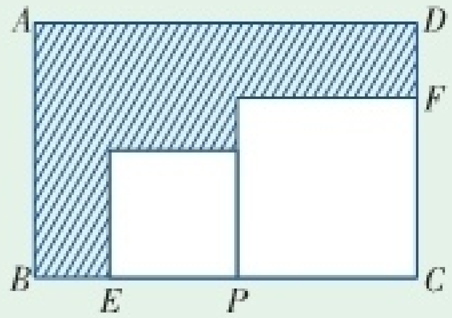


9. 将一块长方形桌布铺在长为 1.5 m、宽为 1 m 的长方形桌面上，各边下垂的长度相同，并且桌布的面积是桌面面积的 2 倍. 求桌布下垂的长度.

10. 如图为一张方格纸，纸上有一三角形(上色部分)，其顶点均位于网格线的交点上. 若上色部分的三角形面积为 15.75 cm^2，则此方格纸的面积为多少？



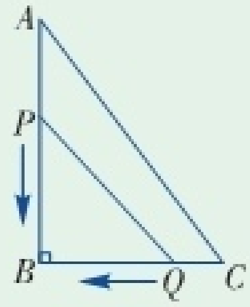
(第 10 题图)



(第 11 题图)

11. 现有一块矩形钢板 $ABCD$，长 $AD=7.5$ m，宽 $AB=5$ m. 在这块钢板上截除两个正方形得到如图所示的模具(阴影部分所示). 已知 $BE=DF$，且模具的面积等于原矩形钢板的面积的一半，求 DF 的长(精确到 0.1 m).

12. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle B=90°$，$AC=10$ cm，$BC=6$ cm. 现有两点 P，Q 分别从点 A 和点 C 同时出发，沿边 AB，CB 向终点 B 移动. 已知点 P，Q 的速度分别为 2 cm/s，1 cm/s，且当其中一点到达终点时，另一点也随之停止移动. 设 P，Q 两点移动时间为 x s. 问是否存在这样的 x，使得四边形 $APQC$ 的面积等于 16 cm^2？若存在，请求出此时 x 的值；若不存在，请说明理由.



(第 12 题图)

B 组

13. 解下列方程：

(1) $(3x+5)^2-6(3x+5)+9=0$；　　(2) $x^2+ax-2a^2=0$ (a 为常数).

14. 已知 a，b，c 分别是△ABC 的三边，其中 $a=1$，$c=4$，且关于 x 的方程 $x^2-4x+b=0$ 有两个相等的实数根，试判断△ABC 的形状.

***15.** 设 x_1，x_2 是关于 x 的方程 $x^2-4x+k+1=0$ 的两个实数根. 请问：是否存在实数 k，使得 $x_1 \cdot x_2 > x_1+x_2$ 成立？试说明理由.

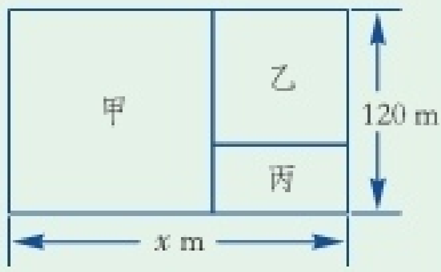
16. 已知▱$ABCD$ 的两邻边 AB，AD 的长是关于 x 的方程 $x^2-mx+\frac{m}{2}-\frac{1}{4}=0$ 的两个实数根.

（1）当 m 为何值时，▱$ABCD$ 是菱形？求出这时菱形的边长；

（2）若 AB 的长为 2，那么▱$ABCD$ 的周长是多少？

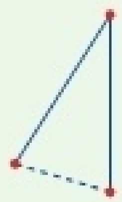
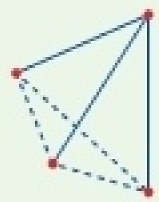
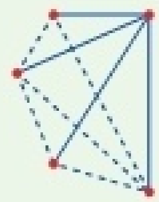
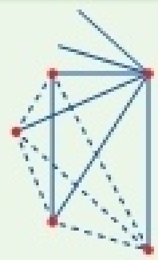
Ⓒ 组

17. 如图，一长方形地，长为 x m，宽为 120 m，建筑商将它分为甲、乙、丙三个区域，甲、乙为正方形. 现计划甲区域建筑住宅区，乙区域建筑商场，丙区域开辟为公园. 若已知丙区域的面积为 3 200 m^2，试求 x 的值.



（第 17 题图）

18. 有如下问题：“平面上，分别有 2 个点，3 个点，4 个点，5 个点，…，n 个点，其中任意 3 个点都不在一条直线上. 经过每两点画一条直线，它们分别可以画多少条直线？”为了解决这一问题，小明设计了如下图表进行探究：

点　数	2	3	4	5	…	n
示意图					…	
直线条数	1	$2+1=\frac{2\times3}{2}$	$3+2+1=\frac{3\times4}{2}$	$4+3+2+1=\frac{4\times5}{2}$	…	______

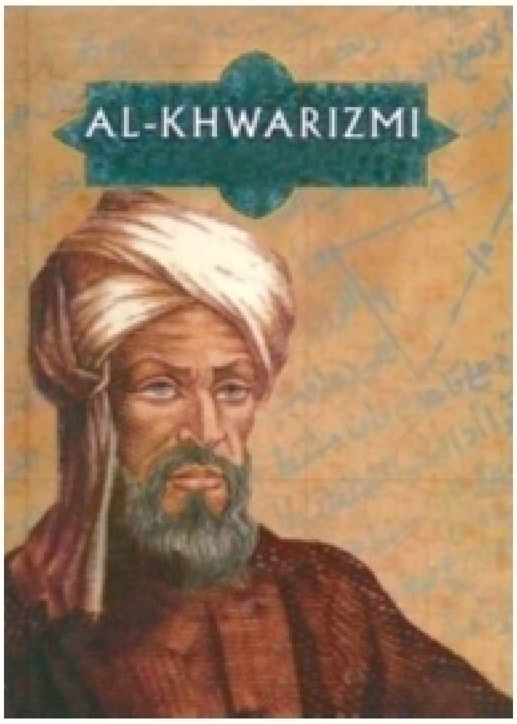
（1）请你帮小明在图表的横线上填上归纳出的一般性结论；

（2）若某人共画了 171 条直线，则该平面上共有多少个点？

数学与文化

花剌子米与《代数学》

阿拉伯数学家阿尔·花剌子米(al-Khwārizmi，约780—约850)是对欧洲数学影响最大的中世纪阿拉伯数学家之一. 他出生于波斯北部的花剌子模(今属乌兹别克斯坦)，后定居巴格达. 他在820年前后所著的《还原与对消计算概要》(*al-Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala*)一书在12世纪被译成拉丁文，在欧洲产生了巨大影响. 阿拉伯语"al-jabr"，意为还原，即移项；"wa'l-muqābala"，意为对消，即同类项合并. 该书传入欧洲后，到14世纪，"al-jabr"演变为拉丁语"algebra"，这就成了今天英文"algebra"(代数)一词的来源，因此花剌子米的这一著作通常也被称为《代数学》.



花剌子米

《代数学》用十分简单、通俗易懂的例题讲述了解方程的一般原理. 正像花剌子米在序言中所说："在这本小小的著作里，我所选取的材料是数学中最容易和最有用途的，是人们在处理下列事物中经常需要的：在继承遗产、分配财产、审理案件、商品交易，以及丈量土地、挖掘沟渠等各种场合中，……"

《代数学》首先指出，该书的主要问题都是由根(x)、平方(x^2)和数(常数)这三者组成. 接着分6章叙述了6种类型的一、二次方程求解问题：

1. 平方等于根，即 $ax^2=bx$ 型；
2. 平方等于数，即 $ax^2=b$ 型；
3. 根等于数，即 $ax=b$ 型；
4. 平方和根等于数，即 $x^2+px=q$ 型；

5. 平方和数等于根，即 $x^2+q=px$ 型；

6. 根和数等于平方，即 $x^2=px+q$ 型.

这 6 种方程的系数都是正数，可统一为以下一般形式：

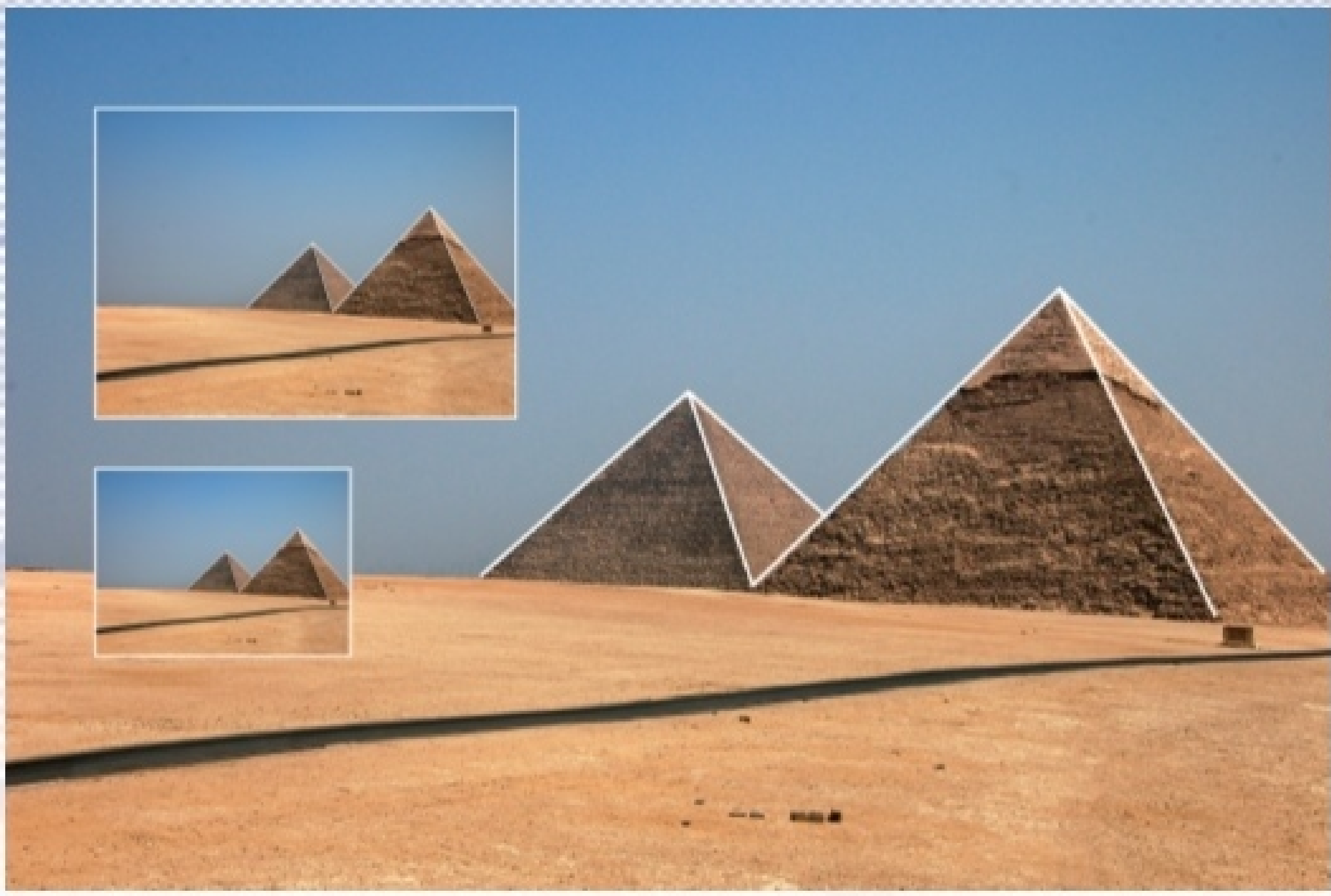
$$x^2+px+q=0.$$

这样，花剌子米相当于获得一般的求根公式

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

花剌子米还指出，任何二次方程都可以通过“还原”和“对消”的步骤化成他所讨论的 6 种类型方程. 由此可见，《代数学》关于方程的讨论已超越传统的算术方式，具有明显的代数意义.

在花剌子米的《代数学》一书中，用代数方式处理了线性方程组与二次方程，第一次给出了一元二次方程的一般代数解法及几何证明，同时又引进了移项、合并同类项等代数运算，这一切为作为“解方程的科学”的代数学开拓了道路. 花剌子米的讲解是如此详尽和系统，使读者很容易掌握其解法. 该书在 1140 年被英国人罗伯特翻译成拉丁文，并作为标准的数学课本在欧洲使用了数百年，这对欧洲数学的发展产生了重要的影响.



第3章

图形的相似

在日常生活中，我们常常看到一些由一个图形按一定的比例放大或缩小得到的图形，例如用一张底片洗出来的大小不同的照片，又如把一个图形通过复印机放大或缩小印出的图形. 我们把一个图形放大(或缩小)得到的图形与原图形称为相似的图形.

如何判断两个三角形是相似三角形呢？相似三角形有哪些性质呢？如何运用这些性质去解决实际问题呢？怎样把图形放大或缩小呢？本章将学习这些新知识.

3.1 比例线段

3.1.1 比例的基本性质

在小学，我们就已经知道，如果两个数的比值与另外两个数的比值相等，就说这四个数成比例.

现在我们学习了实数，把这四个数理解为实数，写成式子就是，如果

$$a:b=c:d \text{ 或 } \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

则称 a，b，c，d 成比例，其中 b，c 称为比例内项，a，d 称为比例外项.

动脑筋

如果四个数 a，b，c，d 成比例，即

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \qquad ①$$

那么 $ad=bc$ 吗？

在①式两边同乘 bd，得

$ad=bc$.

由此得到比例的基本性质：

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$.

说一说

如果 $ad=bc$，其中 a，b，c，d 为非零实数，那么 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 成立吗？

例 1 已知四个非零实数 a，b，c，d 成比例，即 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$. ①

下列各式成立吗？若成立，请说明理由.

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}, \quad ②$$

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}, \quad ③$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}. \quad ④$$

解 由于两个非零数相等，则它们的倒数也相等，

因此，由①式可以立即得到②式，即②式成立.

由①式得 $ad=bc$.

在上式两边同除以 cd，得 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.

在①式两边都加上 1，得

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1.$$

由此得到 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$.

例 2 根据下列条件，求 $a:b$ 的值：

（1）$4a=5b$；（2）$\dfrac{a}{7}=\dfrac{b}{8}$.

解 （1）$\because$ $4a=5b$，$\therefore$ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{4}$.

（2）$\because$ $\dfrac{a}{7}=\dfrac{b}{8}$，$\therefore$ $8a=7b$，$\therefore$ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{7}{8}$.

练习

1. 已知四个数 a，b，c，d 成比例.

（1）若 $a=-3$，$b=9$，$c=2$，求 d；

（2）若 $a=-3$，$b=\sqrt{3}$，$c=2$，求 d.

2. 求下列各式中 x 的值.

（1）$4:15=x:9$；（2）$\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{5}:x$.

3.1.2 成比例线段

做一做

如图 3–1，在方格纸上(设小方格边长为单位 1)有$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，它们的顶点都在格点上. 试求出线段 AB，BC，AC，$A'B'$，$B'C'$，$A'C'$的长度，并计算AB与$A'B'$，BC与$B'C'$，AC与$A'C'$的长度的比值.

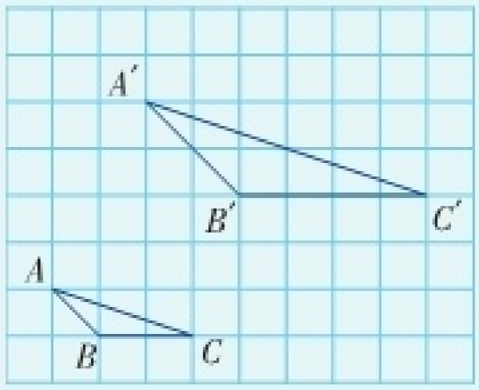
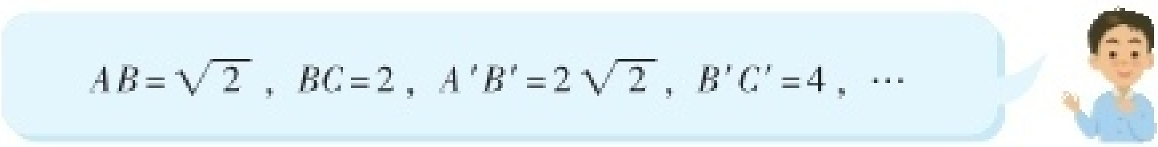
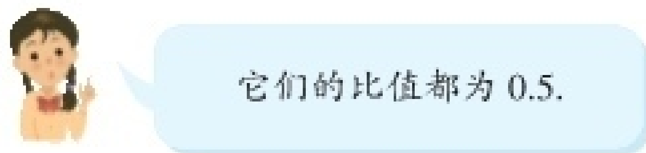


图 3–1





一般地，如果选用同一长度单位量得两条线段 AB，$A'B'$的长度分别为 m，n，那么把它们的长度的比$\frac{m}{n}$叫作这两条线段 AB 与 $A'B'$的**比**(ratio)，记作

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{m}{n}，\quad 或\quad AB:A'B'=m:n.$$

如果$\frac{m}{n}$的比值为 k，那么上述式子也可写成

$$\frac{AB}{A'B'}=k，\quad 或\quad AB=k\cdot A'B'.$$

在图 3–1 中，对于$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，有

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=0.5.$$

在四条线段中，如果其中两条线段的比等于另外两条线段的比，那么这四条线段叫作**成比例线段**，简称为**比例线段**(proportional segments).

例如，已知四条线段 a，b，c，d，若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则 a，b，c，d 是比例线段.

类似地，如果 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，那么称线段 AB，BC，AC 与线段 $A'B'$，$B'C'$，$A'C'$ 对应成比例.

例 3 已知线段 a，b，c，d 的长度分别为 0.8 cm，2 cm，1.2 cm，3 cm，问 a，b，c，d 是比例线段吗？

解 $\because$ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{0.8}{2}=0.4$，$\dfrac{c}{d}=\dfrac{1.2}{3}=0.4$，

$\therefore$ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，即 a，b，c，d 是比例线段.

古希腊数学家、天文学家欧多克索斯(Eudoxus，约前 400—约前 347)曾经提出一个问题：

能否将一条线段 AB 分成不相等的两部分，使较短线段 CB 与较长线段 AC 的比等于线段 AC 与原线段 AB 的比？

即，使得

$$\frac{CB}{AC}=\frac{AC}{AB} \qquad ①$$

成立？如果这能做到的话，那么称线段 AB 被点 C **黄金分割**(golden section)，点 C 叫作线段 AB 的**黄金分割点**，较长线段 AC 与原线段 AB 的比叫作**黄金分割比**.

运用一元二次方程的知识，可以求出黄金分割比的数值[①].

如图 3-2，设线段 AB 的长度为 1 个单位，点 C 为线段 AB 上一点，且 AC 的长度为 x 个单位，则 CB 的长度为 $(1-x)$ 个单位. 根据①式，列出方程：

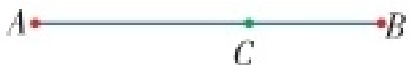


图 3-2

$$\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1}. \qquad ②$$

由于 $x\neq 0$，因此方程②两边同乘 x，得

$$1-x=x^2,$$

即

$$x^2+x-1=0.$$

解得

$$x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}，x_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}(舍去).$$

① 本书中有少量用仿宋体排印的内容，这些内容为选学内容.

因此，$\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$.

事实上，我们一定可以把一条线段黄金分割，黄金分割比为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，它约等于 0.618.

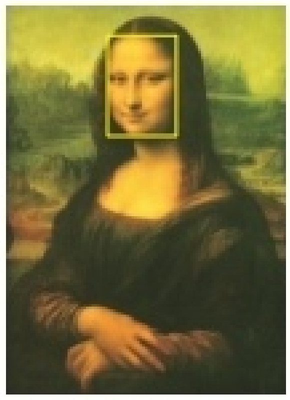
视觉生理学的研究成果表明，符合黄金分割的比例形式很容易使人产生视觉上的美感. 许多世界著名古建筑物中都包含有“黄金分割比”，例如古希腊的巴台农神庙、印度泰姬陵、法国巴黎圣母院这些著名建筑的正面高度与底部宽度之比均约为黄金分割比.

巴台农神庙

泰姬陵

在现代，许多建筑的设计中也采用了黄金分割，例如，上海的东方明珠广播电视塔的上球体就处于整个塔身高度的黄金分割处.

神奇的“黄金分割比”也出现在许多著名艺术作品中，如在意大利著名画家达·芬奇的名作《蒙娜丽莎》中，人物的脸的宽度与高度的比就是一个黄金分割比.



蒙娜丽莎

练习

1. 已知 a，b，c，d 是比例线段.

(1) 若 $a=0.8$ cm，$b=1$ cm，$c=1$ cm，求 d；

(2) 若 $a=12$ cm，$c=3$ cm，$d=15$ cm，求 b；

(3) 若 $a=5$ cm，$b=4$ cm，$d=8$ cm，求 c.

2. 在比例尺 1∶1 000 000 的地图上，量得 A，B 两地的距离是 25 cm. 求 A，B 两地之间的实际距离.

习题 3.1

A 组

1. 求下列各式中 x 的值.

（1）$5:7=15:x$；　　（2）$144:5=x:25$；

（3）$52:x=26:8$；　　（4）$x:13=65:78$.

2. 已知 a，b，c，d 是比例线段.

（1）若 $a=2$，$b=3$，$c=4$，求 d；

（2）若 $a=1.5$，$c=2.5$，$d=4.5$，求 b；

（3）若 $a=1.1$，$b=2.2$，$d=4.4$，求 c.

3. 甲、乙两地的实际距离为 680 km，在某地图上量得这两地的距离为 17 cm，求该地图的比例尺.

4. 如图，节目主持人在主持节目时，站在舞台的黄金分割点处最自然得体. 若舞台 AB 长为 20 m，则主持人站在离 A 点多远处最自然得体？(结果精确到 0.1 m)

(第 4 题图)

B 组

5. 已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{5}{7}$，求 $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ $(b+d+f\neq 0)$ 的值.

6. 如图，对于一条给定的线段 AB，找出它的黄金分割点的作法如下：

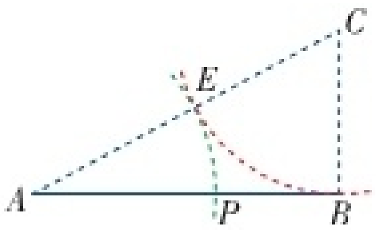
（1）过点 B 作 AB 的垂线，并在垂线上取 $BC=\frac{1}{2}AB$；

（2）连接 AC，以点 C 为圆心，CB 为半径画弧，交 AC 于点 E；

（3）以点 A 为圆心，AE 为半径画弧，交 AB 于点 P.

则点 P 为所求作的线段 AB 的黄金分割点.

按照上述方法，试找出一条线段的黄金分割点.

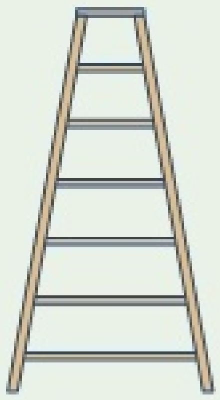


(第 6 题图)

3.2 平行线分线段成比例

观察

图 3-3 是一架梯子的示意图. 由生活常识可以知道：AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 互相平行，且若 $AB=BC$，则 $A_1B_1=B_1C_1$. 由此可以猜测：若两条直线被一组平行线所截，如果在其中一条直线上截得的线段相等，那么在另一条直线上截得的线段也相等. 这个猜测是真的吗？



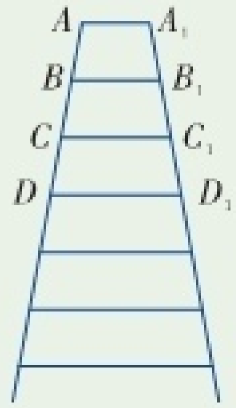


图 3-3

如图 3-4，已知直线 $a /\!/ b /\!/ c$，直线 l_1，l_2 被直线 a，b，c 截得的线段分别为 AB，BC 和 A_1B_1，B_1C_1，且 $AB=BC$.

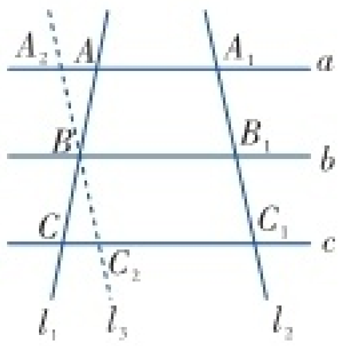


图 3-4

过点 B 作直线 $l_3 /\!/ l_2$，分别与直线 a，c 相交于点 A_2，C_2. 由于 $a /\!/ b /\!/ c$，$l_3 /\!/ l_2$，因此由“夹在两平行线间的平行线段相等”可知，

$$A_2B=A_1B_1,\ BC_2=B_1C_1.$$

在 $\triangle BAA_2$ 和 $\triangle BCC_2$ 中，

$$\angle ABA_2=\angle CBC_2,\ BA=BC,\ \angle BAA_2=\angle BCC_2,$$

因此　$\triangle BAA_2 \cong \triangle BCC_2$.

从而　$BA_2=BC_2$,

所以　$A_1B_1=B_1C_1$.

由此可以得到：**两条直线被一组平行线所截，如果在其中一条直线上截得的线段相等，那么在另一条直线上截得的线段也相等.**

动脑筋

如图 3-5，任意画两条直线 l_1，l_2，再画三条与 l_1，l_2 相交的平行直线 a，b，c. 分别度量 l_1，l_2 被直线 a，b，c 截得的线段 AB，BC，A_1B_1，B_1C_1 的长度. $\dfrac{AB}{BC}$ 与 $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}$ 相等吗？任意平移直线 c，再度量 AB，BC，A_1B_1，B_1C_1 的长度，$\dfrac{AB}{BC}$ 与 $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}$ 还相等吗？

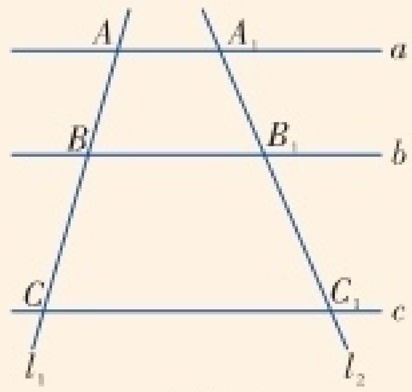


图 3-5

$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

下面我们来证明：

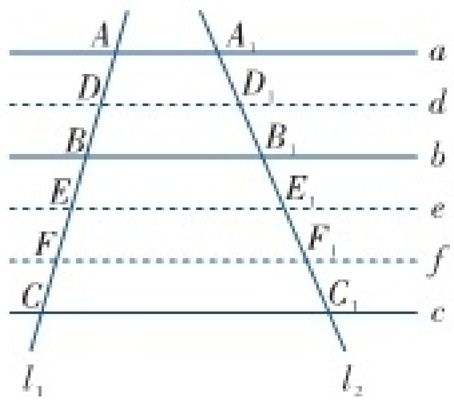


图 3-6

假设 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{3}$，则把线段 AB 二等分，分点为 D，过点 D 作直线 $d/\!/a$，交 l_2 于点 D_1，如图 3-6.

把线段 BC 三等分，三等分点为 E，F，分别过点 E，F 作直线 $e/\!/a$，$f/\!/a$，分别交 l_2 于点 E_1，F_1.

由已知 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{3}$，得 $\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{3}BC$.

由于 $AD=DB=\dfrac{1}{2}AB$，$BE=EF=FC=\dfrac{1}{3}BC$，

因此 $AD=DB=BE=EF=FC$.

由于 $a/\!/d/\!/b/\!/e/\!/f/\!/c$，因此 $A_1D_1=D_1B_1=B_1E_1=E_1F_1=F_1C_1$.

从而 $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}=\dfrac{2A_1D_1}{3B_1E_1}=\dfrac{2}{3}$.

类似地，可以证明：直线 $a/\!/b/\!/c$，直线 l_1，l_2 被直线 a，b，c 截得的线段分别为 AB，BC 和 A_1B_1，B_1C_1，若 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{m}{n}$（其中 m，n 是正整数），则 $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}=\dfrac{m}{n}$. 进一步可以证明，若 $\dfrac{AB}{BC}=k$（其中 k 为无理数），则 $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}=k$.

