教育部审定
2012

首届全国教材建设奖
全国优秀教材二等奖

义务教育教科书

数学

SHUXUE

七年级 下册

华东师范大学出版社

义务教育教科书

数学

SHUXUE

七年级　下册

主　编　王建磐
副主编　王继延
唐复苏

华东师范大学出版社

义务教育教科书
数学
七年级　下册

主　　编　王建磐
责任编辑　平　萍
装帧设计　卢晓红

出　　版　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　传真 021-60821766
客服电话　021-60821720　60821761

印 刷 者　山西人民印刷有限责任公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　9.75
字　　数　174 千字
版　　次　2012 年 7 月第一版
印　　次　2014 年 12 月山西第三次
书　　号　ISBN 978-7-5617-9570-5/G·5626
定　　价　9.15 元

出 版 人　王　焰

致亲爱的同学

欢迎你，我们的小伙伴.

你现在拿在手中的是依据《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》与国家《义务教育数学课程标准(2011年版)》，为你们提供的初中阶段六册数学教科书中的第二本.

本书继续从你所熟悉的情境入手，为你提供最基本的、丰富多彩的数学内容，并穿插一些阅读材料，还设置了一些让你思考和实