从而 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

我们还可以得到：

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B_1C_1}{A_1B_1},\ \frac{AB}{AC}=\frac{A_1B_1}{A_1C_1},\ \frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{A_1C_1}.$$

由此，得到以下基本事实：

两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例.

我们把以上基本事实简称为**平行线分线段成比例**.

动脑筋

如图 3-7，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $DE \parallel BC$，则 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 和 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ 成立吗？为什么？

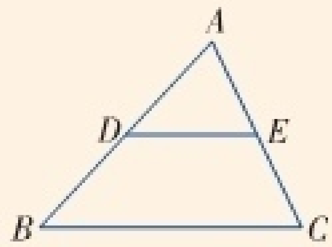


图 3-7

如图 3-8，过点 A 作直线 MN，使 $MN \parallel DE$.

$\because$ $DE \parallel BC$，

$\therefore$ $MN \parallel DE \parallel BC$.

因此 AB，AC 被一组平行线 MN，DE，BC 所截，则由平行线分线段成比例可知，

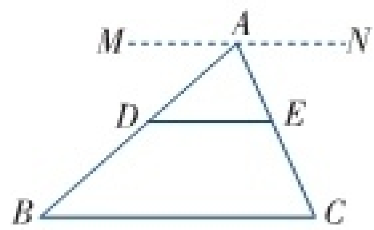


图 3-8

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC},\ \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}.$$

同时还可以得到 $$\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE},\ \frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}.$$

由此得到以下结论：

平行于三角形一边的直线截其他两边，所得的对应线段成比例.

例 如图 3-9，已知 $AA_1 /\!/ BB_1 /\!/ CC_1$，$AB=2$，$BC=3$，$A_1B_1=1.5$，求B_1C_1 的长.

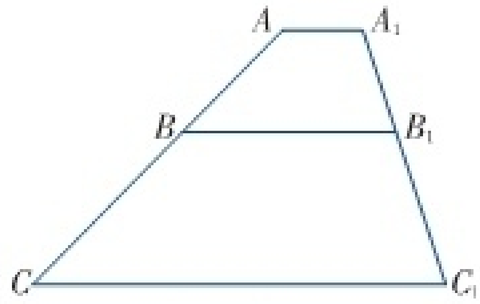


图 3-9

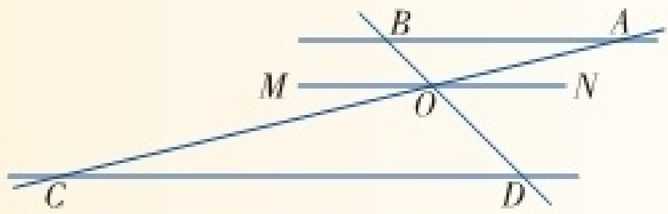
解 由平行线分线段成比例可知，

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}，即\frac{2}{3}=\frac{1.5}{B_1C_1}，$$

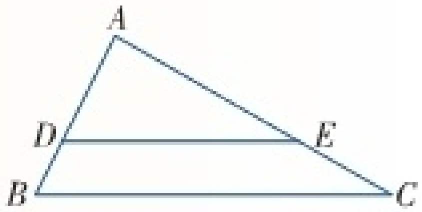
因此，$B_1C_1=\dfrac{3\times1.5}{2}=2.25$.

练习

1. 如图，AC，BD 相交于点 O，直线 MN 过点 O，且 $BA /\!/ MN /\!/ CD$. 已知 $OA=3$，$OB=1$，$OD=2$，求 OC 的长.



(第 1 题图)



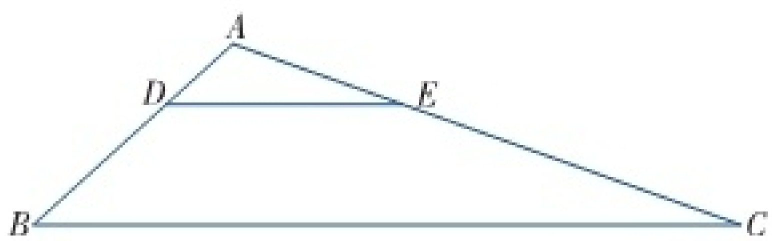
(第 2 题图)

2. 如图，点 D，E 分别在$\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上，且 $DE /\!/ BC$. 若$AB=3$，$AD=2$，$EC=1.8$，求 AC 的长.

习题 3.2

A 组

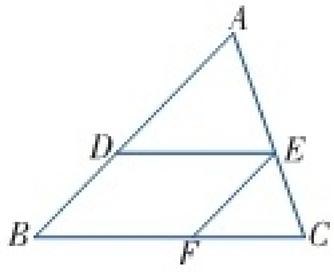
1. 如图，$DE /\!/ BC$，且 $DB=AE$，若 $AB=5$，$AC=10$，求 AE 的长.



(第 1 题图)

2. 如图，点 D，E，F 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC，BC 上，且 $DE /\!/ BC$，$EF /\!/ AB$.

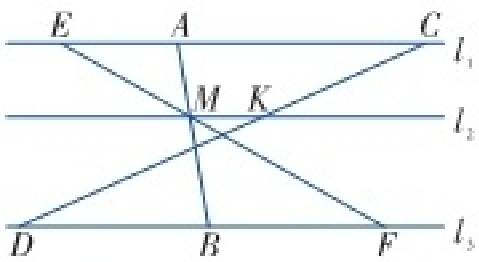
求证：$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{BF}{BC}$.



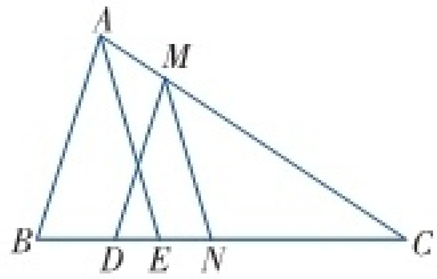
（第 2 题图）

B 组

3. 如图，$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，直线 l_2 与 AB，CD 分别相交于点 M，K，过点 M 的直线 EF 分别与直线 l_1，l_3 相交于点 E，F. 已知 $AM=2$，$MB=3$，$EM=4$，$CD=12$，求 FM，CK，DK 的长.



（第 3 题图）



（第 4 题图）

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任取两点 D，E，过点 D 作 AB 的平行线交 AC 于点 M，连接 AE，过点 M 作 AE 的平行线交 BC 于点 N.

求证：$\dfrac{CB}{CD}=\dfrac{CE}{CN}$.

3.3 相似图形

观察

图 3-10 和图 3-11 的两组图，它们分别是由其中的一幅图放大或缩小得到的. 把一个图形放大(或缩小)得到的图形与原图形之间有什么关系呢？

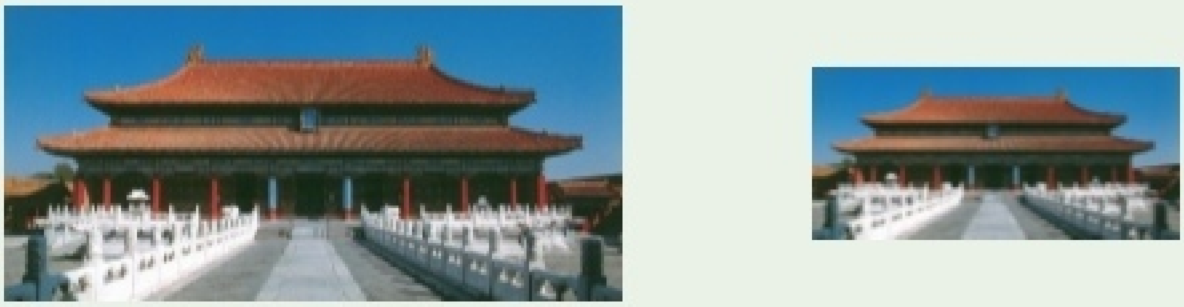


图 3-10

图 3-11

直观上，把一个图形放大(或缩小)得到的图形与原图形是**相似的**.

因此，图 3-10 和图 3-11 中的两组图形分别是相似的.

在两个大小不相等的相似图形中，我们可以认为大的图形是由小的图形放大而成，或小的图形是由大的图形缩小而成.

日常生活中，常常需要将一个图形按一定的比例放大或缩小，但不能改变其形状，如制作不同尺寸的国际海事信号旗时，旗的形状是相同的，但大小不一样.

代表数字“3”的国际海事信号旗

动脑筋

你的两块三角板是不是相似？和同学的有没有相似的？与老师的呢？实际生活中还有哪些三角形是相似的？

图 3-12 中，右边的$\triangle A'B'C'$是由左边的$\triangle ABC$放大得到的. 这两个三角形相似吗？分别度量它们的三个角和三条边，它们的对应角相等吗？对应边成比例吗？

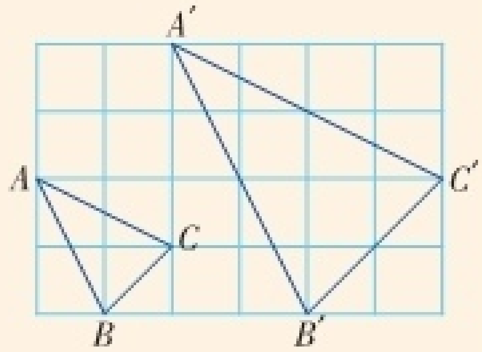
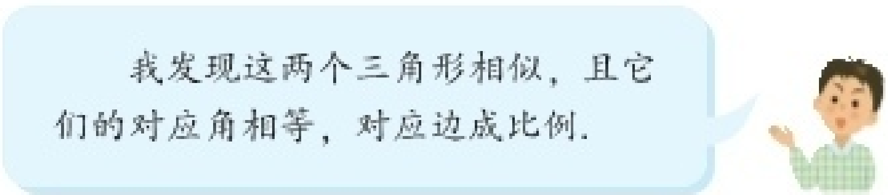


图 3-12



由此可以得到相似三角形的性质：**相似三角形的对应角相等，对应边成比例.**

反过来，我们把三个角对应相等，且三条边对应成比例的两个三角形叫作**相似三角形**(similar triangles).

如果$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似，且点A'，B'，C'分别与点A，B，C对应，

则记作：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

读作：$\triangle ABC$相似于$\triangle A'B'C'$.

相似三角形的对应边的比叫作**相似比**(similar ratio).

一般地，若$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的相似比为k，则$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的相似比为$\frac{1}{k}$.

特别地，如果相似比$k=1$，则$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. 因此，三角形全等是三角形相似的特例.

例 如图 3-13，已知$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，且$\angle A=48°$，$AB=8$，$A'B'=4$，$AC=6$. 求$\angle A'$的大小和$A'C'$的长.

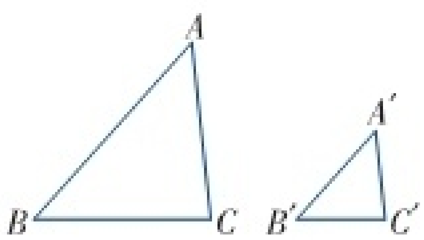


图 3-13

解 $\because$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

$\therefore\quad \angle A=\angle A',\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

又　$\angle A=48°$，$AB=8$，$A'B'=4$，$AC=6$，

$\therefore\quad \angle A'=48°$，$\dfrac{8}{4}=\dfrac{6}{A'C'}$，即 $A'C'=3$.

类似地，对于两个边数相同的多边形，如果它们的对应角相等、对应边成比例，那么这两个多边形叫作**相似多边形**(similar polygons)．相似多边形的对应边的比也叫作**相似比**.

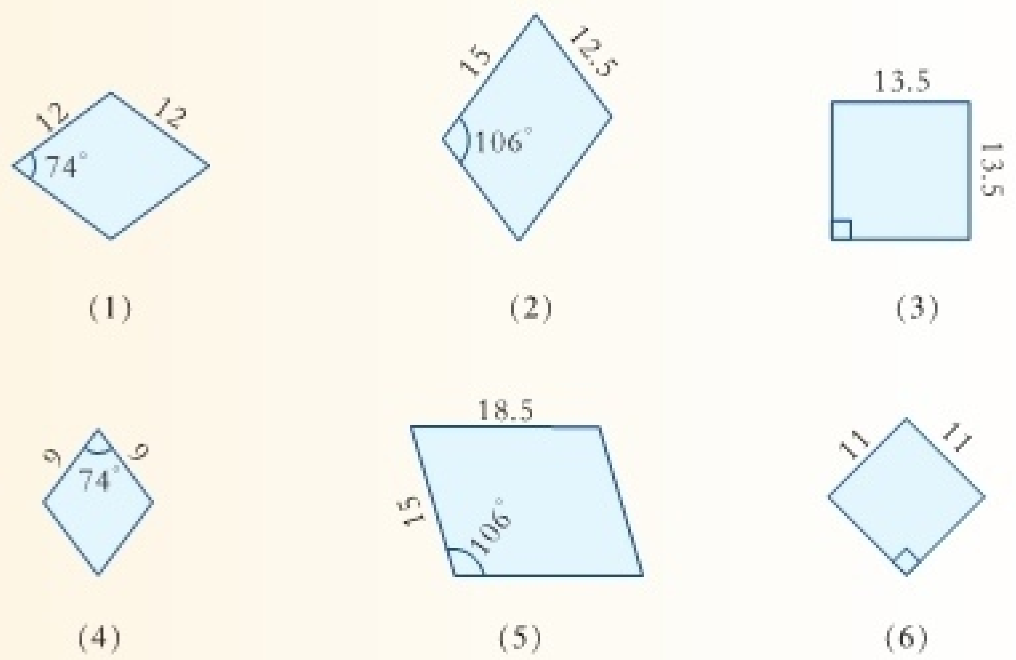
如果四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似，且点 A，B，C，D 分别与点 A_1，B_1，C_1，D_1 对应，则记作："四边形 $ABCD\backsim$四边形 $A_1B_1C_1D_1$".

对于相似多边形，有：**相似多边形的对应角相等，对应边成比例.**

练习

1. 已知$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，点 A，D，E 分别与点 A，B，C 对应，且相似比为$\dfrac{2}{5}$. 若 $DE=4$ cm，求 BC 的长.

2. 下列六个平行四边形中，哪些是相似的？

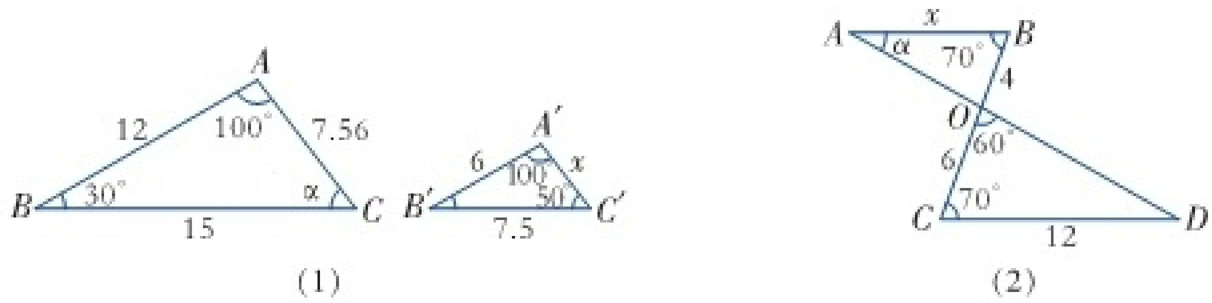


(第 2 题图)

习题 3.3

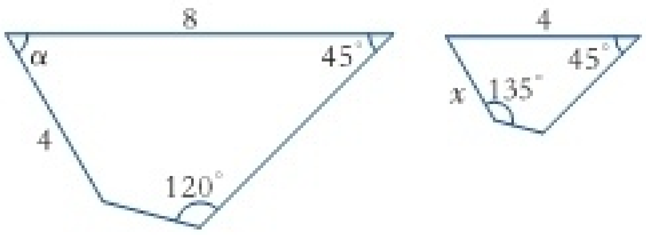
A 组

1. 在下面两组图形中，每组的两个三角形相似，试分别确定 α，x 的值.



(第 1 题图)

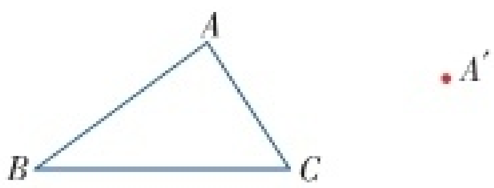
2. 如图，已知两个四边形相似，试分别确定 α，x 的值.



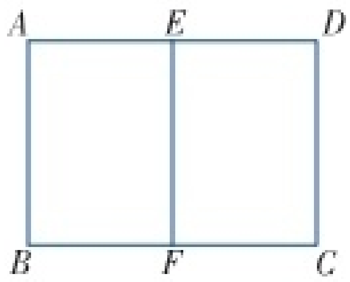
(第 2 题图)

B 组

3. 如图，把图中△ABC 平移，使顶点 A 移到点 A'处，得到△$A'B'C'$；把△$A'B'C'$绕顶点 A'旋转 90°，得到△$A'B''C''$；以点 A'为一个顶点画△$A'DE$，使边 $A'D$，$A'E$ 的长分别为边 $A'B''$，$A'C''$的长的$\frac{1}{2}$，且点 D，E 分别在边 $A'B''$，$A'C''$上. 问画出的△$A'DE$ 与△ABC 是相似图形吗？



(第 3 题图)



(第 4 题图)

4. 如图，E，F 分别为矩形 $ABCD$ 的边 AD，BC 的中点. 若矩形 $ABCD$ 与矩形 $EABF$ 相似，$AB=1$，求矩形 $ABCD$ 的面积.

3.4 相似三角形的判定与性质

3.4.1 相似三角形的判定

在八年级上册，我们已经探讨了两个三角形全等的条件，下面我们来探讨两个三角形相似的条件.

为了研究满足什么条件的两个三角形相似，我们先来研究下述问题.

动脑筋

如图 3-14，在$\triangle ABC$中，D 为 AB 上任意一点. 过点 D 作 BC 的平行线 DE，交 AC 于点 E.

(1) $\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 的三个角分别相等吗？

(2) 分别度量$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 的边长，它们的边长是否对应成比例？

(3) $\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 之间有什么关系？平行移动 DE 的位置，你的结论还成立吗？

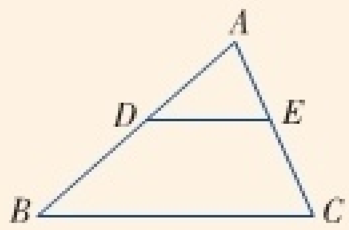
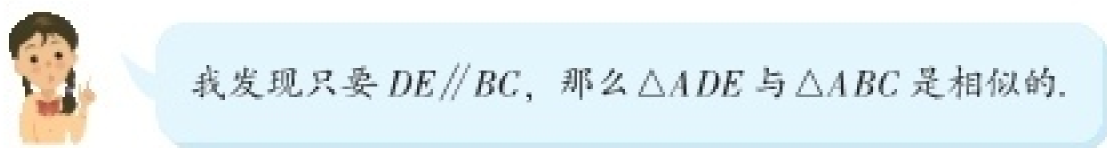


图 3-14



下面我们来证明：

在$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 中，$\angle A = \angle A$.

$\because$ $DE \parallel BC$，

$\therefore$ $\angle ADE = \angle B$，$\angle AED = \angle C$.

如图 3-15，过点 D 作 $DF \parallel AC$，交 BC 于点 F.

$\because$ $DE \parallel BC$，$DF \parallel AC$，

$\therefore$ $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$，$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{CF}{CB}$.

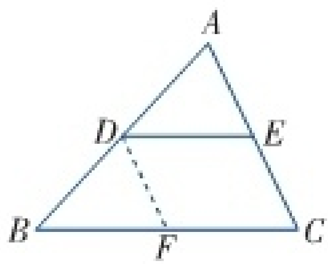


图 3-15

∵　四边形 $DFCE$ 为平行四边形，

∴　$DE=FC$.

∴　$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$.

∴　$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

由此得到如下结论：

平行于三角形一边的直线与其他两边相交，截得的三角形与原三角形相似.

例 1 如图 3–16，在 $\triangle ABC$ 中，已知点 D，E 分别是 AB，AC 边的中点.

求证：$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

证明　∵　点 D，E 分别是 AB，AC 边的中点，

∴　$DE /\!/ BC$.

∴　$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

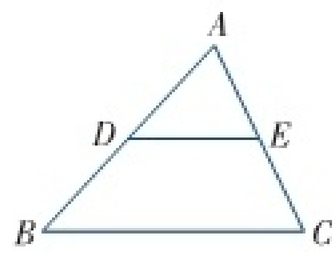


图 3–16

例 2 如图 3–17，点 D 为 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点，过点 D 作 $DE /\!/ BC$，交边 AC 于点 E. 延长 DE 至点 F，使 $DE=EF$.

求证：$\triangle CFE \backsim \triangle ABC$.

证明　∵　$DE /\!/ BC$，点 D 为 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点，

∴　$AE=CE$.

又　$DE=FE$，$\angle AED=\angle CEF$，

∴　$\triangle ADE \cong \triangle CFE$.

∵　$DE /\!/ BC$，

∴　$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

∴　$\triangle CFE \backsim \triangle ABC$.

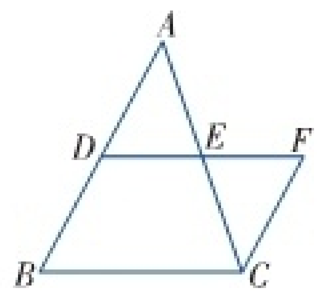
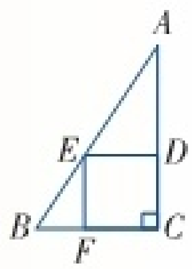


图 3–17

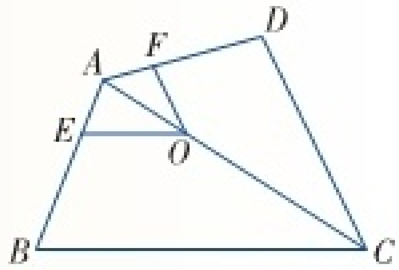
练习

1. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$. 正方形 $EFCD$ 的三个顶点 E，F，D 分别在边 AB，BC，AC 上. 已知 $AC=7.5$，$BC=5$，求正方形的边长.



（第 1 题图）

2. 如图，已知点 O 在四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 上，$OE // CB$，$OF // CD$. 试判断四边形 $AEOF$ 与四边形 $ABCD$ 是否相似，并说明理由.



（第 2 题图）

动脑筋

任意画 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$，使 $\angle A = \angle A'$，$\angle B = \angle B'$.

（1）$\angle C = \angle C'$ 吗？

（2）分别度量这两个三角形的边长，它们是否对应成比例？

（3）把你的结果与同学交流，你们的结论相同吗？由此你有什么发现？

我发现这两个三角形是相似的.

下面我们来证明：

如图 3–18，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，已知 $\angle A = \angle A'$，$\angle B = \angle B'$.

在 $\triangle A'B'C'$ 的边 $A'B'$ 上取一点 D，使 $A'D = AB$. 过点 D 作 $DE // B'C'$，交 $A'C'$ 于点 E.

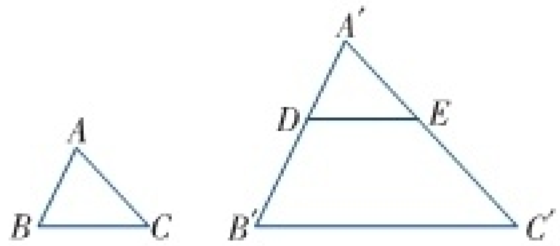


图 3–18

在 $\triangle A'DE$ 与 $\triangle ABC$ 中，

$\because$ $\angle A' = \angle A$，$A'D = AB$，

$\angle A'DE = \angle B' = \angle B$，

$\therefore$ $\triangle A'DE \cong \triangle ABC$.

又 $DE // B'C'$，

$\therefore$ $\triangle A'DE \backsim \triangle A'B'C'$.

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

由此得到相似三角形的判定定理 1：

两角分别相等的两个三角形相似.

例 3 如图 3-19，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$. 过点D分别作边AB，BC的垂线，垂足分别为点E，F，DF与AB交于点H. 求证：$\triangle DEH \backsim \triangle BCA$.

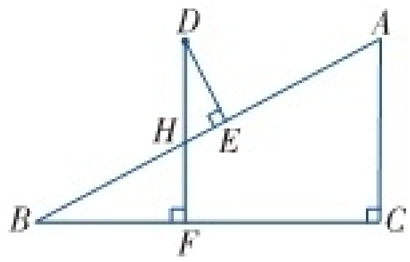


图 3-19

证明 $\because$ $\angle C=90°$，$\therefore$ $AC\perp BC$.

$\because$ $DF\perp BC$，$\therefore$ $DF/\!/AC$.

$\therefore$ $\angle BHF=\angle A$， 而 $\angle BHF=\angle DHE$，

$\therefore$ $\angle DHE=\angle A$.

又 $DE\perp AB$，$\therefore$ $\angle DEH=90°=\angle C$，

$\therefore$ $\triangle DEH\backsim\triangle BCA$（两角分别相等的两个三角形相似）.

例 4 如图 3-20，在 $Rt\triangle ABC$ 与 $Rt\triangle DEF$ 中，$\angle C=90°$，$\angle F=90°$. 若$\angle A=\angle D$，$AB=5$，$BC=4$，$DE=3$，求EF的长.

解 $\because$ $\angle C=90°$，$\angle F=90°$，$\angle A=\angle D$，

$\therefore$ $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

$\therefore$ $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}$.

又 $AB=5$，$BC=4$，$DE=3$，

$\therefore$ $EF=2.4$.

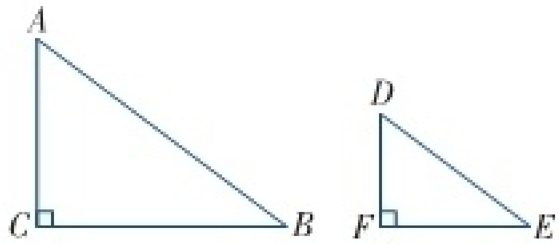
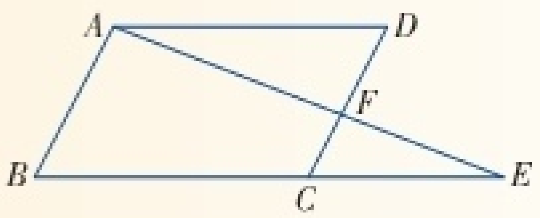


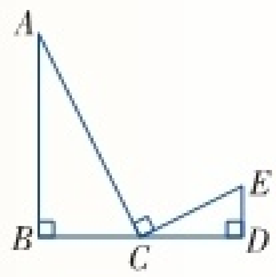
图 3-20

练习

1. 如图，点E为$\square ABCD$的边BC延长线上一点，连接AE，交CD于点F. 请指出图中有几对相似三角形，并说明理由.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，$AB\perp BD$，$ED\perp BD$，点C是线段BD的中点，且$AC\perp CE$. 已知$ED=1$，$BD=4$，求AB的长.

动脑筋

任意画$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，使$\angle A=\angle A'$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=k$.

（1）分别度量$\angle B$和$\angle B'$，$\angle C$和$\angle C'$的大小，它们分别相等吗？

（2）分别量出BC和$B'C'$的长，它们的比等于k吗？

（3）改变$\angle A$或k的大小，你的结论相同吗？由此你有什么发现？

我发现这两个三角形是相似的.

下面我们来证明：

如图 3–21，在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，已知$\angle A=\angle A'$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$.

在$\triangle A'B'C'$的边$A'B'$上取一点D，使$A'D=AB$. 过点D作$DE/\!/B'C'$，交$A'C'$于点E.

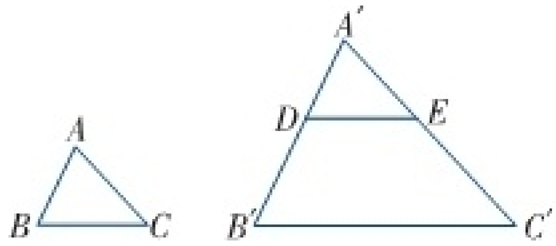


图 3–21

$\because$ $DE/\!/B'C'$，

$\therefore$ $\triangle A'DE\backsim\triangle A'B'C'$.

$\therefore$ $\frac{A'D}{A'B'}=\frac{A'E}{A'C'}$.

又 $A'D=AB$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$，

$\therefore$ $\frac{A'D}{A'B'}=\frac{A'E}{A'C'}=\frac{AC}{A'C'}$.

$\therefore$ $A'E=AC$.

$\because$ $\angle A'=\angle A$，

$\therefore$ $\triangle A'DE\cong\triangle ABC$.

$\therefore$ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

由此得到相似三角形的判定定理 2：

两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

例 5 如图 3-22，在$\triangle ABC$与$\triangle DEF$中，已知$\angle C=\angle F=70^\circ$，$AC=3.5$ cm，$BC=2.5$ cm，$DF=2.1$ cm，$EF=1.5$ cm.

求证：$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

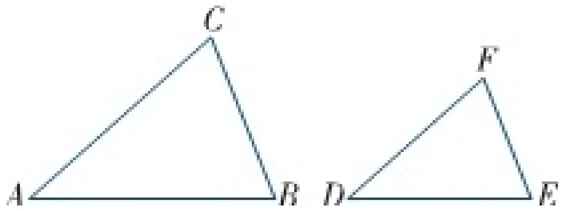


图 3-22

证明 $\because$ $AC=3.5$ cm，$BC=2.5$ cm，

$DF=2.1$ cm，$EF=1.5$ cm，

$\therefore$ $\dfrac{DF}{AC}=\dfrac{2.1}{3.5}=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{1.5}{2.5}=\dfrac{3}{5}$，

$\therefore$ $\dfrac{DF}{AC}=\dfrac{EF}{BC}$.

又 $\angle C=\angle F=70^\circ$，

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$（两边成比例且夹角相等的两个三角形相似）.

例 6 如图 3-23，在$\triangle ABC$中，CD是边AB上的高，且$\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{CD}{BD}$.

求证：$\angle ACB=90^\circ$.

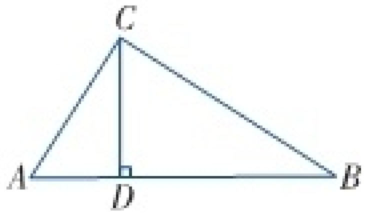


图 3-23

证明 $\because$ CD是边AB上的高，

$\therefore$ $\angle ADC=\angle CDB=90^\circ$.

又 $\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{CD}{BD}$，

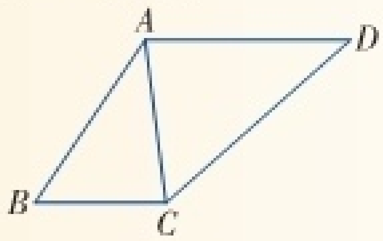
$\therefore$ $\triangle ACD \backsim \triangle CBD$.

$\therefore$ $\angle ACD=\angle B$.

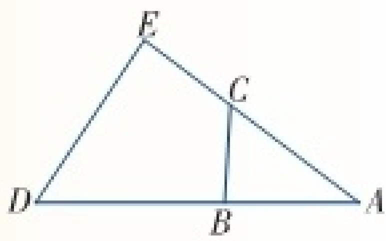
$\therefore$ $\angle ACB=\angle ACD+\angle BCD=\angle B+\angle BCD=90^\circ$.

练习

1. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle B=\angle ACD$，$AB=6$，$BC=4$，$AC=5$，$CD=7.5$，求AD的长.



（第 1 题图）



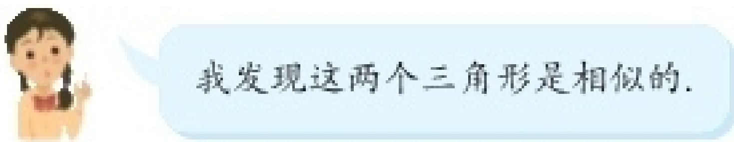
（第 2 题图）

2. 如图，点B，C分别在$\triangle ADE$的边AD，AE上，且$AC=6$，$AB=5$，$EC=4$，$DB=7$. 求证：$\triangle ABC \backsim \triangle AED$.

动脑筋

任意画两个三角形$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，使$\triangle ABC$的边长是$\triangle A'B'C'$的边长的k倍.

分别度量$\angle A$和$\angle A'$，$\angle B$和$\angle B'$，$\angle C$和$\angle C'$的大小，它们分别相等吗？由此你有什么发现？



下面我们来证明：

如图 3-24，在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，已知$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}=k$.

在$\triangle A'B'C'$的边$A'B'$上取一点D，使$A'D=AB$. 过点D作$DE/\!/B'C'$，交$A'C'$边于点E.

$\because\ DE/\!/B'C'$,

$\therefore\ \triangle A'DE\backsim\triangle A'B'C'$,

$\therefore\ \dfrac{A'D}{A'B'}=\dfrac{A'E}{A'C'}=\dfrac{DE}{B'C'}$.

又 $A'D=AB$,

$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$,

$\therefore\ A'E=AC$，$DE=BC$.

$\therefore\ \triangle A'DE\cong\triangle ABC$.

$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

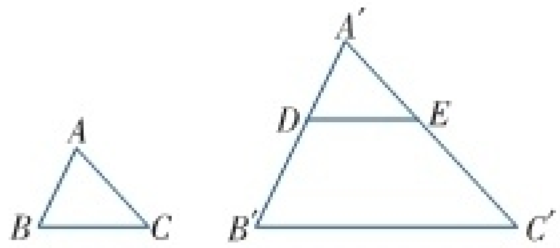


图 3-24

由此得到相似三角形的判定定理 3：

三边成比例的两个三角形相似.

例 7 如图 3-25，在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C=90°$，$\angle C'=90°$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$. 求证：Rt$\triangle ABC$∽Rt$\triangle A'B'C'$.

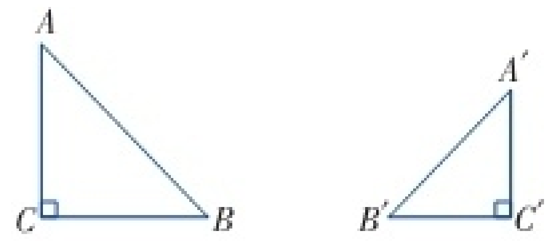


图 3-25

分析 已知两边成比例，只要得到三边成比例，即可完成证明.

证明 设$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=k$，则 $AB=kA'B'$，$AC=kA'C'$.

由勾股定理，得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{k^2\cdot A'B'^2-k^2\cdot A'C'^2}=k\cdot B'C'$，

$\therefore\ \frac{BC}{B'C'}=\frac{k\cdot B'C'}{B'C'}=k.$

$\therefore\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}.$

$\therefore$ Rt$\triangle ABC$∽Rt$\triangle A'B'C'$（三边成比例的两个三角形相似）.

例 8 判断图 3-26 中的两个三角形是否相似，并说明理由.

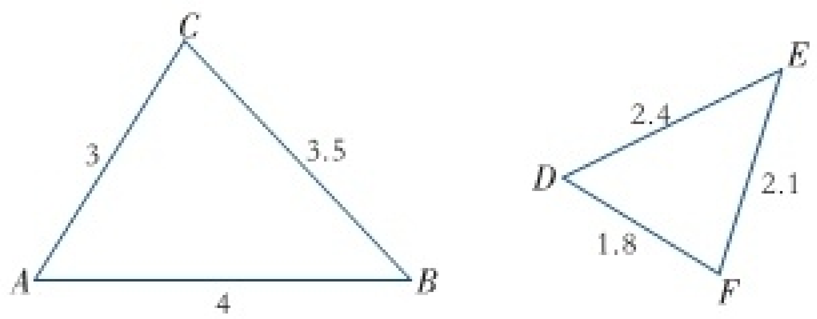


图 3-26

解 在$\triangle ABC$ 中，$AB>BC>CA$，在$\triangle DEF$ 中，$DE>EF>FD$.

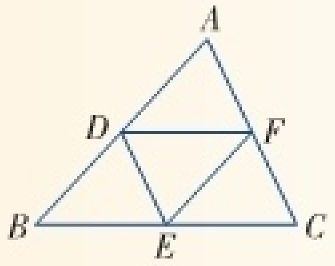
$\because\ \frac{DE}{AB}=\frac{2.4}{4}=0.6$，$\frac{EF}{BC}=\frac{2.1}{3.5}=0.6$，$\frac{FD}{CA}=\frac{1.8}{3}=0.6$，

$\therefore\ \frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CA}.$

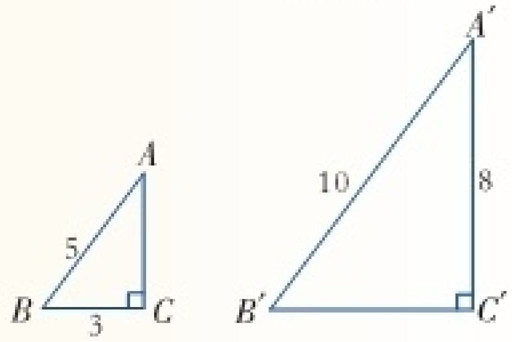
$\therefore\ \triangle DEF$ ∽ $\triangle ABC$.

练习

1. 如图，已知点 D，E，F 分别是 $\triangle ABC$ 三边的中点，求证：$\triangle EDF \backsim \triangle ACB$.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 判断图中的两个三角形是否相似，并说明理由.

3.4.2 相似三角形的性质

两个三角形相似，除了它们的对应角相等，对应边成比例等性质外，相似三角形还有哪些性质呢？

动脑筋

如图3-27，已知 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$AH$，$A'H'$ 分别为对应边 BC，$B'C'$ 上的高，那么 $\dfrac{AH}{A'H'}=\dfrac{AB}{A'B'}$ 吗？

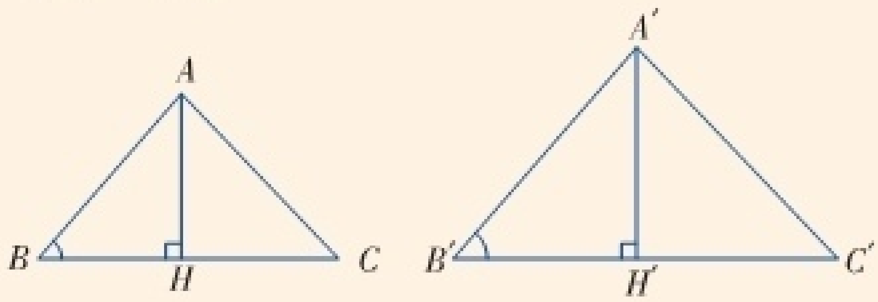


图 3-27

$\because\ \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,

$\therefore\ \angle B=\angle B'$.

又 $\angle AHB=\angle A'H'B'=90°$,

$\therefore\ \triangle ABH \backsim \triangle A'B'H'$.

$\therefore\quad \dfrac{AH}{A'H'}=\dfrac{AB}{A'B'}$.

类似地，我们可以得到其余两组对应边上的高的比也等于相似比.

由此得到，**相似三角形对应高的比等于相似比.**

例 9 如图 3-28，$AB/\!/PQ$，$AB=100$ m，$PQ=120$ m. 点 P，A，C 在一条直线上，点 Q，B，C 也在一条直线上. 若 AB 与 PQ 的距离是 40 m，求点 C 到直线 PQ 的距离.

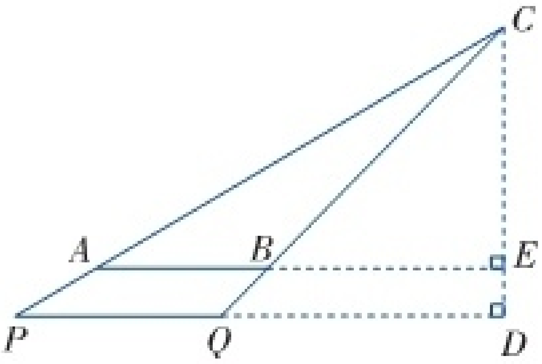


图 3-28

解 $\because\ AB/\!/PQ$，$\therefore\ \triangle CAB\backsim\triangle CPQ$.

过点 C 作 $CD\perp PQ$，垂足为点 D. 设 CD 交 AB 的延长线于点 E，$\therefore\ CE\perp AB$，$DE=40$ m.

由"相似三角形对应高的比等于相似比"可得，$\dfrac{AB}{PQ}=\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{CD-DE}{CD}$.

又 $AB=100$ m，$PQ=120$ m，$DE=40$ m，

$\therefore\quad CD=240$ m.

答：点 C 到直线 PQ 的距离为 240 m.

例 10 如图 3-29，已知$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，$AT$，$A'T'$ 分别为对应角$\angle BAC$，$\angle B'A'C'$的角平分线.

求证：$\dfrac{AT}{A'T'}=\dfrac{AB}{A'B'}$.

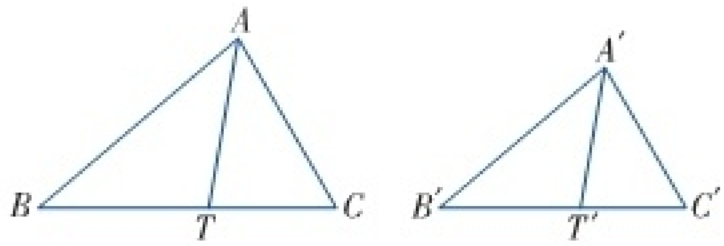


图 3-29

证明 $\because\quad \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，

$\therefore\quad \angle B=\angle B'$，$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

又 AT，$A'T'$分别为对应角$\angle BAC$，$\angle B'A'C'$的角平分线，

$\therefore\quad \angle BAT=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle B'A'C'=\angle B'A'T'$，

$\therefore\quad \triangle ABT\backsim\triangle A'B'T'$，

$\therefore\quad \dfrac{AT}{A'T'}=\dfrac{AB}{A'B'}$.

类似地，我们可以得到另外两组对应角平分线的比也等于相似比.

由此得到，**相似三角形对应的角平分线的比等于相似比.**

议一议

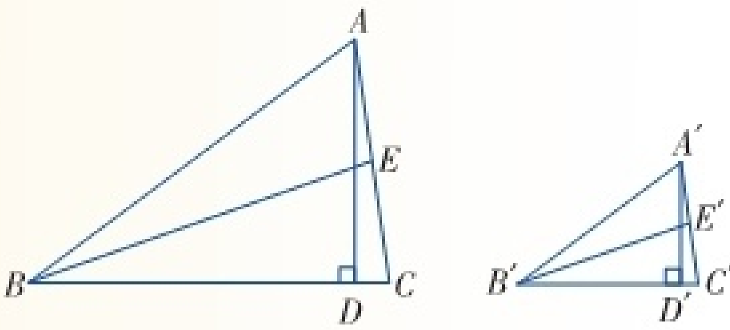
已知$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，若$AD$，$A'D'$分别为$\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$的中线，则$\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}$成立吗？由此你能得出什么结论？

相似三角形对应边上的中线的比等于相似比.

练习

1. 已知$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$，$AM$，$DN$分别是$\triangle ABC$，$\triangle DEF$的一条中线，且$AM=6$ cm，$AB=8$ cm，$DE=4$ cm，求DN的长.

2. 如图，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$AD$，$BE$分别是$\triangle ABC$的高和中线，$A'D'$，$B'E'$分别是$\triangle A'B'C'$的高和中线，且$AD=4$，$A'D'=3$，$BE=6$，求$B'E'$的长.



（第 2 题图）

动脑筋

如图 3-30，已知$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为$k$，则$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle A'B'C'}$的值是多少呢？

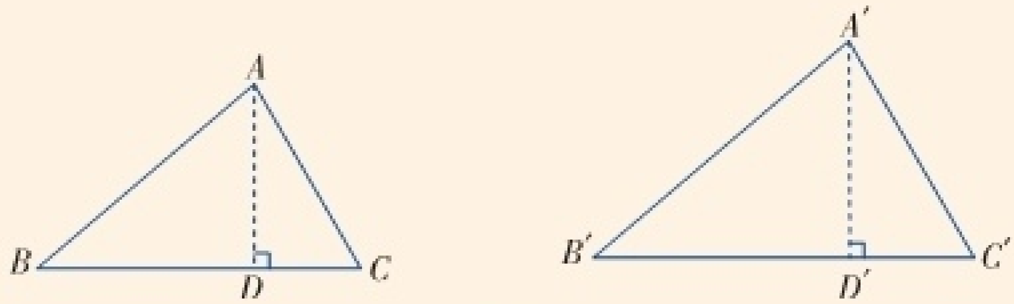


图 3-30

分别作 BC，$B'C'$边上的高 AD，$A'D'$，则$\dfrac{AD}{A'D'}=k$.

因此，$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD}{\frac{1}{2}\cdot B'C'\cdot A'D'}=\dfrac{BC}{B'C'}\cdot\dfrac{AD}{A'D'}=k\cdot k=k^2$.

由此得到，

相似三角形的面积比等于相似比的平方.

例 11 如图 3–31，在$\triangle ABC$ 中，$EF/\!/BC$，$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{1}{2}$，$S_{四边形BCFE}=8$，求 $S_{\triangle ABC}$.

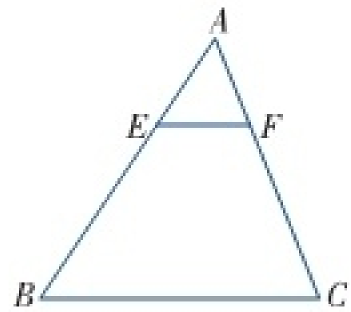


图 3–31

解 $\because$ $EF/\!/BC$，$\therefore$ $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$.

又 $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore$ $\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$，即 $\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AEF}+S_{四边形BCFE}}=\dfrac{1}{9}$.

$\because$ $S_{四边形BCFE}=8$，

$\therefore$ $S_{\triangle AEF}=1$.

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=9$.

例 12 已知$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$的相似比为$\dfrac{2}{3}$，且 $S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'}=91$，求$\triangle A'B'C'$的面积.

解 $\because$ $\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$的相似比为$\dfrac{2}{3}$，

$\therefore$ $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$，即 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{4}{9}S_{\triangle A'B'C'}$.

又 $S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'}=91$，

$\therefore$ $\dfrac{4}{9}S_{\triangle A'B'C'}+S_{\triangle A'B'C'}=91$，

$\therefore$ $S_{\triangle A'B'C'}=63$.

练习

1. 证明：相似三角形的周长比等于相似比.

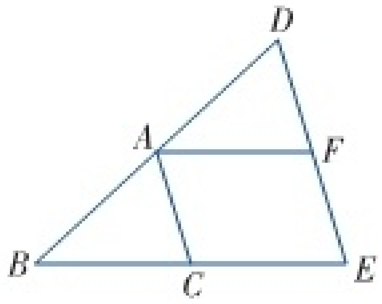
2. 已知$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，它们的周长分别为 60 cm 和 72 cm，且$AB=15$ cm，$B'C'=24$ cm，求BC，AC，$A'B'$，$A'C'$的长.

3. 有一个直角三角形的边长分别为 3，4，5，另一个与它相似的直角三角形的最小边长为 7，则另一个直角三角形的周长和面积分别是多少？

习题 3.4

A 组

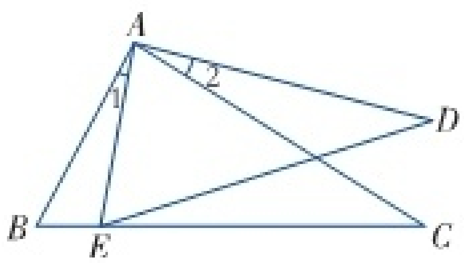
1. 如图，已知$\triangle ABC$和$\triangle DBE$，且$BD=2BA$，$BE=2BC$，$DE=2EF$. 试指出图中有几对相似三角形，并说明理由.



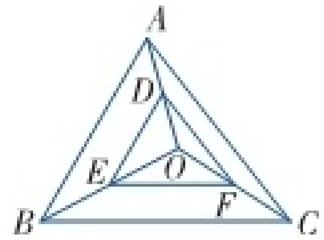
(第 1 题图)

2. 证明：有一个底角相等的两个等腰三角形相似 .

3. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$AB \cdot AD=AC \cdot AE$. 求证：$\triangle ABC \backsim \triangle AED$.



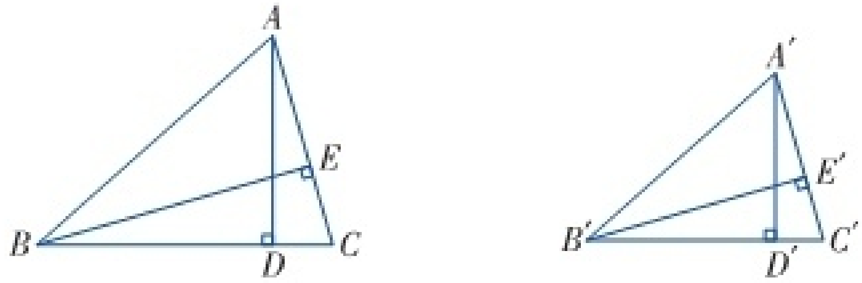
(第 3 题图)



(第 4 题图)

4. 如图，已知点O是$\triangle ABC$内任一点，连接OA，OB，OC，点D，E，F分别是OA，OB，OC的中点. 求证：$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

5. 如图，已知$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，且$AD$，$BE$是$\triangle ABC$的高，$A'D'$，$B'E'$是$\triangle A'B'C'$的高. 求证：$AD \cdot B'E' = A'D' \cdot BE$.



(第 5 题图)

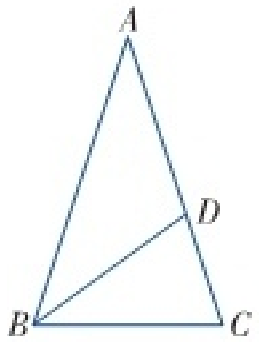
6. 两个相似三角形的一组对应边的长分别为 10 cm 和 20 cm.

(1) 若它们的周长之差是 60 cm，则较大的三角形的周长是多少？

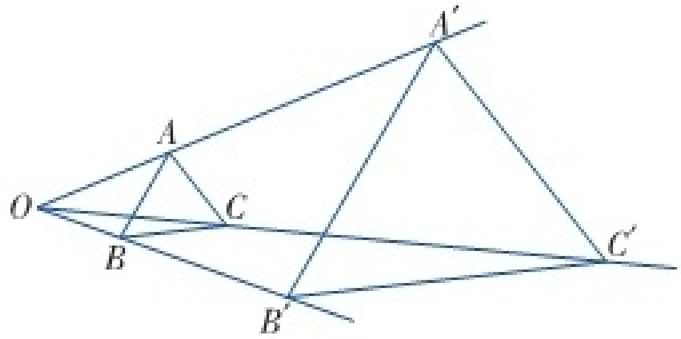
(2) 若它们的面积之和为 260 cm^2，则较小的三角形的面积是多少？

B 组

7. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle A=36°$，BD平分$\angle ABC$交AC于点D. 若$AC=2$，求AD的长.



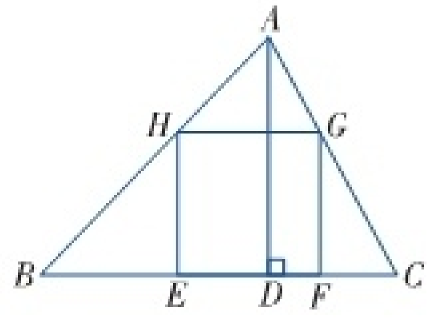
(第 7 题图)



(第 8 题图)

8. 如图，点O是$\triangle ABC$外一点，分别在射线OA，OB，OC上取点A'，B'，C'，使得$\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{OC'}{OC}=3$，连接$A'B'$，$B'C'$，$A'C'$. 问所得的$\triangle A'B'C'$是否与$\triangle ABC$相似？请说明你的理由.

9. 如图，$\triangle ABC$为锐角三角形，AD是边BC上的高，正方形$EFGH$的一边EF在BC上，顶点G，H分别在AC，AB上. 已知$BC=30$ cm，$AD=20$ cm，求这个正方形的边长.



(第 9 题图)

3.5 相似三角形的应用

动脑筋

如图 3-32，A，B 两点分别位于一个池塘的两端，小张想测量出 A，B 间的距离，但由于受条件限制无法直接测量，你能帮他想出一个可行的测量办法吗？

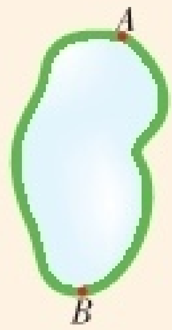


图 3-32

我们可以这样做：

如图 3-33，在池塘外取一点 C，使它可以直接看到 A，B 两点，连接并延长 AC，BC，在 AC 的延长线上取一点 D，在 BC 的延长线上取一点 E，使 $\dfrac{AC}{DC}=\dfrac{BC}{EC}=k$（$k$ 为正整数），测量出 DE 的长度后，就可以由相似三角形的有关知识求出 A，B 两点间的距离了.

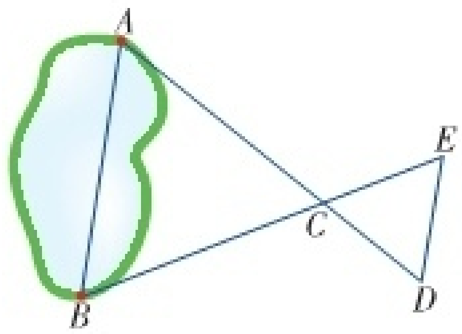


图 3-33

做一做

如图 3-33，如果 $\dfrac{AC}{DC}=\dfrac{BC}{EC}=2$，且测得 DE 的长为 50 m，则 A，B 两点间的距离为多少？

$\because\ \dfrac{AC}{DC}=\dfrac{BC}{EC}=2$，$\angle ACB=\angle DCE$，

$\because\quad \triangle ABC \backsim \triangle DEC.$

$\therefore\quad \dfrac{AB}{DE}=2.$

$\because\quad DE=50\text{ m},$

$\therefore\quad AB=2DE=100\text{ m}.$

例 在用步枪瞄准靶心时，要使眼睛(O)、准星(A)、靶心点(B)在同一条直线上. 在射击时，李明由于有轻微的抖动，致使准星 A 偏离到 A'，如图 3-34 所示. 已知 $OA=0.2\text{ m}$，$OB=50\text{ m}$，$AA'=0.000\,5\text{ m}$，求李明射击到的点 B'偏离靶心点 B 的长度 BB'(近似地认为 $AA'\parallel BB'$).

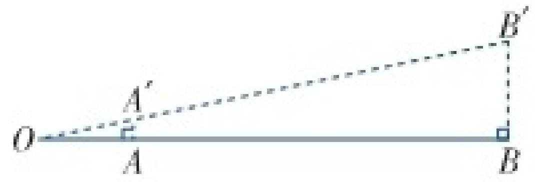


图 3-34

解 $\because\quad AA'\parallel BB',$

$\therefore\quad \triangle OAA' \backsim \triangle OBB'.$

$\therefore\quad \dfrac{OA}{OB}=\dfrac{AA'}{BB'}.$

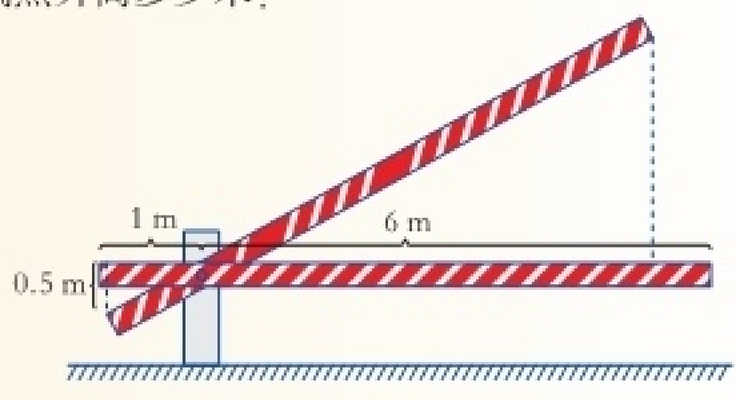
$\because\quad OA=0.2\text{ m},\ OB=50\text{ m},\ AA'=0.000\,5\text{ m},$

$\therefore\quad BB'=0.125\text{ m}.$

答：李明射击到的点 B'偏离靶心点 B 的长度 BB'为 0.125 m.

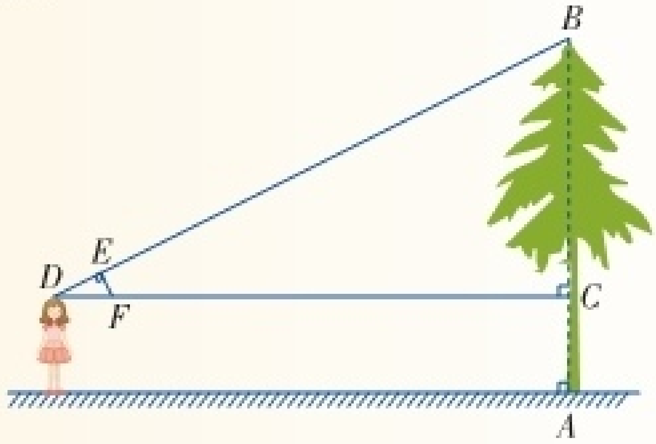
练习

1. 如图，某路口栏杆的短臂长为1 m，长臂长为 6 m. 当短臂端点下降 0.5 m 时，长臂端点升高多少米?



(第 1 题图)

2. 如图，小红同学用自制的直角三角形纸板 DEF 测量树的高度 AB，她调整自己的位置，设法使斜边 DF 保持水平，并且边 DE 与点 B 在同一直线上．已知纸板的两条直角边 $DE=80$ cm，$EF=40$ cm，测得 $AC=1.5$ m，$CD=8$ m，求树高 AB.



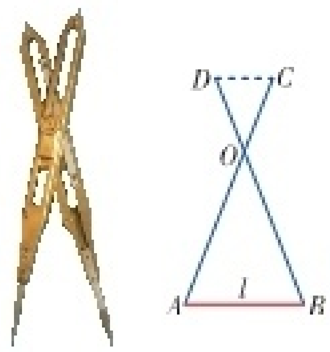
（第 2 题图）

习题 3.5

A 组

1. 如图，小杰在打网球时，要使球恰好能打过网，而且落在离网 5 m 的位置上，则球拍击球的高度 h 应为多高？（假设球沿直线飞行）

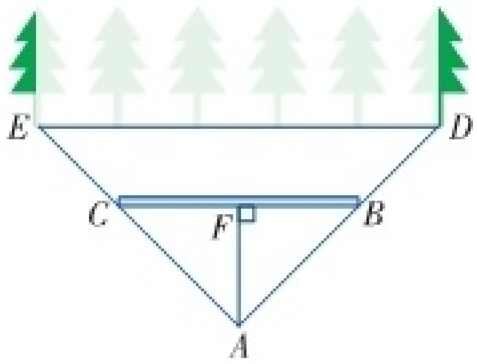
（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，比例规是一种画图工具，它由长度相等的两脚 AC 和 BD 交叉构成．把比例规的两脚合上，使螺丝钉固定在刻度 m 的地方，此时 $\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OB}{OD}=m$．然后张开两脚，使 A，B 两个尖端分别在线段 l 的两个端点上，这时 CD 与 AB 的长度有什么关系？位置有什么关系？为什么？

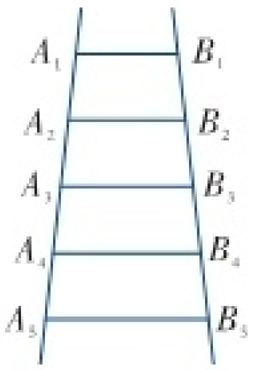
3. 如图，某宣传栏 BC 后面 2 m 处植有与宣传栏平行的 6 棵树，即 $DE // BC$，且相邻两棵树干之间的间隔均为 2 m. 一人站在宣传栏前面的点 A 处正好看到两端的树干，其余的 4 棵树均被宣传栏挡住. 已知 $AF \perp BC$，$AF=3$ m，求宣传栏 BC 的长(不计宣传栏的厚度).



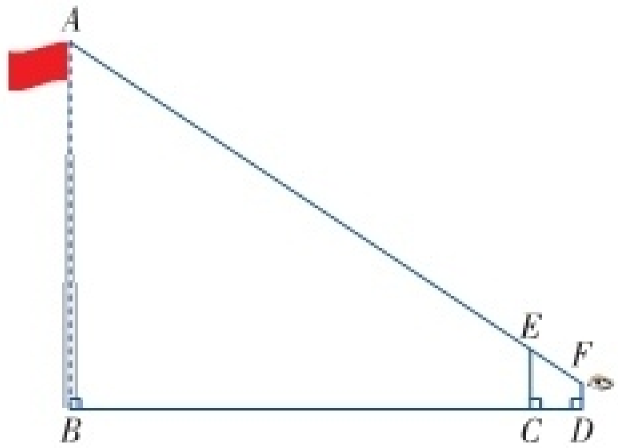
(第 3 题图)

B 组

4. 如图，一张梯子共有 5 级互相平行的踏板，每相邻两级踏板之间的距离都相等. 已知梯子最上面一级踏板的长度 $A_1B_1=0.5$ m，最下面一级踏板的长度 $A_5B_5=0.8$ m，求剩余几级踏板的长度(提示：过点 A_1 作 B_1B_5 的平行线).



(第 4 题图)



(第 5 题图)

5. 在一次活动课上，王老师让同学们到操场上想办法测量旗杆的高度. 小芳同学的测量方法是：拿一根高 3.5 m 的竹竿(EC)直立在离旗杆(AB)27 m 的 C 处，然后走到 D 处，这时目测到旗杆顶部 A 与竹竿顶部 E 恰好在同一直线上，又测得 C，D 两点间的距离为 3 m，小芳的目高（眼睛到地面的距离）DF 为 1.5 m，这样便可知道旗杆 AB 的高度. 你认为这种测量方法是否可行？如果可行，请求出旗杆的高度；如果不行，请说明理由.

3.6 位 似

如何把一个图形放大或缩小？下面我们来学习一种简单可行的方法.

动脑筋

图 3-35 是运用幻灯机(点 O 表示光源)把幻灯片上的一只小狗放映到屏幕上的示意图，这两个图形之间有什么关系？

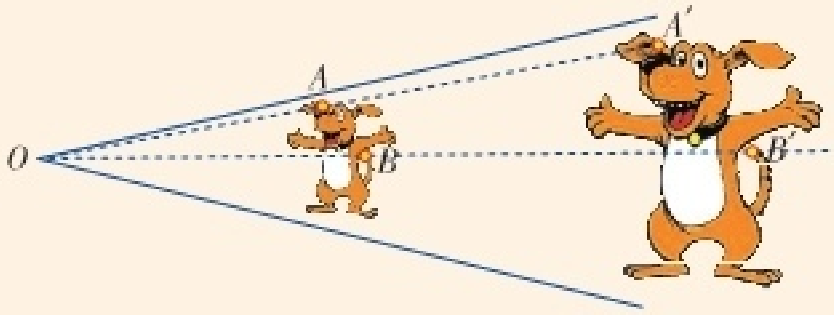
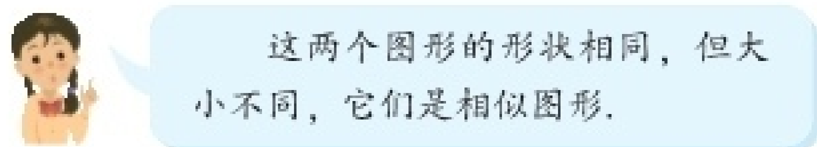


图 3-35



在图 3-35 中的左边小狗的头顶上和狗尾巴尖上分别取点 A，B. 右边小狗的头顶和狗尾巴尖上的点 A'，B'分别为点 A 和点 B 的对应点.

此时我们会发现点 A，A'与点O在一条直线上，点 B，B'与点 O也在一条直线上.

分别量出线段 OA，OA'，OB，OB'的长度，计算(精确到 0.1)：

$$\frac{OA'}{OA}=\underline{\qquad\qquad\qquad},\quad \frac{OB'}{OB}=\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

继续在左、右两只小狗上找出一些对应点，我们会发现每一对对应点都与点 O 在一条直线上，且每一对对应点与点 O 所连线段的比与上述$\frac{OA'}{OA}$，$\frac{OB'}{OB}$的值相等.

一般地，取定一个点 O，如果一个图形 G 上每一个点 P 对应于另一个图形 G' 上的点 P'，且满足：

（1）直线 PP' 经过点 O，

（2）$\dfrac{OP'}{OP}=|k|$，其中 k 是非零常数，当 $k>0$ 时，点 P' 在射线 OP 上，当 $k<0$ 时，点 P' 在射线 OP 的反向延长线上.

那么称图形 G 与图形 G' 是**位似图形**（homothetic figures）. 这个点 O 叫作**位似中心**(homothetic center)，常数 k 叫作**位似比**(homothetic ratio).

议一议

在图 3-35 中，连接 AB，$A'B'$，可以得到图 3-36，则 $AB\parallel A'B'$ 吗？

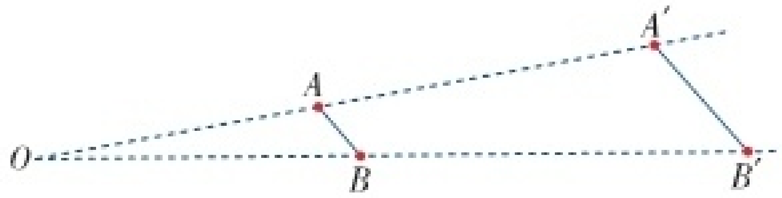


图 3-36

$\because\ \dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{OB}{OB'}$，$\angle AOB=\angle A'OB'$，

$\therefore\ \triangle OAB\backsim\triangle OA'B'$.

$\therefore\ \angle OAB=\angle OA'B'$.

$\therefore\ AB\parallel A'B'$.

两个图形位似，则这两个图形不仅相似，而且对应点的连线相交于一点，对应边互相平行(或在同一直线上).

利用位似可以把一个图形放大或缩小.

例如，如图 3-37，要把 $\triangle ABC$ 放大为原来的 2 倍，我们可以在三角形外任意取一点 O，连接 OA，OB，OC，分别在线段 OA，OB，OC 的延长线上取点 A'，B'，C'，使得 $\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{OC'}{OC}=2$，依次连接点 A'，B'，C'，则所得到的 $\triangle A'B'C'$ 就是所要求的图形.

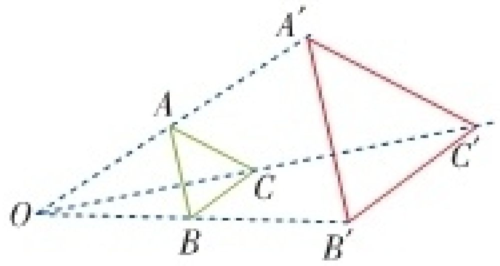


图 3-37

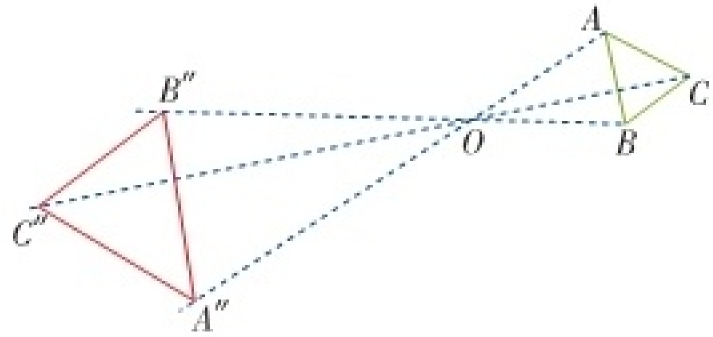


图 3-38

如图 3-38，我们还可以分别在线段 OA，OB，OC 的反向延长线上取点 A''，B''，C''，使得 $\frac{OA''}{OA}=\frac{OB''}{OB}=\frac{OC''}{OC}=2$，依次连接点 A''，B''，C''，则所得到的 $\triangle A''B''C''$ 也是所要求的图形.

做一做

如图 3-39，已知 $\triangle ABC$ 外一点 O，以点 O 为位似中心，将 $\triangle ABC$ 缩小为原图形的 $\frac{1}{2}$.

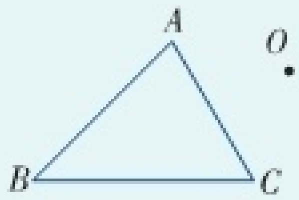
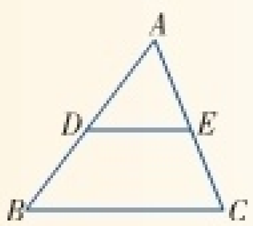


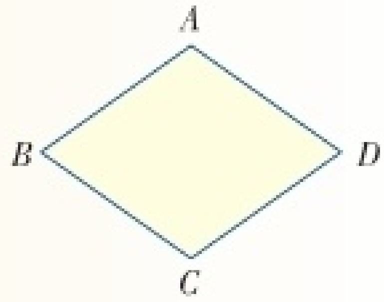
图 3-39

练习

1. 如图，已知 $DE /\!/ BC$，则 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 是位似图形吗？若是，找出它们的位似中心.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，将菱形 $ABCD$ 放大为原图形的 2 倍.

动脑筋

如图 3-40，在平面直角坐标系中，已知 $\triangle AOB$ 的顶点坐标分别为 $A(2, 4)$，$O(0, 0)$，$B(6, 0)$.

(1) 将各个顶点坐标分别扩大为原来的 2 倍，画出所得到的图形；

(2) 以点 O 为位似中心，分别在线段 OA，OB 的延长线上取点 A'，B'，使 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=2$，依次连接点 A'，O，B'，画出所得到的图形，你发现了什么？

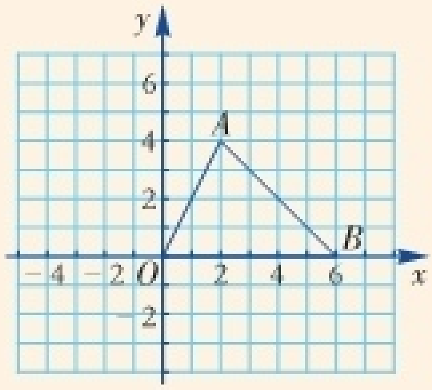


图 3-40

将 $\triangle AOB$ 各顶点的坐标分别乘 2，得点 $A'(4, 8)$，$O(0, 0)$，$B'(12, 0)$，如图 3-41，依次连接点 A'，O，B'，得到 $\triangle A'OB'$.

我们可以发现，$\triangle A'OB'$ 与 $\triangle AOB$ 是以坐标原点 O 为位似中心，位似比为 2 的位似图形.

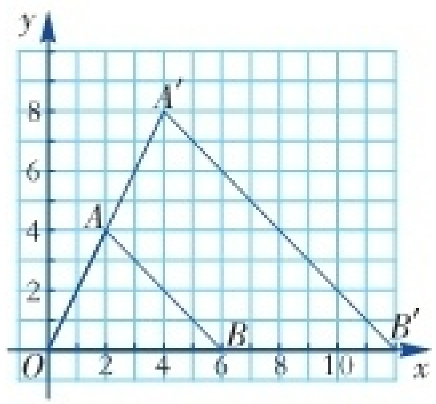


图 3-41

做一做

如图 3-42，在平面直角坐标系中，已知 $\triangle AOB$ 的顶点坐标分别为 $A(3, 6)$，$O(0, 0)$，$B(6, 0)$.

(1) 将各个顶点坐标分别缩小为原来的 $\frac{1}{3}$，画出所得到的图形；

(2) 以点 O 为位似中心，分别在线段 OA，OB 上取点 A''，B''，使 $\frac{OA''}{OA}=\frac{OB''}{OB}=\frac{1}{3}$，依次连接点 A''，O，B''，画出所得到的图形，你发现了什么？

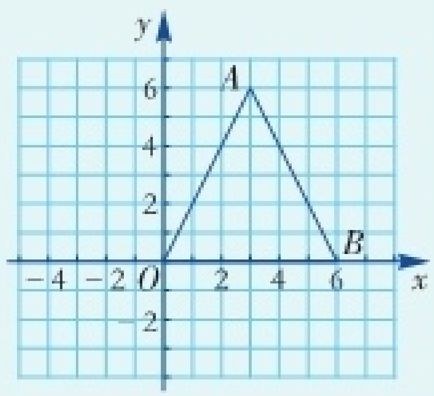


图 3-42

数学上可以证明，一个多边形的顶点坐标分别扩大或缩小相同的倍数，所得到的图形与原图形是以坐标原点为位似中心的位似图形.

在平面直角坐标系中，如果以坐标原点为位似中心，位似比为 k，那么位似图形对应点的坐标的比等于 k.

例 如图 3–43，在平面直角坐标系中，已知▱$OABC$ 的顶点坐标分别为 O (0，0)，A(3，0)，B (4，2)，C (1，2). 以坐标原点 O 为位似中心，将▱$OABC$ 放大为原图形的 3 倍.

分析 要将▱$OABC$ 放大为原图形的 3 倍，由位似图形的定义可知，$|k|=3$，即 $k=\pm 3$，因此我们可以将原四边形每个顶点的横坐标、纵坐标都乘 3，或都乘–3.

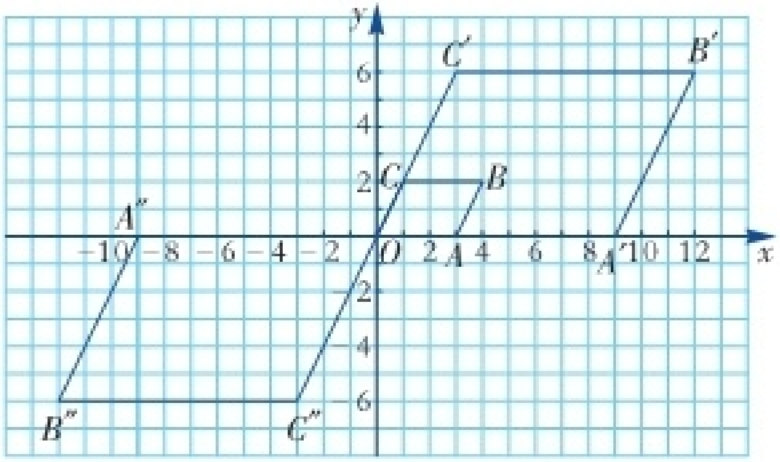


图 3–43

解 （方法一）将▱$OABC$ 的各顶点的坐标分别乘 3，得 $O(0,0)$，$A'(9,0)$，$B'(12,6)$，$C'(3,6)$，依次连接点 O，A'，B'，C'，则四边形 $OA'B'C'$即为所要求的图形，如图 3–43 所示.

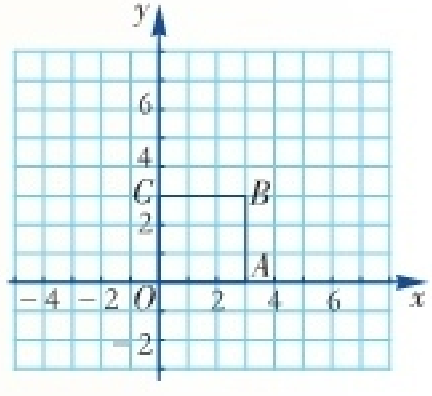
（方法二）将▱$OABC$ 的各顶点的坐标分别乘–3，得 $O(0,0)$，$A''(-9,0)$，$B''(-12,-6)$，$C''(-3,-6)$，依次连接点 O，A''，B''，C''，则四边形 $OA''B''C''$即为所要求的图形，如图 3–43 所示.

练习

如图，在平面直角坐标系中，已知正方形 $OABC$ 的顶点坐标分别为 $O(0,0)$，$A(3,0)$，$B(3,3)$，$C(0,3)$.

（1）以坐标原点 O 为位似中心，将正方形 $OABC$ 放大为原图形的 2 倍；

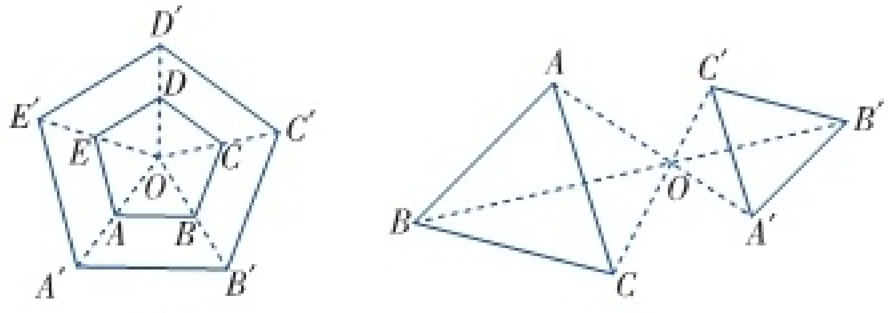
（2）以坐标原点 O 为位似中心，将正方形 $OABC$ 缩小为原图形的$\frac{1}{2}$.



习题 3.6

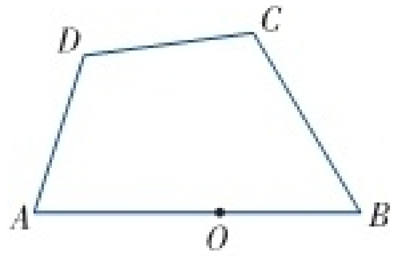
A 组

1. 下列图形中，哪些是位似图形？若是，找出它们的位似中心. 其中，图(1)中$\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{OC'}{OC}=\dfrac{OD'}{OD}=\dfrac{OE'}{OE}$；图(2)中$\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{OC'}{OC}$.



(1)　　　　(2)

(第 1 题图)



(第 2 题图)

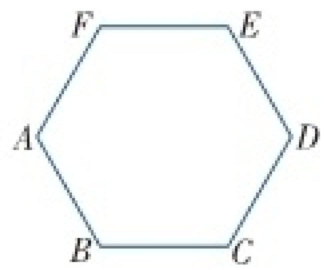
2. 如图，以点 O 为位似中心，将四边形 $ABCD$ 放大为原图形的 2 倍.

3. 在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 的顶点坐标分别为 $O(0,\ 0)$，$A(2,\ 0)$，$B(2,\ 1)$，$C(0,1)$. 将其各顶点的坐标扩大为原来的 2 倍后，画出得到的四边形. 这两个四边形是位似图形吗？若是，位似比是多少？

4. 在平面直角坐标系中，已知正方形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为 $A(2,\ 0)$，$B(4,\ 0)$，$C(4,\ 2)$，$D(2,\ 2)$. 以坐标原点 O 为位似中心，将正方形$ABCD$ 缩小为原图形的$\dfrac{1}{2}$.

B 组

5. 如图，将正六边形 $ABCDEF$ 放大为原图形的 2 倍.



(第 5 题图)

6. 在平面直角坐标系中，$\triangle AOB$ 的顶点坐标分别为 $A(-1,\ 3)$，$O(0,\ 0)$，$B(-3,\ 1)$. 以坐标原点 O 为位似中心，将$\triangle AOB$ 放大，记所得三角形为$\triangle A'OB'$. 若点 A 的对应点 A'的纵坐标为-6，求点 B'的横坐标.

小结与复习

回顾

1. 比例的基本性质有哪些？什么是比例线段？

2. 平行线分线段成比例的基本事实是什么？

3. 试举例说明什么是相似的图形.

4. 如何判定两个三角形相似？全等三角形相似吗？

5. 相似三角形有哪些性质？举例说明相似三角形在日常生活中的应用.

6. 举例说明什么叫位似图形. 在平面直角坐标系中，将一个多边形的顶点坐标扩大或缩小后所得到的图形与原图形有什么关系？

本章知识结构

注意

1. 在判定两个三角形相似时，要注意角、边的对应关系. 全等三角形是相似比为 1 的特殊的相似三角形.

2. 利用相似三角形的知识解决实际问题时，首先要将实际问题抽象为数学问题，并通过构造相似三角形来解决，最后对所得的结果做出符合实际意义的解释.

3. 位似图形是相似图形的特殊情形. 两个图形位似，则除相似之外，在位置上也有一定的要求：两个位似的图形，其对应顶点的连线都相交于同一点，对应边互相平行.

复习题 3

A 组

1. 已知 $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$，求下列算式的值：

（1）$\frac{a-b}{b}$；　　　　（2）$\frac{2a+b}{2a-b}$.

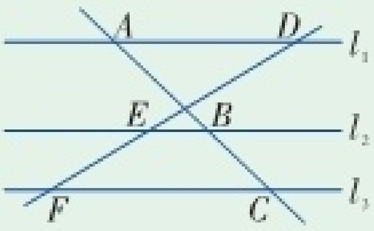
2. 已知 a，b，c，d 是比例线段.

（1）若 $a=2$，$b=5$，$c=6$，求 d；

（2）若 $a=1.5$，$c=3$，$d=4.5$，求 b；

（3）若 $a=5$，$b=8$，$d=44$，求 c.

3. 如图，$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，直线 AC 分别与 l_1，l_2，l_3 相交于点 A，B，C，直线 DF 分别与 l_1，l_2，l_3 相交于点 D，E，F. 已知 $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{2}$，$DE=6$，求 DF 的长 .

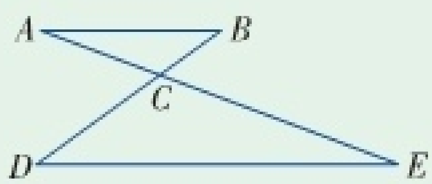


（第 3 题图）

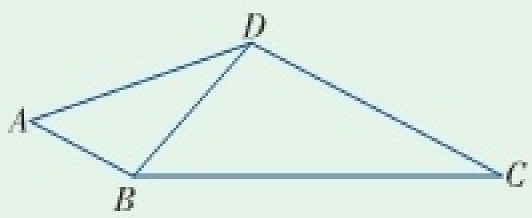
（第 4 题图）

4. 根据图中已知条件，试求 D，E 两点之间的距离.

5. 如图，AE 与 BD 相交于点 C，已知 $AC=5$，$BC=3$，$EC=10$，$DC=6$. 求证：$AB /\!/ DE$.



（第 5 题图）



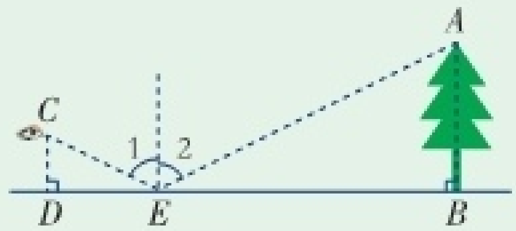
（第 6 题图）

6. 如图，某地四个乡镇 A，B，C，D 之间建有公路. 已知 $AB=14$ km，$AD=28$ km，$BD=21$ km，$BC=42$ km，$DC=31.5$ km，问公路 AB 与 DC 平行吗？说明你的理由.

7. 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似且对应中线的比为 $2:3$，$\triangle ABC$ 的周长和面积

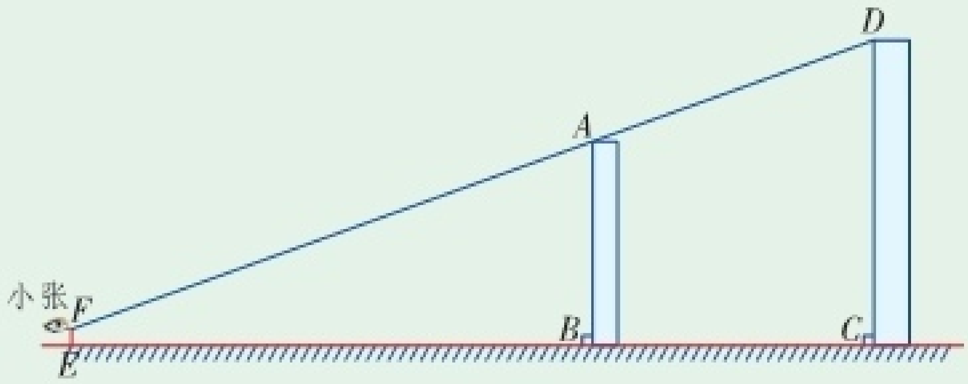
分别为 16 和 25，求$\triangle DEF$的周长及面积.

8. 为了测量一棵树的高度，数学兴趣小组根据光的反射定律(图中$\angle 1=\angle 2$)，把一面镜子放在离树(AB)8 m 的点 E 处，然后观测者沿着直线 BE 后退到点 D，这时恰好在镜子里看到树梢顶点 A，此时量得 $DE=3$ m. 已知观测者目高 $CD=1.5$ m，求树 AB 的高度.



(第 8 题图)

9. 如图，一教学楼 AB 的高为 20 m， 教学楼后面水塔 CD 的高为 30 m. 已知 BC=30 m，小张的目高 EF 为 1.6 m. 当小张站在教学楼前 E 处时，刚好看到教学楼顶端 A 与水塔顶端 D 在一条直线上，求此时他与教学楼的距离 BE.

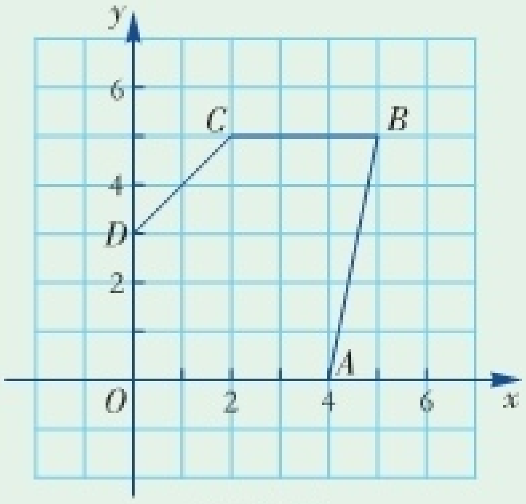


(第 9 题图)

10. 如图，在平面直角坐标系中，已知五边形 $OABCD$ 的顶点坐标依次为(0，0)，(4，0)，(5，5)，(2，5)，(0，3).

(1) 以坐标原点 O 为位似中心，把各顶点坐标分别放大为原来的 1.5 倍，所得五边形与原五边形 $OABCD$ 是位似图形吗？

(2) 以坐标原点 O 为位似中心，把各顶点坐标分别缩小为原来的$\frac{4}{5}$，所得五边形与原五边形 $OABCD$ 是位似图形吗？



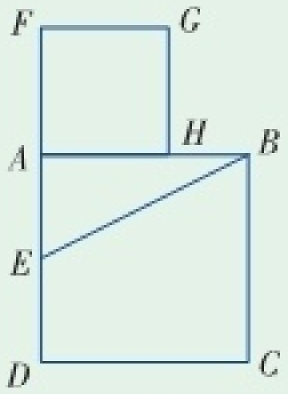
(第 10 题图)

Ⓑ 组

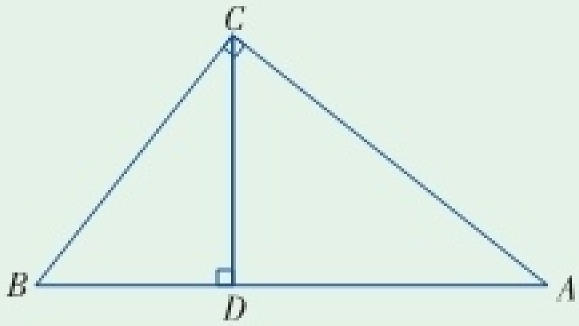
11. 我们可以按以下方法找到线段的黄金分割点：

如图，设 AB 是已知线段，以 AB 为边作正方形 $ABCD$；取 AD 的中点 E，连接 EB；延长 DA 至 F，使 $EF=EB$；以线段 AF 为边作正方形 $AFGH$，交 AB 于点 H，则点 H 就是线段 AB 的黄金分割点.

请试着用上述方法找一条已知线段的黄金分割点.



(第 11 题图)



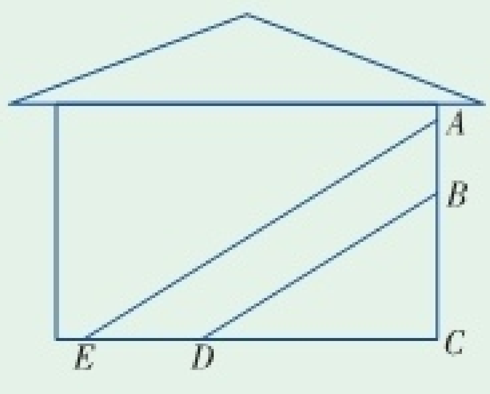
(第 12 题图)

12. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，CD 是斜边 AB 上的高.

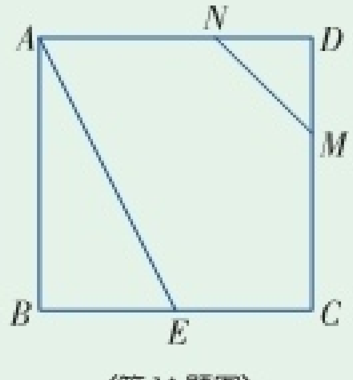
求证：(1) $AC^2=AD\cdot AB$；

(2) $CD^2=BD\cdot AD$.

13. 如图，阳光通过窗口 AB 照射到室内，在地面上留下 2.7 m 宽的亮区 ED. 已知光线 $AE/\!/BD$，亮区 E 点与窗口所在墙脚 C 点之间的距离 $EC=8.7$ m，窗口高 $AB=1.8$ m，求窗口底边离地面的高 BC.



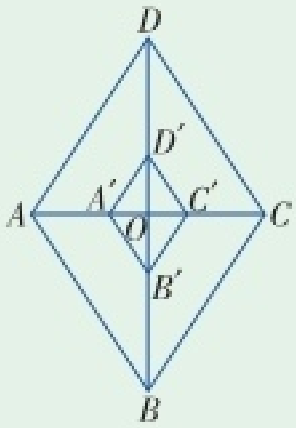
(第 13 题图)



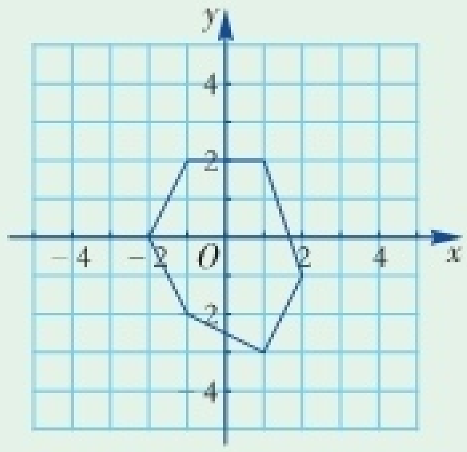
(第 14 题图)

14. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长是 2，$BE=CE$，$MN=1$，线段 MN 的两端点在 CD，AD 上滑动. 当 DM 为多长时，$\triangle ABE$ 与以 D，M，N 为顶点的三角形相似？请说明理由.

15. 如图，四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，分别在线段 OA，OB，OC，OD 上取点 A'，B'，C'，D'，使得 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{1}{3}$，连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$，所得的四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 相似吗？为什么？



(第 15 题图)



(第 16 题图)

16. 如图，将图中的六边形放大为原图形的 2 倍，画出所得图形，并写出所得图形的各顶点的坐标.

C 组

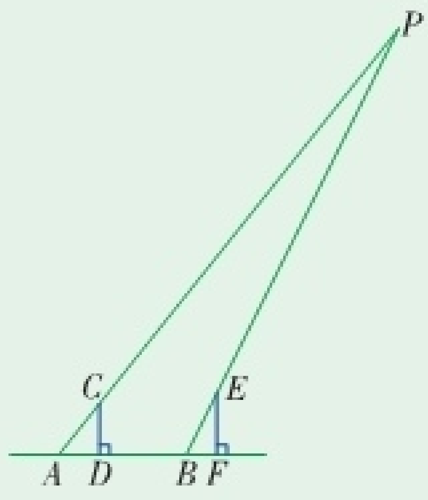
17. 某兴趣学习小组到校外进行数学探究活动，发现一个如图所示的支架 PAB，于是他们利用手中已有的工具进行了如下一系列操作：

第一步，测量支架底部 A，B 两点之间的距离；

第二步，在 AP 上取一点 C，挂上铅垂线 CD，使点 D 恰好落在直线 AB 上，测量 CD 和 AD 的长；

第三步，在 BP 上取一点 E，挂上铅垂线 EF，使点 F 恰好落在直线 AB 上，测量 EF 和 BF 的长.

已知上述步骤中测得数据如下表：



(第 17 题图)

线 段	AB	CD	AD	EF	BF
长度/m	2.5	1	0.8	1.2	0.6

根据以上数据，你能帮他们计算出支架顶端 P 到地面的距离吗？如能，请计算出结果(精确到 0.1 m)；如不能，请说明理由.

美妙的黄金分割

欧洲中世纪的物理学家、天文学家开普勒曾经说过:“几何学里有两个宝库:一个是毕达哥拉斯定理(勾股定理),另外一个就是黄金分割. 前者可比喻为金矿,而后者可比喻为珍贵的钻石矿.”德国数学家阿道夫·蔡辛也曾断言:宇宙万物,凡符合黄金分割的,总是最美的形体,黄金分割是解开自然美和艺术美奥秘的关键. 黄金分割作为一种数学的比例关系,它所蕴含的价值如此受到重视,也启示着人们在生活的方方面面去揭示奥秘,并广泛应用.

在西方古典音乐的创作中,作曲家们有意识地将整章音乐的高潮部分落在全曲的黄金分割点处,这样奏出的音乐美妙无比,让人回味无穷. 经典乐章《命运》、《蓝色多瑙河》等作品就是黄金分割在音乐创作中的经典应用. 中国的二胡演奏家在漫长的演奏生涯中发现,如果把二胡的千斤放在琴弦某处,音色将美妙动听,人们对这种现象进行研究后发现:此时千斤的所在位置正是琴弦的黄金分割点. 因此许多音乐评论家惊呼:“艺术上的‘黄金分割比’和音乐中高潮的位置有着密切的联系.”

在生物研究当中,植物学家发现:某些植物在抽枝吐叶时,如果从这些植物的顶端往下看,相邻两片叶子之间成 $137.5°$ 的夹角,而这恰好将水平面 $360°$ 分成 $1:0.618\left(\dfrac{137.5}{360-137.5}\approx 0.618\right)$ 的两部分. 植物的这种生长已被证实对于叶片的通风和采光最为有利(如图 1、图 2 所示).

图1

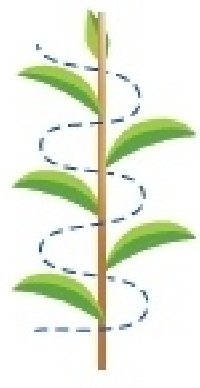


图2

实际上，植物的这种生长规律在动物身上也有所发现，如动物学家在某些甲壳类动物的外壳上就发现了“黄金螺线”. 例如，图 3 的鹦鹉螺身上每圈螺纹的直径与相邻螺纹直径的比约为 0.618.

图 3

在工业生产中，黄金分割的理念也在发挥着重要的作用. 例如在制药行业，如何用较少的试验次数，就能迅速找到最合适的配方、配料比；设计工业产品时如何找到最合理的设计参数，使得产品的质量最好，产量最多？我国著名的数学家华罗庚在 20 世纪 70 年代就倡导并推广使用单因素优选法，在生产实践中起到了重要的作用，其中 0.618 就是一个关键的数据，因此人们也把单因素优选法简称为“0.618 法”.

华罗庚

黄金分割从它被发现，到被人类掌握去探寻自然界的规律，乃至应用于生活的各个角落，这一过程已长达数千年. 黄金分割如此美妙，也促使着人们继续去探寻、去思考、去发现，从而使得我们的世界更加美好.

第4章

锐角三角函数

上图是上海东方明珠电视塔的远景图，你能测量出该塔的高度吗？

测量高度或者距离之类的问题，一般可以用锐角三角函数的知识来解决.

什么是锐角三角函数？如何求一个锐角的三角函数值？锐角三角函数在生活中有哪些应用？这些都是本章将要学习的新知识.

4.1 正弦和余弦

做一做

画一个直角三角形，其中一个锐角为 65°，量出 65°角的对边长度和斜边长度，计算

$$\frac{65°\text{角的对边}}{\text{斜边}}=\underline{\qquad\qquad}=\underline{\qquad\qquad}.$$

与同桌和邻桌的同学交流，看看计算出的比值是否相等(精确到 0.01).

如图 4–1，(1)和(2)分别是小明、小亮画的直角三角形，其中 $\angle A=\angle A'=65°$，$\angle C=\angle C'=90°$.

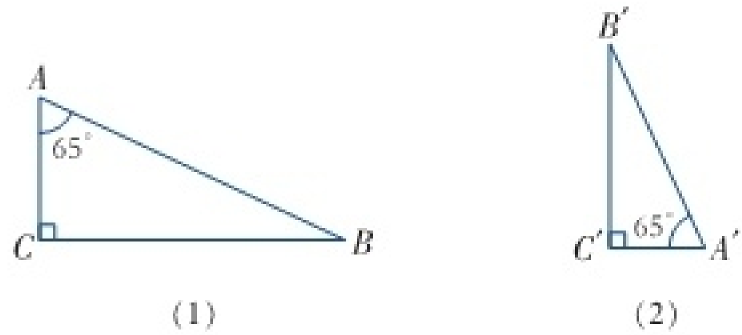


图 4–1

小明量出 $\angle A$ 的对边 $BC=3$ cm，斜边 $AB=3.3$ cm，算出：

$$\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{3}{3.3}=\frac{10}{11}.$$

小亮量出 $\angle A'$ 的对边 $B'C'=2$ cm，斜边 $A'B'=2.2$ cm，算出：

$$\frac{\angle A'\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{2}{2.2}=\frac{10}{11}.$$

由此猜测：在有一个锐角为 65°的所有直角三角形中，65°角的对边与斜边的比值是一个常数，它等于 $\frac{10}{11}$.

这个猜测是真的吗？若把 65°角换成任意一个锐角 α，则这个角的对边与斜边的比值是否也是一个常数呢？

探究

如图 4-2，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 都是直角三角形，其中 $\angle A=\angle D=\alpha$，$\angle C=\angle F=90^\circ$，则 $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{EF}{DE}$ 成立吗？为什么？

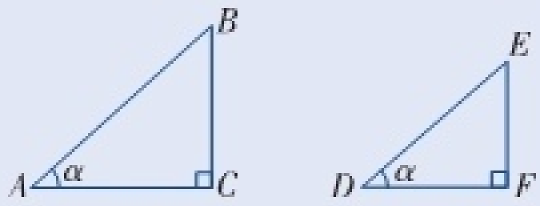


图 4-2

$\because\quad \angle A=\angle D=\alpha$，$\angle C=\angle F=90^\circ$，

$\therefore\quad \mathrm{Rt}\triangle ABC \backsim \mathrm{Rt}\triangle DEF$.

$\therefore\quad \dfrac{BC}{EF}=\dfrac{AB}{DE}$.

即 $\quad BC\cdot DE=AB\cdot EF$，

$\therefore\quad \dfrac{BC}{AB}=\dfrac{EF}{DE}$.

这说明，在有一个锐角等于 α 的所有直角三角形中，角 α 的对边与斜边的比值是一个常数，与直角三角形的大小无关.

如图 4-3，在直角三角形中，我们把锐角 α 的对边与斜边的比叫作角 α 的**正弦**(sine)，记作 $\sin\alpha$，即

$$\sin\alpha=\frac{\text{角 }\alpha\text{ 的对边}}{\text{斜边}}.$$

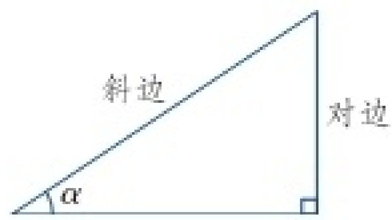


图 4-3

根据“在直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半”，容易得到

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}.$$

例 1 如图 4-4，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=3$，$AB=5$.

（1）求 $\sin A$ 的值；

（2）求 $\sin B$ 的值.

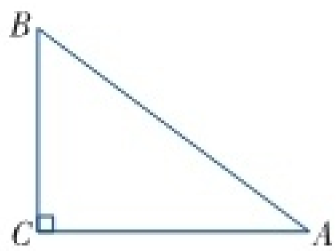


图 4-4

解 （1）$\angle A$ 的对边 $BC=3$，斜边 $AB=5$．于是

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}.$$

（2）$\angle B$ 的对边是 AC，根据勾股定理，得

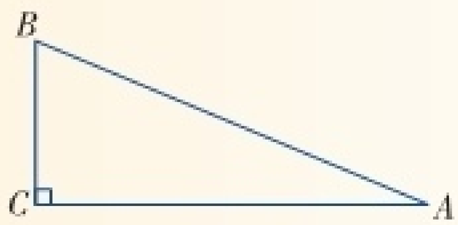
$$AC^2=AB^2-BC^2=5^2-3^2=16.$$

于是 $$AC=4.$$

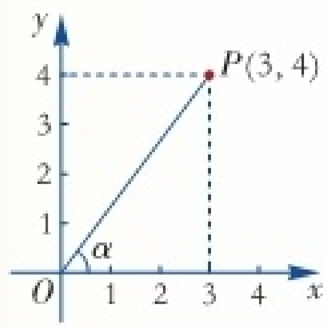
因此 $$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}.$$

练习

1. 如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=13$，$BC=5$．求 $\sin A$，$\sin B$ 的值.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，在平面直角坐标系内有一点 $P(3,\ 4)$，连接 OP，求 OP 与 x 轴正方向所夹锐角 α 的正弦值.

动脑筋

如何求 $\sin 45°$的值？

如图 4–5，构造一个Rt$\triangle ABC$，使$\angle C=90°$，$\angle A=45°$.

于是 $$\angle B=45°.$$

从而 $$AC=BC.$$

根据勾股定理，得

$$AB^2=AC^2+BC^2=2BC^2.$$

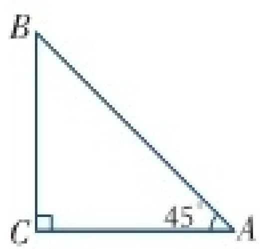


图 4–5

于是 $$AB=\sqrt{2}\,BC.$$

因此 $$\sin 45^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{\sqrt{2}\,BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

动脑筋

如何求 sin 60°的值?

如图 4-6，构造一个Rt△ABC，使$\angle C=90^\circ$，$\angle B=60^\circ$，则$\angle A=30^\circ$.

从而 $BC=\frac{1}{2}AB$. 根据勾股定理得

$$AC^2=AB^2-BC^2=AB^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2=\frac{3}{4}AB^2.$$

于是 $$AC=\frac{\sqrt{3}}{2}AB.$$

因此 $$\sin 60^\circ=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

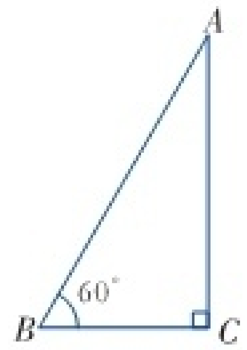


图 4-6

至此，我们已经知道了三个特殊角(30°，45°，60°)的正弦值，而对于一般锐角 α 的正弦值，我们可以利用计算器来求.

例如求 50°角的正弦值，可以在计算器上依次按键 sin 5 0 ，显示结果为 0.766 0⋯.

如果已知正弦值，我们也可以利用计算器求出它的对应锐角.

例如，已知 $\sin\alpha=0.707\,1$，依次按键 2ndF sin 0 . 7 0 7 1，显示结果为 44.999⋯，表示角 α 约等于 45°.

做一做

利用计算器计算：

(1) $\sin 40^\circ\approx$ __________(精确到 0.000 1)；

(2) $\sin 15^\circ 30'\approx$ __________(精确到 0.000 1)；

(3) 若 $\sin\alpha=0.522\,5$，则 $\alpha\approx$ __________(精确到 0.1°)；

(4) 若 $\sin\alpha=0.809\,0$，则 $\alpha\approx$ __________(精确到 0.1°).

例 2 计算：$\sin^2 30° - \sqrt{2}\sin 45° + \sin^2 60°$.

解 $\sin^2 30° - \sqrt{2}\sin 45° + \sin^2 60°$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{4}$$

$$= 0.$$

我们把 $(\sin 30°)^2$ 简记为 $\sin^2 30°$.

练习

1. 用计算器求下列锐角的正弦值(精确到 0.000 1)：

(1) 35°； (2) 65°36′； (3) 80°54′.

2. 已知下列正弦值，用计算器求对应的锐角(精确到 0.1°)：

(1) $\sin\alpha = 0.807\ 1$； (2) $\sin\alpha = 0.866\ 0$.

3. 计算：

(1) $\sin^2 60° + \sin^2 45°$； (2) $1 - 2\sin 30°\sin 60°$.

探究

如图 4-7，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 都是直角三角形，其中 $\angle A = \angle D = \alpha$，$\angle C = \angle F = 90°$，则 $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$ 成立吗？为什么？

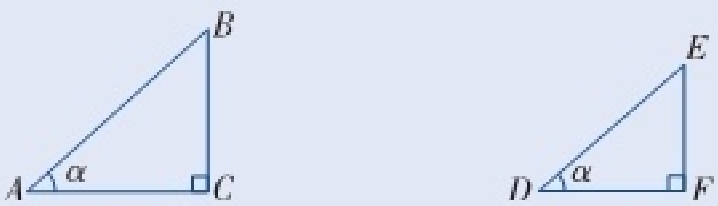


图 4-7

$\because$ $\angle A = \angle D = \alpha$，$\angle C = \angle F = 90°$，

$\therefore$ $\angle B = \angle E$.

从而 $\sin B = \sin E$.

因此 $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$.

由此可得，在有一个锐角等于 α 的所有直角三角形中，角 α 的邻边与斜边的比值是一个常数，与直角三角形的大小无关.

如图 4-8，在直角三角形中，我们把锐角 α 的邻边与斜边的比叫作角 α 的**余弦**(cosine)，记作 $\cos\alpha$，即

$$\cos\alpha=\frac{\text{角 }\alpha\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}.$$

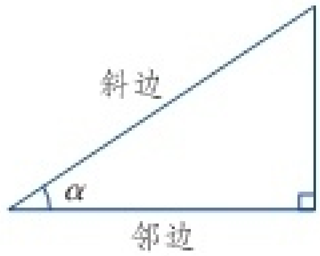


图 4-8

从上述探究和证明过程看出，对于任意锐角 α，有

$$\cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha),$$

从而有

$$\sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha).$$

例 3 求 $\cos 30^\circ$，$\cos 45^\circ$，$\cos 60^\circ$的值.

解 $\cos 30^\circ=\sin(90^\circ-30^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\cos 45^\circ=\sin(90^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\cos 60^\circ=\sin(90^\circ-60^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

对于一般锐角 α(30°，45°，60°除外)的余弦值，我们可用计算器来求.

例如求 50°角的余弦值，可以在计算器上依次按键 cos 5 0，显示结果为 0.642 7⋯.

如果已知余弦值，我们也可以利用计算器求出它的对应锐角.

例如，已知 $\cos\alpha=0.866\,1$，依次按键 2ndF cos 0 . 8 6 6 1，显示结果为 29.991 4⋯，表示角 α 约等于 30°.

做一做

利用计算器计算：

（1）$\cos 15° \approx$____________(精确到 0.000 1)；

（2）$\cos 50°48' \approx$____________(精确到 0.000 1)；

（3）若 $\cos\alpha = 0.965\,9$，则 $\alpha \approx$____________(精确到 0.1°)；

（4）若 $\cos\alpha = 0.258\,8$，则 $\alpha \approx$____________(精确到 0.1°).

例 4 计算：$\cos 30° - \sqrt{3}\cos 60° + \sqrt{2}\cos^2 45°$.

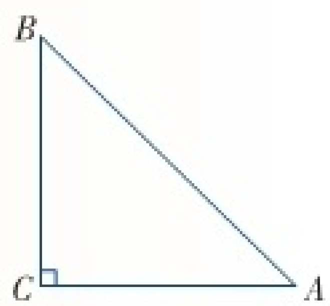
解 $\cos 30° - \sqrt{3}\cos 60° + \sqrt{2}\cos^2 45°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \times \frac{1}{2} + \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

练习

1. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$AC = 5$，$AB = 7$. 求 $\cos A$，$\cos B$ 的值.



(第 1 题图)

2. 用计算器求下列锐角的余弦值(精确到 0.000 1)：

（1）35°；　　（2）68°12′；

（3）9°42′.

3. 已知下列余弦值，用计算器求对应的锐角 α(精确到 0.1°).

（1）$\cos\alpha = 0.108\,7$；　　（2）$\cos\alpha = 0.708\,1$.

4. 计算：

（1）$\cos^2 60° - \sin^2 45°$；

（2）$1 - 2\cos 30° \cos 45°$.

习题 4.1

A 组

1. 计算：

（1）构造一个直角三角形，求 $\sin 30°$，$\cos 30°$，$\cos 60°$的值；

（2）构造一个直角三角形，求 $\cos 45°$的值.

2. 计算：

（1）$\sin^2 30° + \sin^2 45°$；　　（2）$1 + 2\sin 60° \sin 45°$.

3. 用计算器求下列锐角的正弦值(精确到 0.000 1)：

（1）$15°$；　　（2）$68°24'$；

（3）$88°36'$.

4. 已知正弦值，求相应的锐角 α(精确到 $0.1°$)：

（1）$\sin \alpha = 0.315\,2$；　　（2）$\sin \alpha = 0.996\,2$.

5. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$BC = 7$ cm，$AB = 8$ cm，求 $\cos A$，$\cos B$ 的值.

6. 用计算器求下列锐角的余弦值(精确到 0.000 1)：

（1）$8°$；　　（2）$26°12'$；

（3）$83°24'$.

7. 已知余弦值，求相应的锐角 α(精确到 $0.1°$)：

（1）$\cos \alpha = 0.315\,2$；　　（2）$\cos \alpha = 0.516\,8$.

8. 求下列各式的值.

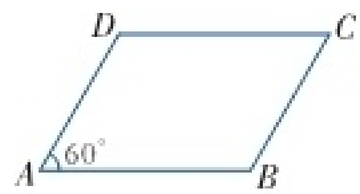
（1）$\sin^2 45° + \cos^2 45°$；　　（2）$\cos 30° \cos 45° \cos 60°$；

（3）$2\cos^2 60° - 1$；　　（4）$\cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$.

B 组

9. 设 α 是任一锐角，求证：$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

10. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB = 60$，$AD = 45$，$\angle A = 60°$，求四边形 $ABCD$ 的面积.



(第 10 题图)

4.2 正　切

我们已经知道，在直角三角形中，当一个锐角的大小确定时，那么不管这个三角形的大小如何，这个锐角的对边(或邻边)与斜边的比值也就确定(是一个常数). 那么这个锐角的对边与邻边的比值是否也是一个常数呢？

探究

如图 4-9，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 都是直角三角形，其中 $\angle A=\angle D=\alpha$，$\angle C=\angle F=90°$，则 $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{EF}{DF}$ 成立吗？为什么？

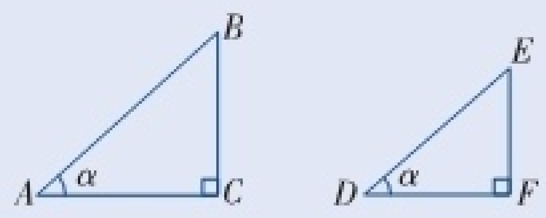


图 4-9

$\because$　$\angle A=\angle D=\alpha$，$\angle C=\angle F=90°$，

$\therefore$　$\mathrm{Rt}\triangle ABC \backsim \mathrm{Rt}\triangle DEF$.

$\therefore$　$\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{AC}{DF}$.

即　$BC\cdot DF=AC\cdot EF$，

$\therefore$　$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{EF}{DF}$.

由此可得，在有一个锐角等于 α 的所有直角三角形中，角 α 的对边与邻边的比值是一个常数，与直角三角形的大小无关.

如图 4-10，在直角三角形中，我们把锐角 α 的对边与邻边的比叫作角 α 的**正切**(tangent)，记作 $\tan\alpha$，即

$$\tan\alpha=\frac{\text{角 }\alpha\text{ 的对边}}{\text{角 }\alpha\text{ 的邻边}}.$$

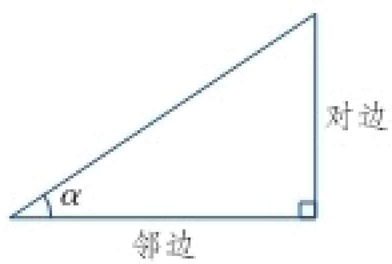


图 4-10

动脑筋

如何求 tan 30°，tan 60°的值呢？

如图 4-11，构造一个 Rt$\triangle ABC$，使$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，于是 $BC=\frac{1}{2}AB$，$\angle B=60°$.

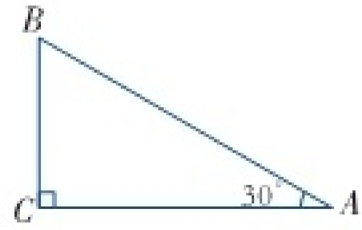


图 4-11

从而 $$AC^2=AB^2-BC^2=(2BC)^2-BC^2=3BC^2.$$

由此得出 $$AC=\sqrt{3}BC.$$

因此 $$\tan 30°=\frac{BC}{AC}=\frac{BC}{\sqrt{3}BC}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\tan 60°=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{3}BC}{BC}=\sqrt{3}.$$

做一做

求 tan 45°的值.

现在我们把 30°，45°，60°的正弦、余弦、正切值列表归纳如下：

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

对于一般锐角 α(30°，45°，60°除外)的正切值，我们也可用计算器来求.

例如求 25°角的正切值，可以在计算器上依次按键 tan 2 5 ，显示结果为 0.466 3….

如果已知正切值，我们也可以利用计算器求出它的对应锐角.

例如，已知 $\tan\alpha=0.8391$，依次按键 2ndF tan 0 . 8 3 9 1，显示结果为 40.000…，表示角 α 约等于 40°.

做一做

利用计算器计算：

（1）$\tan 21°15' \approx$ ________________（精确到 0.000 1）；

（2）$\tan 89°27' \approx$ ________________（精确到 0.000 1）；

（3）若 $\tan\alpha=1.2868$，则 $\alpha\approx$ __________（精确到 0.1°）；

（4）若 $\tan\alpha=108.5729$，则 $\alpha\approx$ ____________（精确到 0.1°）.

从正弦、余弦、正切的定义看到，任意给定一个锐角 α，都有唯一确定的比值 $\sin\alpha$（或 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$）与它对应. 并且我们还知道，当锐角 α 变化时，它的比值 $\sin\alpha$（$\cos\alpha$，$\tan\alpha$）也随之变化. 因此，我们把锐角 α 的正弦、余弦和正切统称为角 α 的**锐角三角函数**（trigonometric function of acute angle）.

例 计算：$\tan 45°+\tan^2 30°\tan^2 60°$.

解 $\tan 45°+\tan^2 30°\tan^2 60°$

$$=1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\times\left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$=1+\frac{1}{3}\times 3$$

$$=2.$$

练习

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=7$，$BC=5$，求 $\tan A$，$\tan B$ 的值.

2. 用计算器求下列锐角的正切值（精确到 0.000 1）：

（1）35°；　　（2）68°12′；　　（3）9°42′.

3. 已知下列正切值，用计算器求对应的锐角 α（精确到 0.1°）.

（1）$\tan\alpha=0.1087$；　　（2）$\tan\alpha=89.7081$.

4. 计算：

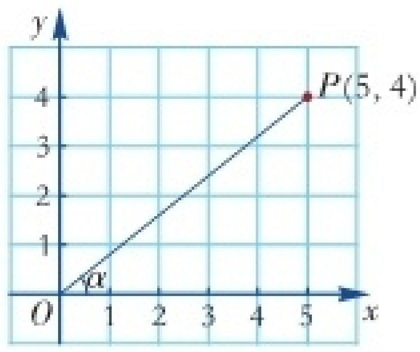
（1）$1+\tan^2 60°$；　　（2）$\tan 30°\cos 30°$.

习题 4.2

A 组

1. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=12$ cm，$AB=13$ cm，求 $\tan A$，$\tan B$ 的值.

2. 如图，在平面直角坐标系内有一点$P(5,4)$，连接 OP，求 OP 与 x 轴正方向所夹锐角 α 的正切值.



（第 2 题图）

3. 求下列各式的值：

（1）$\dfrac{\sin 30°}{\tan 30°}$；　　（2）$\tan 30° \tan 60°$；

（3）$\dfrac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$；　　（4）$\dfrac{\tan 60°-\tan 45°}{1+\tan 60° \tan 45°}$.

B 组

4. 设 α 是任一锐角，求证：$\tan \alpha=\dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

5. 用计算器求锐角 α 的三角函数值，并将结果（精确到 0.001）填入下表：

锐角 α	…	10°	20°	40°	50°	70°	80°	…
$\sin \alpha$	…							…
$\cos \alpha$	…							…
$\tan \alpha$	…							…

由上表你可以猜测出锐角 α 在其度数不断增大的情况下，它的三角函数值是如何变化的吗？

4.3 解直角三角形

在图形的研究中，直角三角形是常见的三角形之一，因而人们经常会遇到求直角三角形的边长或角度等问题. 对于这类问题，我们一般利用锐角三角函数的有关知识来解决.

说一说

如图 4-12，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别记作 a，b，c.

(1)直角三角形的三边之间有什么关系？

(2)直角三角形的锐角之间有什么关系？

(3)直角三角形的边和锐角之间有什么关系？

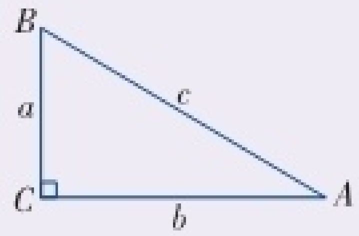


图 4-12

$a^2+b^2=c^2$(勾股定理)，

$\angle A+\angle B=90°$.

$\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$，

$\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$，

$\tan A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\dfrac{a}{b}$.

议一议

在一个直角三角形中，除直角外有 5 个元素(3 条边、2 个锐角)，只要知道其中的几个元素就可以求出其余的元素？

已知 2 个角不行.

已知 2 个元素，且至少有 1 个是边就可以了.

在直角三角形中，除直角外有 5 个元素(即 3 条边、2 个锐角)，只要知道其中的 2 个元素(至少有 1 个是边)，就可以求出其余的 3 个未知元素.

例 1 如图 4-13，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$a=5$，求$\angle B$，b，c.

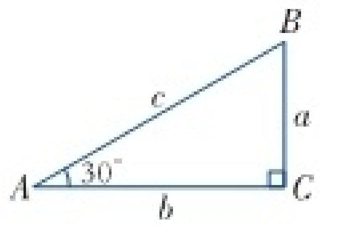


图 4-13

解 $\angle B=90°-\angle A=90°-30°=60°$.

又 ∵ $\tan B=\dfrac{b}{a}$，

∴ $b=a\cdot\tan B=5\cdot\tan 60°=5\sqrt{3}$.

∵ $\sin A=\dfrac{a}{c}$，

∴ $c=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{5}{\sin 30°}=\dfrac{5}{\frac{1}{2}}=10$.

还可以用勾股定理求 c.

像这样，我们把在直角三角形中利用已知元素求其余未知元素的过程叫作**解直角三角形**.

例 2 如图 4-14，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\cos A=\dfrac{1}{3}$，$BC=5$，试求 AB 的长.

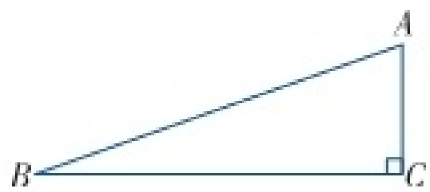


图 4-14

解 ∵ $\angle C=90°$，$\cos A=\dfrac{1}{3}$，

∴ $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{3}$.

设 $AB=x$，则 $AC=\dfrac{1}{3}x$.

又 $AB^2=AC^2+BC^2$，

∴ $x^2=\left(\dfrac{1}{3}x\right)^2+5^2$.

解得 $x_1=\dfrac{15\sqrt{2}}{4}$，$x_2=-\dfrac{15\sqrt{2}}{4}$（舍去）.

∴ AB 的长为$\dfrac{15\sqrt{2}}{4}$.

练习

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=45°$，$b=3$ cm，求 a，c 的长度.

2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$a=6$ cm，$c=10$ cm，求 b，$\angle A$，$\angle B$（角度精确到 1°）.

3. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$c=16$ cm，求 a，b 的长度.

习题 4.3

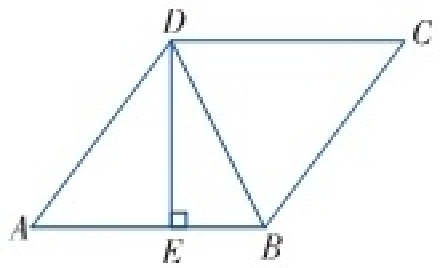
A 组

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$.

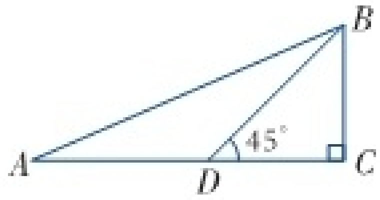
(1) 若 $\angle A=60°$，$b=10\sqrt{3}$，求 a，c；

(2) 若 $c=2\sqrt{3}$，$b=3$，求 a，$\angle A$.

2. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$DE\perp AB$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$，求 $\tan\angle DBE$ 的值（提示：可设 $AD=5x$，其中 $x>0$）.



（第 2 题图）

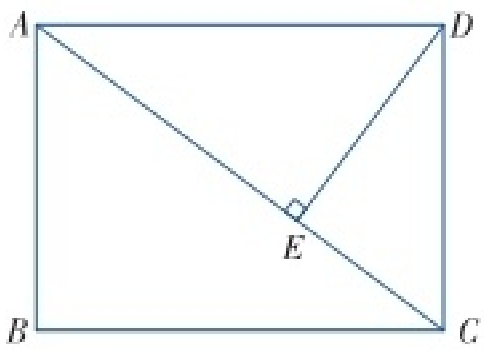


（第 3 题图）

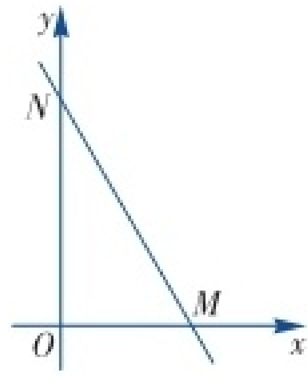
3. 如图，在 △ABC 中，已知 $\angle C=90°$，$\sin A=\dfrac{2}{5}$，D 为 AC 上一点，$\angle BDC=45°$，$DC=6$，求 AB 的长.

B 组

4. 如图，在矩形$ABCD$中，$DE\perp AC$，垂足为点E，设$\angle ADE=\alpha$，且$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$AB=3$，求AD的长.



（第 4 题图）



（第 5 题图）

5. 如图，已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象与x轴的正半轴交于点$M(2,0)$，与y轴的正半轴交于点N，且$\angle OMN=60°$. 求此一次函数的表达式.

4.4 解直角三角形的应用

在日常生活中，我们经常会碰到一些与直角三角形有关的实际问题. 对于这些问题，我们可以用所学的解直角三角形的知识来加以解决.

动脑筋

某探险者某天到达如图 4–15 所示的点 A 处时，他准备估算出离他的目的地——海拔为 3 500 m 的山峰顶点 B 处的水平距离. 你能帮他想出一个可行的办法吗？

图 4–15

如图 4–16，BD 表示点 B 的海拔，AE 表示点 A 的海拔，$AC \perp BD$，垂足为点 C. 先测量出海拔 AE，再测出仰角 $\angle BAC$，然后用锐角三角函数的知识就可求出 A，B 两点之间的水平距离 AC.

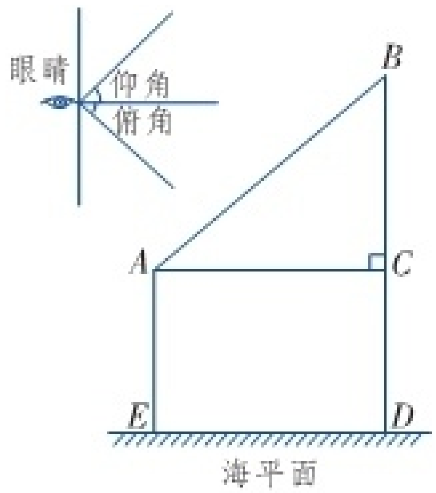


图 4–16

做一做

如图 4–16，如果测得点 A 的海拔 AE 为 1 600 m，仰角 $\angle BAC = 40°$，求 A，B 两点之间的水平距离 AC(结果保留整数).

如图 4-16，$\because$ $BD=3\ 500$ m，$AE=1\ 600$ m，$AC\perp BD$，$\angle BAC=40°$，

$\therefore$ 在Rt$\triangle ABC$中，$\tan\angle BAC=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{BD-AE}{AC}=\tan 40°$.

$\therefore$ $\dfrac{3\ 500-1\ 600}{AC}\approx 0.839\ 1$，即 $AC\approx 2\ 264$(m).

因此，A，B 两点之间的水平距离 AC 约为 2 264 m.

例 1 如图 4-17，在离上海东方明珠塔底部 1 000 m 的 A 处，用仪器测得塔顶的仰角 $\angle BAC$ 为 25°，仪器距地面高 AE 为 1.7 m. 求上海东方明珠塔的高度 BD(结果精确到 1 m).

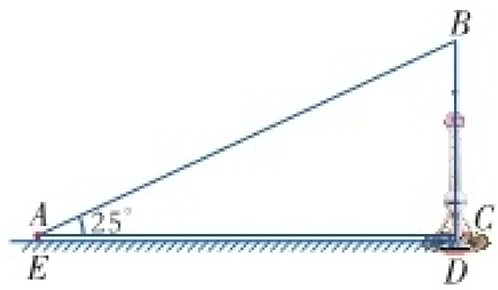


图 4-17

解 如图 4-17，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=25°$，$AC=1\ 000$ m，因此

$$\tan 25°=\frac{BC}{AC}=\frac{BC}{1\ 000}.$$

从而 $BC=1\ 000\times\tan 25°\approx 466.3$(m).

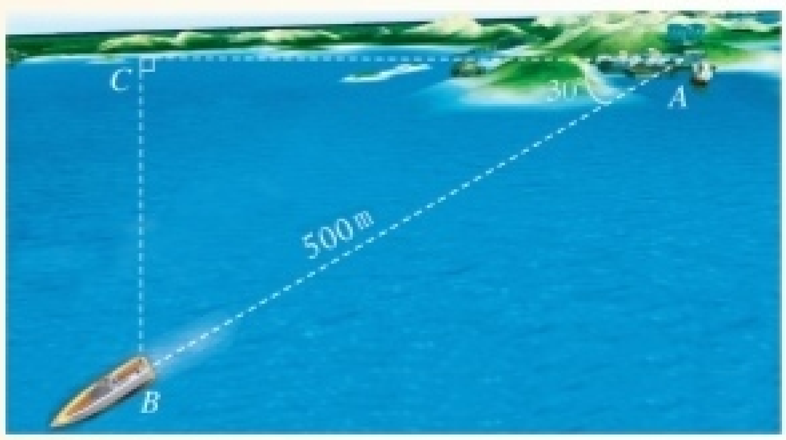
因此，上海东方明珠塔的高度

$$BD=466.3+1.7=468(\text{m}).$$

答：上海东方明珠塔的高度 BD 为 468 m.

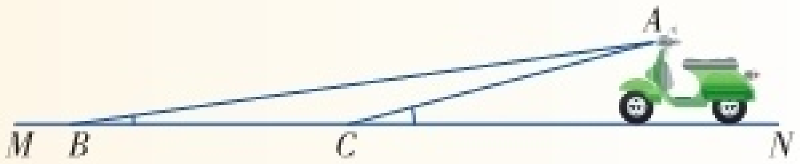
练习

1. 如图，一艘游船在离开码头 A 后，以和河岸成 30°角的方向行驶了 500 m 到达 B 处，求 B 处与河岸的距离 BC.



(第 1 题图)

2. 如图，某厂家新开发的一种电动车的大灯A射出的光线AB，AC与地面MN所形成的夹角$\angle ABN$，$\angle ACN$分别为8°和15°，大灯A与地面的距离为1 m，求该车大灯照亮地面的宽度BC(不考虑其他因素，结果精确到0.1 m)．



(第 2 题图)

观察

如图 4–18，从山脚到山顶有两条路AB与BD，问哪条路比较陡?

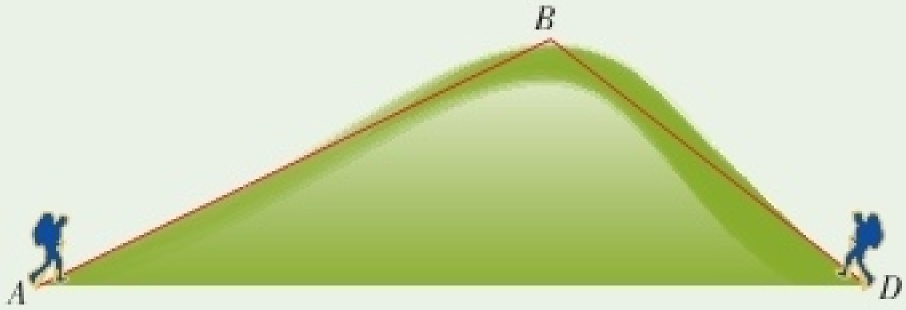


图 4–18

如图 4–19，从山坡脚下点A上坡走到点B时，升高的高度h(即线段BC的长度)与水平前进的距离l(即线段AC的长度)的比叫作坡度，用字母i表示，即

$$i=\frac{h}{l}$$（坡度通常写成$1:m$的形式）．

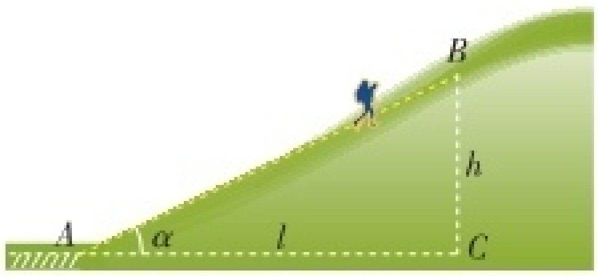


图 4–19

在图 4–19 中，$\angle BAC$叫作坡角(即山坡与地平面的夹角)，记作α，显然，

坡度等于坡角的正切，即 $i=\dfrac{h}{l}=\tan\alpha$.

坡度越大，山坡越陡.

例 2 如图 4-20，一山坡的坡度为 $i=1:2$. 小刚从山脚 A 出发，沿山坡向上走了 240 m 到达点 C. 这座山坡的坡角是多少度？小刚上升了多少米？(角度精确到 0.01°，长度精确到 0.1 m)

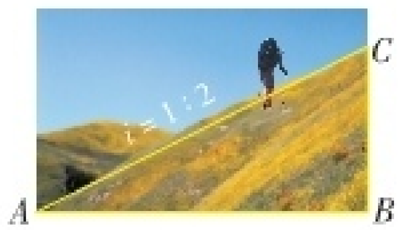


图 4-20

解 用 α 表示坡角的大小，由题意可得 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}=0.5$，

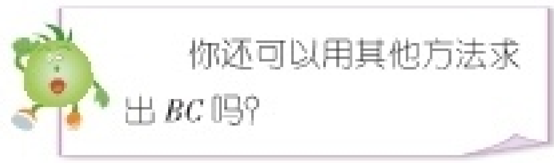
因此 $\alpha\approx 26.57°$.

如图 4-20，在 Rt△ABC 中，$\angle B=90°$，$\angle A=26.57°$，$AC=240$ m，

因此 $\sin\alpha=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{BC}{240}$.

从而 $BC=240\times\sin 26.57°$

≈ 107.3(m).



答：这座山坡的坡角约为 26.57°，小刚上升了约 107.3 m.

例 3 如图 4-21，一艘船以 40 km/h 的速度向正东航行，在 A 处测得灯塔 C 在北偏东 60°方向上，继续航行 1 h 到达 B 处，这时测得灯塔 C 在北偏东 30°方向上. 已知在灯塔 C 的四周 30 km 内有暗礁. 问这艘船继续向东航行是否安全？

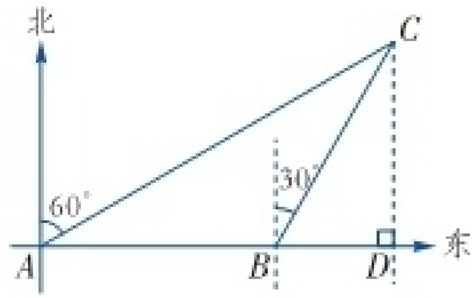


图 4-21

分析 这艘船继续向东航行是否安全，取决于灯塔 C 到 AB 航线的距离是否大于 30 km. 如果大于 30 km，则安全，否则不安全.

解 作 $CD\perp AB$，交 AB 延长线于点 D. 设 $CD=x$ km.

在 Rt△ACD 中，$\because\ \tan\angle CAD=\dfrac{CD}{AD}$，

$\therefore\ AD=\dfrac{CD}{\tan\angle CAD}=\dfrac{x}{\tan 30°}$.

同理，在 Rt△BCD 中，$BD=\dfrac{CD}{\tan\angle CBD}=\dfrac{x}{\tan 60°}$.

$\because\ AB=AD-BD$，

$\therefore \quad \frac{x}{\tan 30^\circ} - \frac{x}{\tan 60^\circ} = 40.$

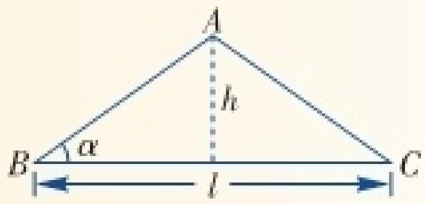
解得　$x = 20\sqrt{3}$.

又　$20\sqrt{3} \approx 34.64 > 30$,

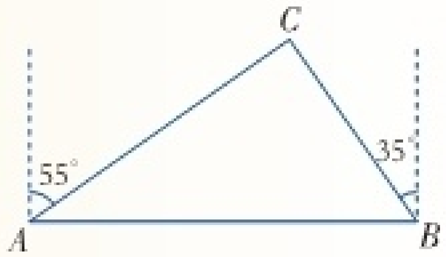
因此，该船能继续安全地向东航行.

练习

1. 一种等腰三角形坡屋顶的设计图如图所示. 已知屋顶的宽度 l 为 10 m，坡屋顶的高度 h 为 3.5 m，求斜面 AB 的长度和坡角 α（长度精确到 0.1 m，角度精确到1°).



（第 1 题图）



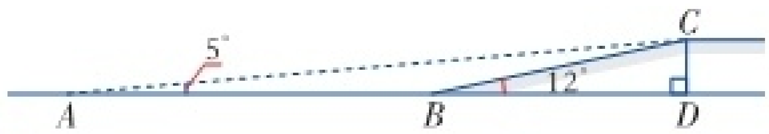
（第 2 题图）

2. 某次军事演习中，有三艘船在同一时刻向指挥所报告：A 船说 B 船在它的正东方向，C 船在它的北偏东 55°方向；B 船说 C 船在它的北偏西 35°方向；C 船说它到 A 船的距离比它到 B 船的距离远 40 km. 求 A，B 两船的距离（结果精确到 0.1 km).

习题 4.4

A 组

1. 如图，有一段斜坡 BC 长为 10 m，坡角 $\angle CBD = 12°$，为方便残疾人的轮椅通行，现准备把坡角降为 5°.

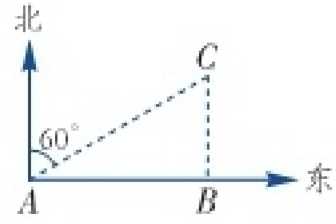


（第 1 题图）

(1) 求坡高 CD(结果精确到 0.1 m)；

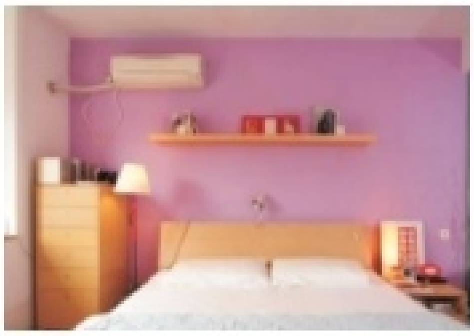
(2) 求斜坡新起点 A 与原起点 B 的距离(结果精确到 0.1 m).

2. 如图所示，渔船在 A 处看到灯塔 C 在北偏东 60°方向上，渔船向正东方向航行了 12 km 到达 B 处，在 B 处看到灯塔 C 在正北方向上，这时渔船与灯塔 C 的距离是多少？

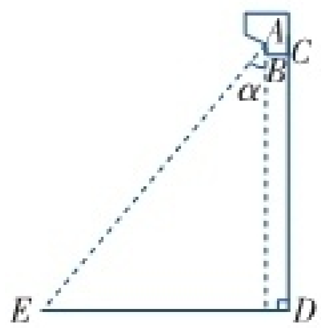


(第 2 题图)

3. 图(1)是一间安装有壁挂式空调的卧室的一部分，图(2) 是该空调挂机的侧面示意图. 已知空调挂机底部 BC 垂直于墙面 CD，且当导风板所在直线 AE 与竖直线 AB 的夹角 α 为 40°时，空调风刚好吹到床的外边沿 E 处. 若 $AB=0.02$ m，$BC=0.2$ m，床铺长 $DE=2.3$ m，求空调挂机底部位置距离床的高度 CD(结果精确到 0.1 m).



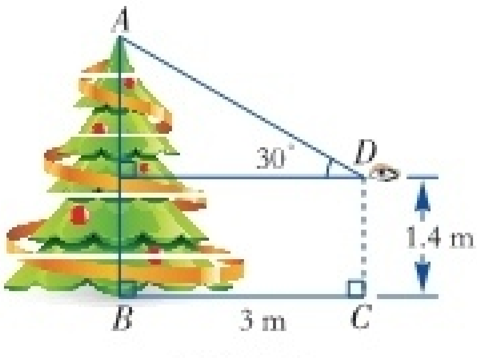
(1)



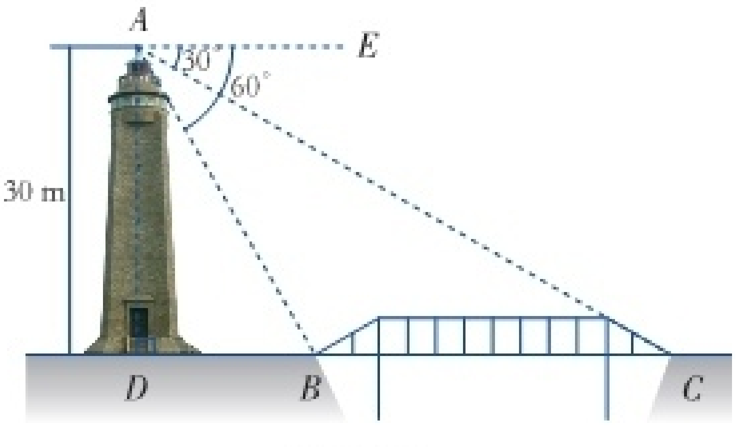
(2)

(第 3 题图)

4. 如图所示，某同学站在距离圣诞树 3 m 的位置 C 处. 已知他的目高 CD 为 1.4 m. 若他测得树顶的仰角为30°，求该圣诞树的高度(结果精确到 0.1 m).



(第 4 题图)

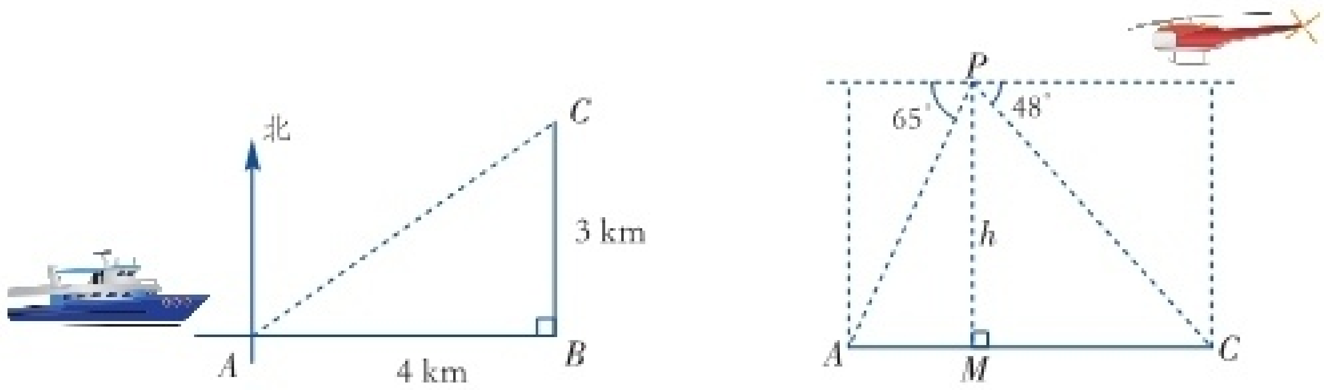


(第 5 题图)

5. 如图，塔 AD 的高度为 30 m，塔的底部 D 与桥 BC 位于同一条水平直线上. 由塔顶 A 测得 B 和 C 的俯角 $\angle EAB$，$\angle EAC$ 分别为 60°和 30°. 求 BD，BC 的长(结果精确到 0.01 m).

B 组

6. 如图(a)，A，B 和 C 是三个小岛. 一艘船由 A 处出发向正东方向航行 4 km 到达 B 处，然后向正北方向航行 3 km 到达 C 处.



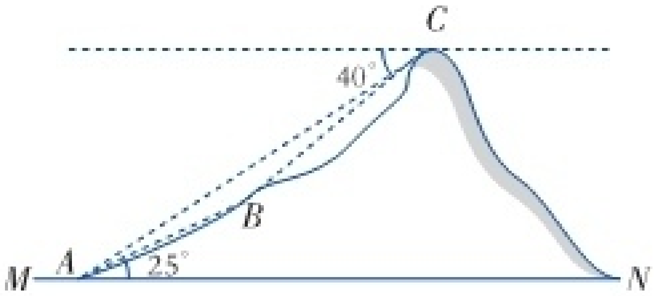
(a)　　　　(b)

(第 6 题图)

(1) 求由 A 测得 C 的方位角的大小(结果精确到 1°).

(2) 如图(b)，直升机由 C 飞往 A，其飞行高度一直保持在海平面以上的 h km. 当直升机飞到 P 处时，由 P 测得 C 和 A 的俯角分别是 48°和 65°. 已知 A，C，P 和海平面上一点 M 都在同一个平面上，且 M 位于 P 的正下方，求 h(结果精确到 0.1 km).

7. 如图，MN 表示水平地面，由地面上 A 处测得山上 B 处的仰角是 25°，由山顶 C 处测得 B 处的俯角是 40°. 若 $AB : BC = 2 : 3$，求由 A 处测得 C 处的仰角(结果精确到 0.1°).



(第 7 题图)

IT教室

探究一个角的正弦值与余弦值之间的关系

利用计算机可以探究出任意一个角的正弦值与余弦值之间的关系.

1. 打开几何画板，任意绘制一条线段 AB，选择线段 AB 和点 B，选择菜单【构造】中的【垂线】，如图 1.

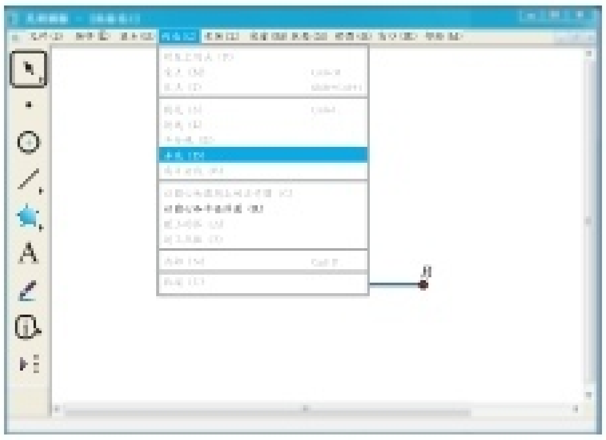


图 1

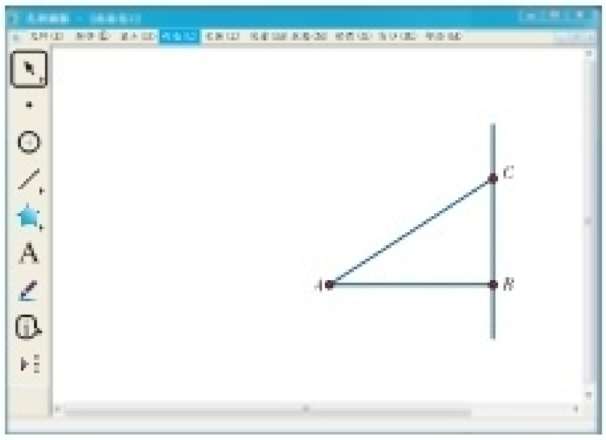


图 2

2. 在所得的垂线上任意选取一点 C，选择菜单【构造】中的【线段】，连接 AC 和 BC，如图 2.

3. 选取直线 BC，选择菜单【显示】中的【隐藏对象】，将直线 BC 隐藏，度量 $\angle CAB$ 的大小，如图 3.

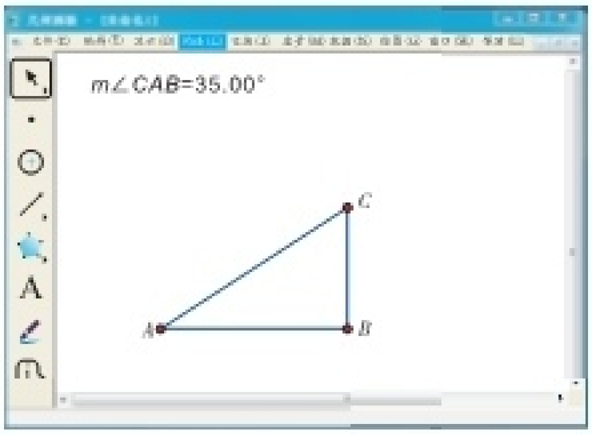


图 3

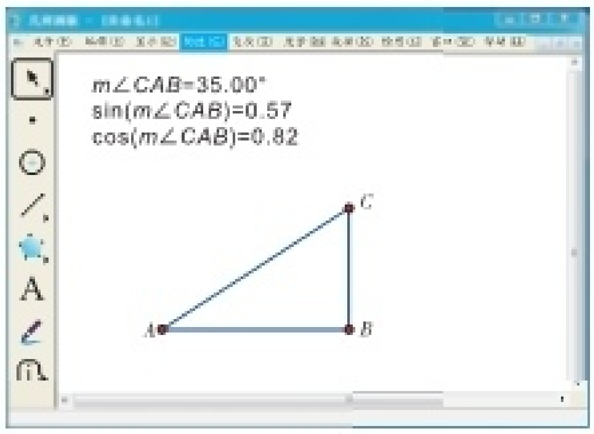


图 4

4. 在菜单【数据】中选择【计算】，在计算器面板中点击“函数”，并选择“sin”，点击工作区中的 $m\angle CAB$，最后按“确定”，便可求得 $\sin\angle CAB$ 的值，同样，可求 $\cos\angle CAB$ 的值，如图 4.

5. 先用计算工具求出 $\sin^2\angle CAB$和$\cos^2\angle CAB$的值，再求 $\sin^2\angle CAB+\cos^2\angle CAB$的值，如图 5.

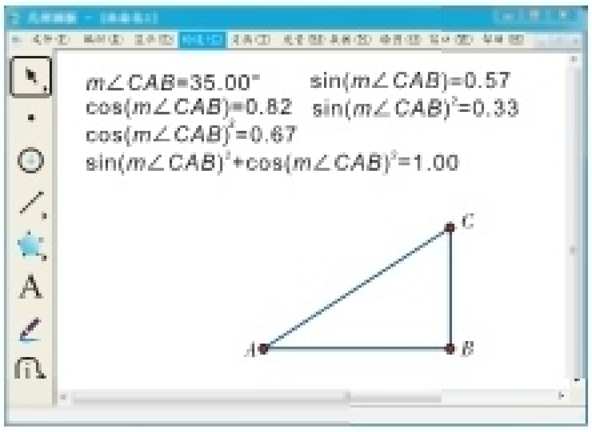


图 5

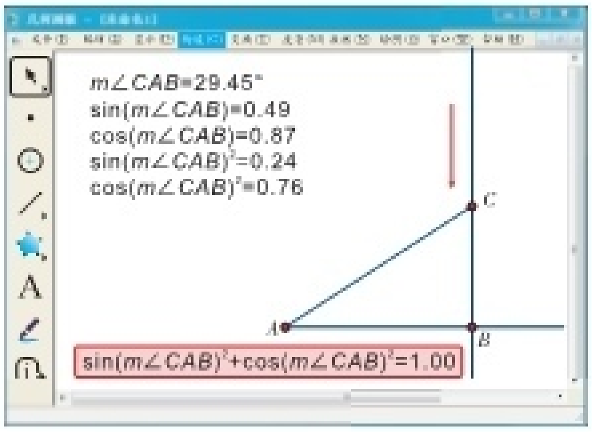


图 6

6. 移动点 C 以改变$\angle CAB$ 的大小，观察$\sin^2\angle CAB+\cos^2\angle CAB$ 的值，你能得出什么结论？如图 6.

7. 请用计算机探究一个角和它的余角(即 α 和 $90°-\alpha$)的三角函数值之间的关系.

小结与复习

回顾

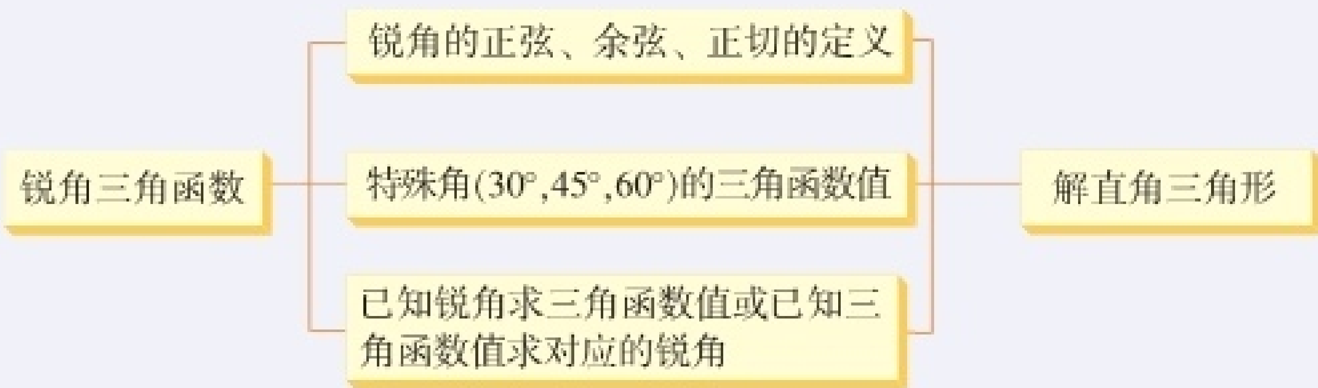
1. 在直角三角形中，锐角的正弦、余弦、正切分别是哪两条边的比？

2. 30°，45°，60°角的正弦值、余弦值、正切值分别是多少？

3. 在直角三角形中，已知几个元素就可以解直角三角形？

4. 锐角三角函数在生活中有着广泛的应用，试结合实例谈谈如何将实际问题转化为解直角三角形的问题.

本章知识结构



注意

1. 在直角三角形中，任一锐角的三角函数值只与角的大小有关，而与直角三角形的大小无关.

2. 在直角三角形中，已知一条边和一个角，或已知两条边，就可以求出其他的边和角.

3. 有些关于图形的实际问题，我们可以结合已知条件，恰当地构造出直角三角形，画出图形，将实际问题转化为解直角三角形的问题.

复习题 4

A 组

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=12$ cm，$BC=10$ cm，分别求$\angle A$，$\angle B$的正弦、余弦和正切值.

2. 求下列各式的值：

(1) $1-2\sin^2 30°$；　　(2) $\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°$；

(3) $\dfrac{\sin 45°}{\cos 60°}$；　　(4) $\dfrac{\tan 30°+\tan 45°}{1-\tan 30°\tan 45°}$.

3. 已知 $\tan\alpha=0.625$，α是锐角，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$的值(精确到 0.000 1).

4. 用计算器求下列锐角的正弦、余弦和正切值(精确到 0.000 1)：

(1) $3°15'$；　　(2) $68°6'$.

5. 已知锐角三角函数值，求相应的锐角(精确到 $1°$)：

(1) $\sin\alpha=0.328\ 6$；　　(2) $\cos\alpha=0.714\ 3$；

(3) $\tan\alpha=0.293\ 6$.

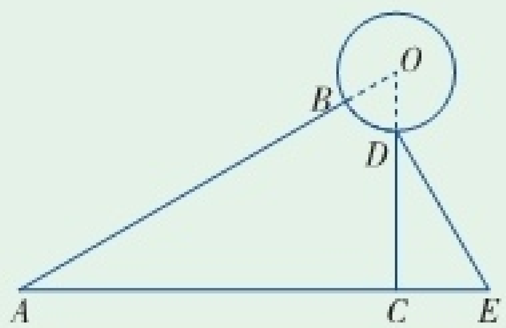
6. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$c=12$ cm，求$\angle B$，a，b.

7. 在菱形 $ABCD$ 中，已知对角线 AC，BD 的长度分别为 4.8 cm，3.6 cm，求菱形的边长以及内角$\angle A$，$\angle B$ 的大小(角度精确到 $1°$).

8. 某太阳能热水器的实物图和横断面示意图如图所示. 已知真空集热管 AB 与支架 CD 所在直线相交于点 O，且$OB=OD$. 支架 CD 与水平线 AE 垂直，$AB=150$ cm，$\angle BAC=30°$，另一根支架 $DE=76$ cm，$\angle CED=60°$.

(1) 求垂直支架 CD 的长度；

(2) 求 OD 的长度.

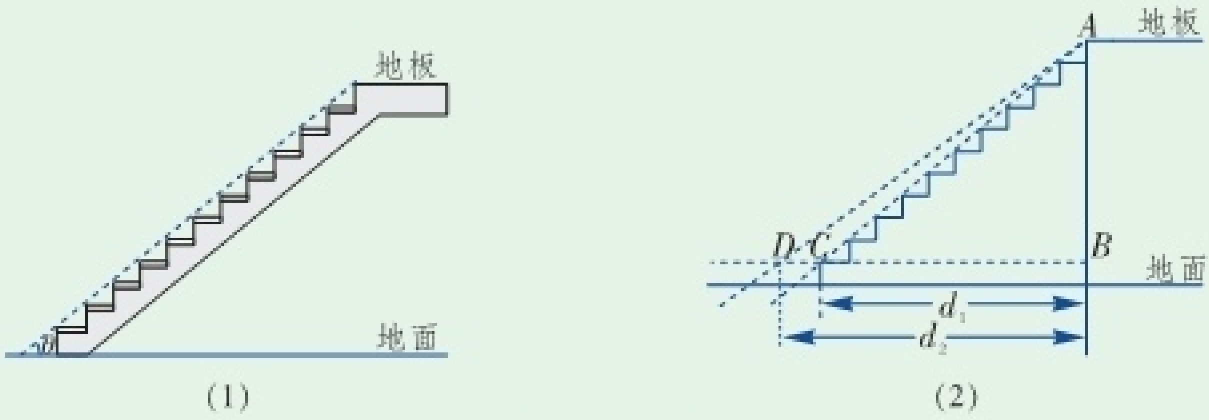


(第 8 题图)

9. 小明(M)和小丽(N)两人一前一后在水平地面上放风筝，结果风筝在空中E处纠缠在一起，如图所示. 若$\angle EMF=20°$，$\angle ENF=30°$，且小丽、小明之间的距离MN为25 m，则点E到地面的距离ED为多少(结果保留两位小数)？

(第 9 题图)

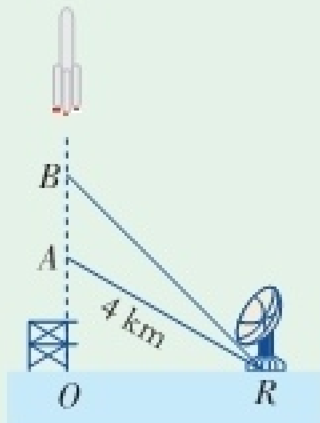
10. 如图(1)，虚线为楼梯的倾斜度，虚线与地面所形成的夹角为倾角θ. 设计者准备将楼梯的倾角由40°减小至36°，这样楼梯所占用地面的长度将由d_1增加到d_2，如图(2)所示. 已知$d_1=4$ m，求楼梯占用地面增加的长度DC(结果精确到0.01 m).



(第 10 题图)

B 组

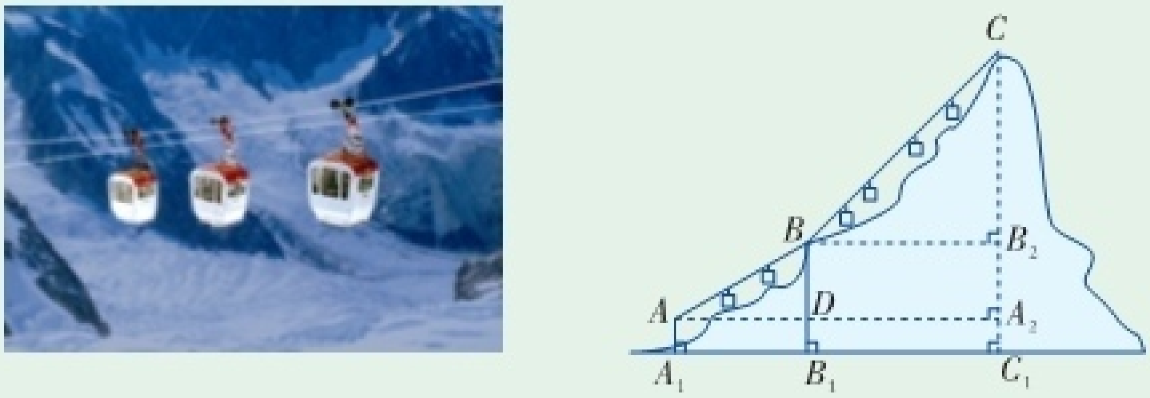
11. 如图，一枚运载火箭从地面O处发射，当火箭到达点A处时，地面R处的雷达站测得AR的距离是4 km，仰角为30°. 5 s后，火箭直线上升到达点B处，此时地面R处的雷达站测得B处的仰角为45°. 求火箭从A到B处的平均速度（结果精确到1 m/s).



(第 11 题图)

12. 在Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，斜边AB上的高$CD=3.8$ cm，$AD=4.6$ cm，求$\angle A$，$\angle B$以及AC，BC，AB的长度(长度精确到0.1 cm，角度精确到1°).

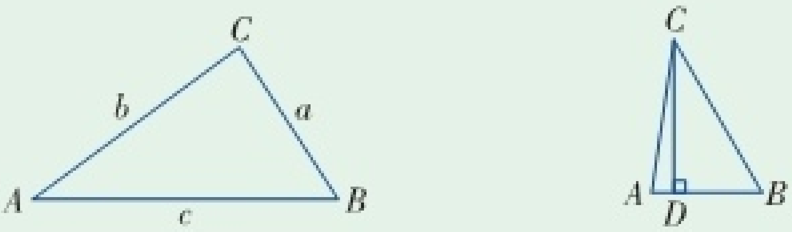
13. 如图，A，B，C 表示修建在一座比较险峻的山上的三个缆车站的位置，AB，BC 表示连接缆车站的钢缆. 已知 A，B，C 所处位置的海拔 AA_1，BB_1，CC_1 分别为 124 m，400 m，1 100 m，钢缆 AB 与水平线 AA_2 的夹角为 30°，钢缆 BC 与水平线 BB_2 的夹角为 45°，求钢缆 AB 和 BC 的总长度(结果精确到 1 m).



(第 13 题图)

C 组

14. 在锐角△ABC 中，∠A，∠B，∠C 的对边分别为 a，b，c，如图（1）所示.



（1）　（2）

(第 14 题图)

（1）△ABC 的面积 S 与∠A，b，c 之间有什么关系？

（2）求证：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$；

（3）如图（2），已知锐角△ABC 中，$AC:BC=7:8$，$\sin A=\dfrac{4}{7}\sqrt{3}$，又 $CD\perp AB$，垂足为点 D，$BD=8$. 求 AB 的长度.

测量物体的高度

古代人们是如何测量金字塔的高度的?

金字塔

据史料记载，古希腊数学家、天文学家泰勒斯(Thalēs，约前 624—约前 547)曾利用相似三角形的原理，测出了金字塔的高度.

他的方法是：在金字塔顶部的影子处立一根杆子，借助太阳光线构成两个相似的三角形，塔高与杆高之比等于两者影长之比，从而推算出金字塔的高度.

在我国古代许多文献中也提到一些如何测量物体的高度的文字，例如

"今有一旗杆，
不知长与短.
日影来测量，
便知高与矮."

对于一些难以直接测量高度、距离的实际问题，我们可以利用所学的数学知识(如三角形全等、三角形相似、直角三角形中边和角的关系等)来加以解决. 在测量工具缺乏的情况下，我们可以因地制宜，就地取材，例如利用太阳光线，利用人的脚步等方法测量高度、距离等.

下面我们利用解直角三角形的知识来研究如何测量学校旗杆的高度.

操作步骤

1. 全班同学分组，每组 5~10 人.

2. 制订研究方案，明确研究步骤.

研究步骤：

（1）准备采取哪几种方法来测量国旗旗杆的高度，与小组同学交流方案的可行性，这些方法的原理是什么，并在笔记本上草拟你的方案；

（2）准备测量仪器；

（3）对旗杆进行测量，并记录测量数据(测量 3 次，取数据的平均值)；

（4）运用所学的知识求出旗杆的高度；

（5）撰写探索研究总结报告，并向全班同学展示小组研究成果，全班进行交流、评比.

想一想

对同一根旗杆测得的结果一样吗？如不同，这是什么原因造成的？以小组形式探讨是否可以完善方案，使得测量的数据更准确.

第5章
用样本推断总体

某农科院在某地区选择了自然条件相同的两个试验区，在种植面积相同的条件下，用相同的管理技术试种了两个品种的水稻，如何确定哪个品种的水稻在该地区更有推广价值呢？

学完本章知识，你就会知道用样本去推断总体的方法，在大多数情况下，当样本容量足够大时，用简单随机样本的统计量去对总体作出相应的估计是合理的.

5.1 总体平均数与方差的估计

议一议

阅读下面的报道，回答问题.

新京报网 > 时事 > 北京 > 正文

北京市将启动2012年度人口抽样调查工作

2012-10-20 02:32:10 新京报

新京报讯 （记者蒋彦鑫）北京市将启动2012年度人口抽样调查工作，共1289个小区纳入范畴。调查结果将作为城市规划的依据，并监测人口调控目标的实现程度。

从去年起，北京每年开展年度人口抽样调查，以便掌握人口性别、年龄、就业、迁移等基本变化情况，及时监测人口调控目标的实现程度。市统计局表示，2012年年度人口抽样调查涉及275个街道和乡镇、646个社区居（村）委会、1289个调查小区，这些小区分布在各个区县。

据了解，此次抽样调查是以北京人口普查数据为基数，在每个区按照人口总量2%的比例进行抽样。在样本选取的过程中，选取的小区需要能在本区县人口结构、人口规模等方面都有代表性。其中，抽样的核心指标包括流动人口比重、本地区人口出生率和死亡率、城乡属性等，以确保抽取样本的科学性。

根据该抽样的结果，将推算出每年北京人口总量以及增长的情况。该结果可以及时反映北京人口调控目标的实现情况，人口增长的特点等，并作为今后城市规划、各项政策颁布实施和人口调控的重要依据。

从上述报道可见，北京市统计局进行 2012 年度人口调查采用的是什么调查方式？

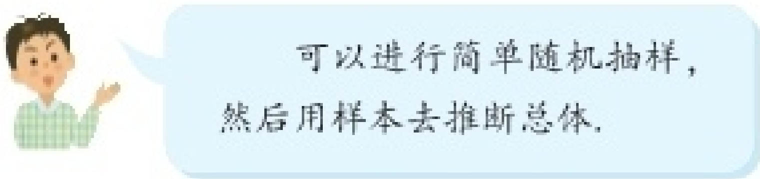
我们在研究某个总体时，一般用数据表示总体中每个个体的某种数量特性，所有这些数据组成一个总体，而样本则是从总体中抽取的部分数据，因此，样本蕴含着总体的许多信息，这使得我们有可能通过样本的某些特性去推断总体的相应特性.

从总体中抽取样本，然后通过对样本的分析，去推断总体的情况，这是统计的基本思想. 用样本平均数、样本方差分别去估计总体平均数、总体方差就是这一思想的一个体现. 实践和理论都表明：对于简单随机样本，在大多数情况下，当样本容量足够大时，这种估计是合理的.

说一说

（1）如何估计某城市所有家庭一年内平均丢弃的塑料袋个数？

（2）在检查甲、乙两种棉花的纤维长度时，如何估计哪种棉花的纤维长度比较整齐？



由于简单随机样本客观地反映了实际情况，能够代表总体，因此我们可用简单随机样本的平均数与方差分别去估计总体的平均数与方差. 例如，我们可以从某城市所有家庭中随机抽取一部分家庭，统计他们在一年内丢弃的塑料袋个数，然后求出它们的平均值，再用这个平均值去估计该城市所有家庭一年内平均丢弃的塑料袋个数. 同样，我们可以从甲、乙两种棉花中各抽取一定量的棉花，分别统计它们的纤维长度的方差，再用这两个方差分别去估计这两种棉花纤维长度的整齐性，方差小的棉花品种整齐性较好.

动脑筋

某农科院在某地区选择了自然条件相同的两个试验区，用相同的管理技术试种甲、乙两个品种的水稻各 100 亩. 如何确定哪个品种的水稻在该地区更有推广价值呢？

为了选择合适的稻种，我们需要关心这两种水稻的平均产量及产量的稳定性(即方差). 于是，待水稻成熟后，各自从这 100 亩水稻随机抽取 10 亩水稻，记录它们的亩产量(样本)，数据如下表所示：

种　类	每亩水稻的产量/kg									
甲	865	885	886	876	893	885	870	905	890	895
乙	870	875	884	885	886	888	882	890	895	896

可以求出，这 10 亩甲、乙品种的水稻的平均产量分别为：

$$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{10}(865+885+886+876+893+885+870+905+890+895)=885(\text{kg}),$$

$$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}(870+875+884+885+886+888+882+890+895+896)=885.1(\text{kg}).$$

由于这 10 亩水稻是简单随机抽取的，因此可以分别用这 10 亩水稻的平均产量去估计这两种水稻大面积种植后的平均产量.

由于在试验区这两种水稻的平均产量相差很小，从而我们可以估计出大面积种植这两种水稻后的平均产量也应相差很小，所以，单从平均产量这一角度来考虑，我们还不能确定哪种水稻更有推广价值. 因此，我们还需考虑这两种水稻产量的稳定性.

利用计算器，我们可计算出这 10 亩甲、乙品种水稻产量的方差分别为 129.6，59.09. 由于 $59.09<129.6$，即 $s_{乙}^2<s_{甲}^2$. 因此我们可以估计种植乙种水稻的产量要比种植甲种水稻的产量稳定. 从而我们可以得出：在该地区，种植乙种水稻更有推广价值.

例 一台机床生产一种直径为 40 mm 的圆柱形零件，在正常生产时，生产的零件的直径的方差应不超过 0.01. 如果超过 0.01，则机床应检修调整.

下表是某日 8:30—9:30 及 10:00—11:00 两个时段中各随机抽取 10 个零件量出的直径的数值(单位：mm)：

8:30—9:30	40	39.8	40.1	40.2	39.8	40.1	40.2	40.2	39.8	39.8
10:00—11:00	40	40	39.9	40	39.9	40.2	40	40.1	40	39.9

试判断在这两个时段内机床生产是否正常.

解 在 8:30—9:30 这段时间内生产的零件中，随机抽取的 10 个零件的直径的平均数 $\bar{x}_1$、方差 s_1^2 分别为：

$$\bar{x}_1=(40+39.8\times4+40.1\times2+40.2\times3)\div10=40.$$

$$s_1^2=\frac{(40-40)^2+(39.8-40)^2\times4+(40.1-40)^2\times2+(40.2-40)^2\times3}{10}=0.03.$$

在 10:00—11:00 这段时间内生产的零件中，随机抽取的 10 个零件的直径

的平均数 $\bar{x}_2$、方差 s_2^2 分别为：

$$\bar{x}_2=(5\times40+39.9\times3+40.2+40.1)\div10=40.$$

$$s_2^2=\frac{(40-40)^2\times5+(39.9-40)^2\times3+(40.2-40)^2+(40.1-40)^2}{10}=0.008.$$

由于随机抽取的 8:30—9:30 这段时间内生产的 10 个零件的直径的方差为 0.03，远远超过 0.01 的界限，因此我们可以推断在这段时间内该机床生产不正常. 类似地，我们可以推断在 10:00—11:00 这段时间内该机床生产正常.

练习

1. 小明为了估计自己从起床至到达教室所需的平均时间，他随机记录了自己 20 天每天从起床至到达教室所需的时间，得到下表：

时间/min	45	46	47	48	49	50	51	52	53
天数	2	1	1	2	4	5	3	1	1

试据此估计小明从起床至到达教室所需的平均时间.

2. 甲、乙两台包装机同时包装质量为 200 g 的糖果，从中随机抽取 10 袋，测得其实际质量(单位：g)分别如下：

甲	202	203	202	196	199	201	200	197	201	199
乙	201	199	200	204	200	202	196	195	202	201

试根据以上数据判断哪台包装机包装糖果的质量比较稳定.

习题 5.1

A 组

1. 某校为调查每个学生用于课外作业的平均时间，从该校学生中随机抽取了 15 名学生进行调查，得到他们用于课外作业的时间(单位：min)如下：

75，80，85，65，95，100，70，55，65，75，85，110，118，80，90.

试据此估计该校的学生用于课外作业的平均时间.

2. 甲、乙两工人同时加工同一种圆柱形零件，在正常情况下，生产的零件的直径的方差应不超过 0.035. 在他们所加工的零件中各随机抽取 10 个进行直径检测，测得数据(单位：mm)如下：

甲	19.9	19.7	19.8	20.0	20.1	19.9	20.2	20.3	20	20.1
乙	20.0	20.2	19.8	19.9	19.7	20.2	20.1	19.7	20.2	20.2

请根据以上数据判断哪台机器生产不正常.

B 组

3. 某校举办了一次科技知识竞赛，为了评价甲、乙两班学生的竞赛成绩，现分别从这两班各随机抽取了 5 名学生的成绩. 他们的成绩(单位：分)如下：

甲班：50，70，70，80，80

乙班：45，55，80，85，85

如何来评价这两个班的竞赛成绩呢？

4. 某省农科院准备从甲、乙两种杂交小麦中选择一种进行大面积推广，他们应该怎么办？请你帮忙设计一个可行的方案.

5.2 统计的简单应用

在日常生活中，我们经常遇到各种各样的“率”：一个国家的森林覆盖率、一个省的婴儿出生率、一个电视栏目的收视率、一种产品的合格率等等. 从统计的观点看，一个“率”就是总体中具有某些特性的个体在总体中所占的百分比. 在一般情况下，当要考察的总体所含个体数量较多时，“率”的计算就比较复杂，有什么方法来对“率”作出合理的估计吗？

在实践中，我们常常通过简单随机抽样，用样本的“率”去估计总体相应的“率”. 例如工厂为了估计一批产品的合格率，常常从该批产品中随机抽取一部分进行检查，通过对样本进行分析，推断出这批产品的合格率.

例 1 某工厂生产了一批产品，从中随机抽取 1 000 件来检查，发现有 10 件次品. 试估计这批产品的次品率.

解 由于是随机抽取，即总体中每一件产品都有相同的机会被抽取，因此，随机抽取的 1 000 件产品组成了一个简单随机样本，因而可以用这个样本的次品率 $\frac{10}{1\ 000}=\frac{1}{100}$ 作为对这批产品的次品率的估计，从而这批产品的次品率为 1%.

动脑筋

某地为提倡节约用水，准备实行“阶梯水价计费”方式，用户月用水量不超出基本月用水量的部分享受基本价格，超出基本月用水量的部分实行加价收费. 为更好地决策，自来水公司随机抽取了部分用户的月用水量数据，并将这些数据绘制成了如图 5-1

图 5-1

所示的统计图(每组数据包括右端点但不包括左端点).

如果自来水公司将基本月用水量定为每户每月 12 t，那么该地 20 万用户中约有多少用户能够全部享受基本价格？

由于将基本月用水量定为每户每月 12 t，而被抽取的 100 户用户中，有 66 户(10+20+36)没有超出基本月用水量，因此被随机抽取的用户中有 66%的用户能够全部享受基本价格.

由于这 100 户用户是随机抽取的，因此这 100 户的月用水量就构成了一个简单随机样本，从而可以用这个样本中的能够全部享受基本价格的用户比例去估计总体相应的比例.

因此，估计在该地 20 万用户中约有$20\times66\%=13.2$(万户)的用户能够全部享受基本价格.

例 2 下表给出了某校 500 名 12 岁男孩中用随机抽样得出的 100 人的身高 h 的分组数据(单位：cm)：

范　围	$122\leqslant h<126$	$126\leqslant h<130$	$130\leqslant h<134$	$134\leqslant h<138$	$138\leqslant h<142$
人　数	4	7	8	18	28
范　围	$142\leqslant h<146$	$146\leqslant h<150$	$150\leqslant h<154$	$154\leqslant h<158$	
人　数	17	9	5	4	

(1) 列出样本频率分布表；

(2) 估计该校 500 名 12 岁男孩中身高小于 134 cm 的人数.

解 (1) 根据题意，可得如下样本频率分布表.

分　组	频　数	频　率
$122 \leqslant h < 126$	4	0.04
$126 \leqslant h < 130$	7	0.07
$130 \leqslant h < 134$	8	0.08
$134 \leqslant h < 138$	18	0.18
$138 \leqslant h < 142$	28	0.28
$142 \leqslant h < 146$	17	0.17
$146 \leqslant h < 150$	9	0.09
$150 \leqslant h < 154$	5	0.05
$154 \leqslant h < 158$	4	0.04
合　计	100	1

（2）由上表可知，身高小于 134 cm 的男孩出现的频率为 $0.04+0.07+0.08=0.19$. 又随机抽取的这 100 名男孩的身高组成了一个简单随机样本，因而可以用这个样本的频率(0.19)作为该校 500 名 12 岁男孩相应频率的估计.

因此，估计该校 500 名 12 岁男孩中身高小于 134 cm 的人数约为

$$500\times0.19=95(\text{人}).$$

练习

1. 某市教育局为了解该市 5 万名九年级学生的身体素质情况，随机抽取了 1 000 名九年级学生进行检测. 已知被检测学生的身体素质达标率为 95%，请据此估计该市九年级学生中身体素质达标的学生人数.

2. 为了让学生了解环保知识，增强环保意识，某市在中学生中举行了一次“环保知识竞赛”，共有 19 000 名中学生参加了这次竞赛. 为了解本次竞赛成绩情况，从中随机抽取了 500 名学生的成绩 x(得分均为整数，满分为 100 分)进行统计后得到下表. 请根据表格解答下列问题：

（1）补全表格；

（2）假设成绩在 71 分至 90 分之间(含 71 分，90 分)的学生为二等奖，请据此估计该市获得二等奖的学生人数.

分　组	频　数	频　率
$51 \leqslant x < 61$	40	0.08
$61 \leqslant x < 71$		0.16
$71 \leqslant x < 81$	100	
$81 \leqslant x < 91$	160	0.32
$91 \leqslant x < 101$		
合　计	500	

动脑筋

李奶奶在小区开了一家便利店，供应 A，B，C，D，E 5 个品种的食物. 由于不同品种的食物的保质期不同，因此，有些品种因滞销而变质，造成浪费，有些品种因脱销而给居民带来不便. 面对这种情况，李奶奶很着急.

请你想办法帮助李奶奶解决这一问题.

随机抽取几天中这 5 个品种食物的销售情况，再根据结果提出合理建议.

下面是某位同学的做法：

(1) 调查和收集资料.

先随机统计两周中 5 个品种食物的每天销售量(结果如下表).

数量 星期 / 品种	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
A	49	40	43	40	47	43	40	50	42	45	44	43	45	48
B	43	35	40	37	37	37	35	30	33	44	34	35	35	40
C	40	35	36	41	45	45	40	45	47	43	43	43	36	45
D	28	30	23	30	26	25	27	30	28	25	28	28	26	26
E	16	20	24	25	25	24	20	25	29	15	20	22	16	18

（2）分周统计每个品种的销售情况.

	A	B	C	D	E
第一周	302	264	282	189	154
第二周	317	251	302	191	145
两周销售量之差	15	13	20	2	9

（3）分析统计结果.

从上面的统计表中，可以发现每个品种每周的销售量虽然有时多，有时少，但变化不大. 这说明这个小区的需求量是很稳定的，但不同品种的销售量有很大区别，故只需按适当的比例进货，就能既不会因滞销造成浪费，也不会因脱销而给居民带来不便.

（4）确定进货方案.

按照适当的比例购进商品时，需考虑销售量时有波动的影响，因此应先计算各品种的周平均销量(结果如下表).

品　种	A	B	C	D	E
周平均销量	309.5	257.5	292	190	149.5

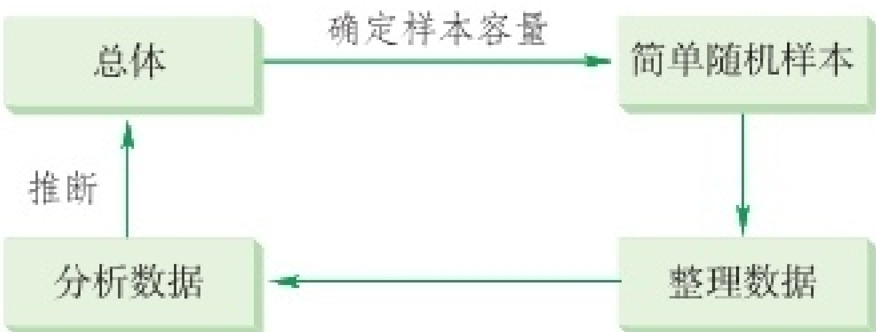
因为

$$
\begin{aligned}
&309.5:257.5:292:190:149.5\\
\approx\ &30:25:30:20:15\\
=\ &6:5:6:4:3,
\end{aligned}
$$

于是，可以建议李奶奶按 $6:5:6:4:3$ 的比例购进 A，B，C，D，E 这 5 种食物.

议一议

利用样本来推断总体的过程是怎样的?



通过科学调查，在取得真实可靠的数据后，我们可以运用正确的统计方法来推断总体，除此之外，还可以利用已有的统计数据来对事物在未来一段时间内的发展趋势做出判断和预测，为正确的决策提供服务.

做一做

下表是 2006—2011 年全国城镇居民人均可支配收入(单位:元)统计表:

年　份	2006	2007	2008	2009	2010	2011
人均可支配收入	11 759	13 789	15 781	17 175	19 109	21 810

(1) 根据上表数据，以年份为横坐标，以人均可支配收入为纵坐标，建立平面直角坐标系，并在该坐标系中描出坐标(年份，人均可支配收入)；

(2) 试用直线表示全国城镇居民人均可支配收入在近几年内的发展趋势.

按上述要求建立平面直角坐标系后，描出这些数据，可得图 5–2.

2006—2011年全国城镇居民人均可支配收入

图5–2

由于这些点“紧靠”在如图 5–2 所示的直线 l 的两旁，因此我们可以认为这条直线 l 近似地表示出了这几年全国城镇居民人均可支配收入的发展趋势. 从而，由图 5–2 我们可以预测：在近几年内全国城镇居民人均可支配收入将是逐年递增的.

由此可以看出：根据已有的资料(在近几年内的数据)确定的一条直线，可以用来预测事物在未来一段时间内的发展趋势.

练习

1. 某工厂需要 A，B，C 三种原料用于生产，为了合理进料以维持正常生产，工厂随机统计了两周中每天原料消耗(单位：t)的情况：

	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
A	32	25	26	26	30	28	27	28	25	25	30	24	26	30
B	18	15	12	10	17	20	10	16	16	10	20	11	12	11
C	14	16	14	12	15	15	11	16	13	17	14	16	15	14

试根据上述资料确定每次进料时 A，B，C 三种原料的进料比例，以使工厂尽量少发生原料过多囤积或短缺的现象.

2. 下表是我国 2006—2010 年第一产业在国民生产总值中的比例数据：

年　份	2006	2007	2008	2009	2010
比例/%	11.3	11.1	11.3	10.3	10.1

(1) 请根据表中数据，建立平面直角坐标系，并描出坐标(年份，第一产业在国民生产总值中的比例)；

(2) 试用直线表示第一产业在我国国民生产总值中的比例在近几年内的发展趋势.

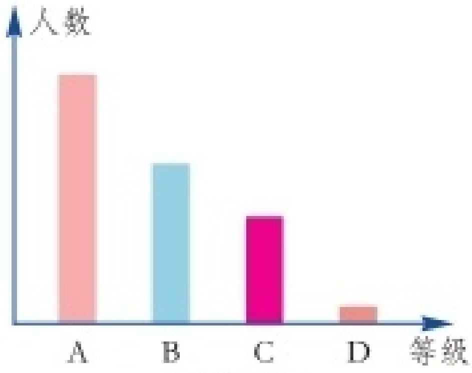
习题 5.2

A 组

1. 某城市调查组为了了解该城市的森林覆盖率，随机抽取面积为 30 km^2 的土地进行调查后，估算出森林覆盖率为 43.5%. 若该城市所占面积为 120 km^2，试据此估算出该城市森林所占面积.

2. 某市对九年级学生进行“综合素质”评价，评价的结果分为A(优)、B(良好)、C(合格)、D(不合格)四个等级. 现从中随机抽测了若干名学生的“综

合素质”等级作为样本进行数据处理，并作出如图所示的统计图. 已知图中从左到右的四个长方形的高的比为 14∶9∶6∶1，据此估算出该市评价结果为“D”级的学生约为 2 000 人，试估计该市有多少名学生可以被评为“A”级或“B”级.



(第 2 题图)

3. 下表是 2007—2011 年中国数字音乐销售额统计表：

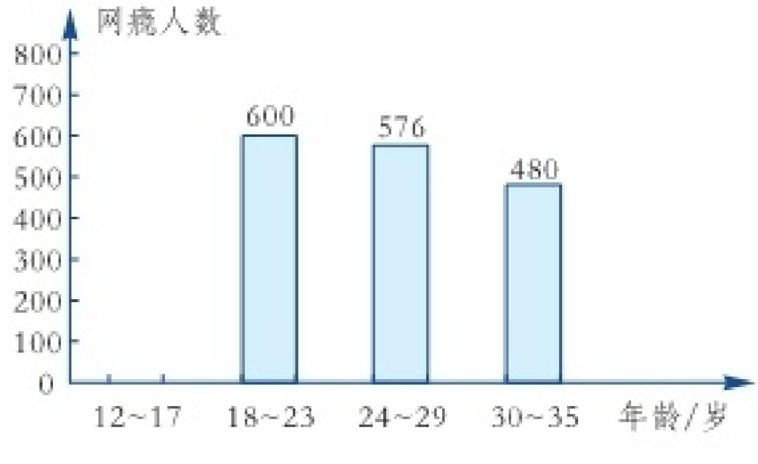
年　份	2007	2008	2009	2010	2011
中国数字音乐销售额/亿元	15.2	16.5	17.9	19.5	21.5

(1) 请根据表中数据，建立平面直角坐标系，并描出坐标(年份，中国数字音乐销售额)；

(2) 试用直线表示我国数字音乐市场规模在近几年内的发展趋势.

B 组

4. 网瘾低龄化问题已引起社会各界的高度关注. 有关部门在全国范围内对 12~35 岁的网瘾人群进行了简单随机抽样调查并得到下图，其中 30~35 岁的网瘾人数占样本总人数的 20%.



(第 4 题图)

(1) 请把上图中缺失的数据、图形补充完整；

(2) 据报道，目前我国 12~35 岁网瘾人数约为 2 000 万人，请你根据图中数据估计我国目前 12~35 岁的网瘾人群中 12~17 岁的网瘾人数.

5. 某企业从零件加工厂购回一批零件，加工厂承诺次品率低于 1%，请你想一想如何验收这批零件，并写出你的方案.

小结与复习

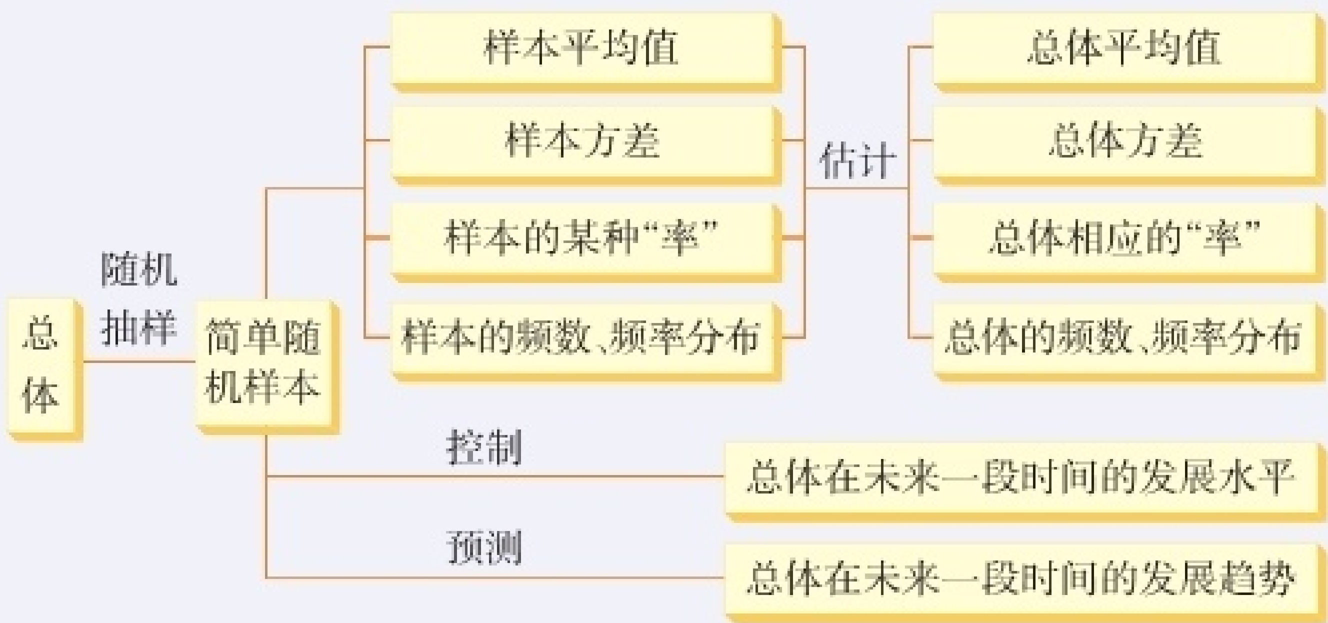
回顾

1. 举例说明如何用样本平均数、样本方差去估计总体平均数、总体方差.

2. 用样本推断总体的过程是怎样的？

3. 举例说明如何通过样本来预测总体在未来一段时间内的发展趋势.

本章知识结构



注意

1. 用样本推断总体是统计中的一种重要思想. 在抽样调查时，由于我们只抽取部分数据组成样本，而总体平均数和总体方差是未知的，因此我们希望寻找一个好的抽取样本的方法，使得样本能够代表总体，能客观地反映实际情况. 一般情况下，我们可以采用简单随机抽样的方法得到简单随机样本，然后用简单随机样本的样本平均数、样本方差分别去估计总体平均数、总体方差. 在大多数情况下，当样本容量够大时，这种估计是比较合理的.

2. 在现实生活中，有许多数据是与时间有关的，因此这些数据会呈现一定的发展趋势，这启发我们用一条直线来表示发展趋势. 通过分析趋势图，我们可以感受随机现象的变化趋势，感悟一些随机现象的规律性.

复习题 5

A 组

1. 为了分析某校九年级学生 5 min 投篮测验成绩，从该校九年级学生中随机抽取了 40 名学生，测验后得到他们的成绩如下表：

编　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
个　数	10	16	12	18	28	11	13	24	14	22	22	10	23	14	13	12	25	24	21	20
编　号	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
个　数	21	17	18	18	26	27	14	19	16	15	18	18	12	12	26	13	20	24	24	10

试据此估计该校九年级学生 5 min 投篮成绩的平均数.

2. 某镇想了解全镇居民上年度人均收入情况，随机抽取了 20 户家庭进行调查，得到人均收入的结果如下(单位：万元)：

3.4，3.5，3.4，3.8，3.8，3.0，3.1，3.3，3.5，3.6，

3.7，3.9，3.6，3.5，3.8，3.6，3.9，3.2，3.1，3.3.

试据此估计该镇居民上年度的人均收入及方差.

3. 一台机器生产某种零件，在正常情况下，零件长度的直径的平均值应在 (20 ± 0.05) mm 范围内，方差应不超过 0.2. 如果不满足这两个条件中的任何一个，则此时机器生产不正常. 某日在 9:00—11:00 这一时段随机抽取了 20 个零件，测出其长度如下表(单位：mm)：

1	20.2	6	19.4	11	19.7	16	20.4
2	20.7	7	20.6	12	20.5	17	20.1
3	19.6	8	20.0	13	20.1	18	20.3
4	20.3	9	20.2	14	19.8	19	19.9
5	19.5	10	19.7	15	19.4	20	19.4

请根据以上数据，判断当日机器在 9:00—11:00 是否工作正常.

4. 今有养殖龙虾专业户，为了估计池塘里龙虾的数目，第一次捕捞了 576 只虾，将这些虾一一做上标记后放回池塘. 几天后，第二次捕捞了 2 104 只虾，发现其中有 24 只虾身上有标记，试估计该池塘里约有多少只虾.

5. 某中学的一个数学兴趣小组在本校学生中开展主题为“垃圾分类知多少”的专题调查活动，采取随机抽样的方式进行问卷调查. 问卷调查的结果分为“非常了解”、“比较了解”、“基本了解”、“不太了解”四个等级，划分等级后的数据整理如下表：

等　级	非常了解	比较了解	基本了解	不太了解
频　数	40	120	36	4
频　率	0.2		0.18	0.02

（1）补全上表；

（2）若该校有学生 2 500 人，请根据调查结果估计这些学生中“比较了解”垃圾分类知识的人数.

6. 下面是我国 2006—2011 年移动电话年末用户数(单位：万户)统计表：

年　份	2006	2007	2008	2009	2010	2011
移动电话年末用户数	46 106	54 731	64 125	74 721	85 900	98 625

根据表中数据，建立平面直角坐标系，并描出坐标(年份，我国移动电话年末用户数)，并试用直线表示我国移动电话年末用户数在近几年内的发展趋势.

B 组

7. 现从 20 000 个某型号电子元件中随机抽查了 200 个进行使用寿命调查，结果如下：

使用寿命 x/h	$100\leqslant x<200$	$200\leqslant x<300$	$300\leqslant x<400$	$400\leqslant x<500$	$500\leqslant x<600$
个数	20	30		40	30

（1）补全上表，并列出样本频率分布表；

（2）试据此估计 20 000 个该型号电子元件中使用寿命为$100 \leqslant x < 400(\mathrm{h})$的个数.

8. 为了解某地区九年级学生的视力情况，从该地区九年级学生中随机检查了一部分学生的视力情况，结果如下表：

视　力	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0	5.1	5.2	5.3
人　数	0	1	2	1	6	5	7	14	12	6	24	15	5	2

（1）若视力在 5.0 以上属于正常，无需矫正，试估计该地区 10 000 名九年级学生中约有多少名学生的视力正常.

（2）若要使该地区九年级学生视力正常的百分率提高到 70%，试估计该地区要有多少名学生通过矫正达到正常.

C 组

9. 为了调查全市初中学生人数，小刘同学对自己所在城区的初中生人数做了调查，发现每 30 000 城市人口中，大约有初中生 1 200 人. 若该市人口数约为 300 万，据此小刘能推断出该市初中生的人数吗？若该市教育局全面统计的全市初中生人数为 8 万，小刘的结果与它相符吗？如不符（与估计有很大的偏差），请你用所学的统计知识帮他找出其中的原因.

10. 随机统计某商店一个月内几种商品的销售情况，并对这个商店的进货情况提出你的建议.

综合与实践

如何估计鱼的数量

动脑筋

（1）小明家承包了一个大鱼塘，鱼长得又肥又大，如何算出该池塘中鱼的总条数呢？

（2）某鸟类学家想算出某湿地公园中鸟的数量，他该怎么办？

由于受到主客观条件的限制，许多数据，如统计某海洋中的生物数、陆地上的珍禽野兽数、天空中的飞鸟数，都不可能直接算出．面对这些问题，人们想出了“捉放法”来解决这类问题．这种方法的实际操作过程可以简称为以下四步：

捉 → 做标记 → 放 → 捉

下面我们来模拟这一过程．

做一做

请准备一小袋黄豆和一纸杯红豆，分组合作完成以下试验过程：

第一步——捉　从袋子中取出一些黄豆，数出黄豆数(数量为 n)，并不再放回去；

第二步——做标记　从纸杯中倒出 n 粒红豆；

第三步——放　将这 n 粒红豆放进袋子中，充分混合；

第四步——捉　再从袋子中取出一些豆子作为样本，数出样本的总粒数 m 及其中的红豆数 r.

设袋子中的豆子共有 x 粒，则袋子中红豆所占的比例$\frac{n}{x}$就可用样本中红豆所占的比例$\frac{r}{m}$来估计，即$\frac{n}{x}\approx\frac{r}{m}$，因此我们可以求出袋子中的豆子总数约为 $x\approx\frac{mn}{r}$，将结果分别填入下表.

试验序号	1	2	3	4	5
取出的黄豆数 n/粒					
样本的总粒数 m/粒					
样本的红豆数 r/粒					
估计整个袋子里的黄豆数 x/粒					

按上述步骤再重复做四次，但要求在第一步取出黄豆的粒数比上一次试验时多一些，将结果分别填入上表.

议一议

这五次得到的估计值差异大吗？产生差异的原因有哪些？当样本容量较大时，是否估计得更准确一些？

现在你有办法来帮助小明估算出鱼塘中鱼的数量了吗？

结合自己的体会，说明“如何估计鱼的数量”的可行办法，以小组合作的形式写一份研究报告，并在全班交流各自的收获与体会.

数学词汇汉英对照表

（按词汇所在页码出现的先后排序）

后　记

本册教科书是依据教育部颁布的《义务教育数学课程标准》（2011年版），在原实验教科书的基础上修订而成的，经国家基础教育课程教材专家工作委员会2013年审查通过.

本书在修订过程中，吸收了基础教育课程改革实验的优秀成果，凝聚了参与课程改革实验的广大数学家、数学课程专家、教研人员以及一线教师的集体智慧，一大批数学教师为本书的修订提出了宝贵的意见.在此，对所有为本次修订提供过帮助和支持的社会各界朋友表示衷心的感谢.

在本书出版之前，我们通过多种渠道与教科书所选用资料和图片的作者进行了联系，得到了他们的大力支持.对此，我们表示诚挚的感谢！但仍有部分作者未能取得联系，恳请这些作者尽快与我们联系，以便支付稿酬.

教材建设是一项长期的任务，我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵意见，并将这些意见和建议及时反馈给我们.让我们携起手来，共同完成义务教育教科书建设这一光荣的使命！

湖南教育出版社

2013年5月

义务教育教科书
数　学
九年级上册
责任编辑：邹楚林
湖南教育出版社出版（长沙市韶山北路443号）
电子邮箱：hnephmath@126.com
客服电话：0731－85486796
湖南出版中心重印
湖南省新华书店发行
湖南天闻新华印务有限公司印装
787×1092　16开　印张：10.5　字数：186000
2005年4月第1版　2021年5月第3版第9次印刷
印数：1—500 000册
ISBN 978－7－5355－4575－6
定价：10.08元（2021秋）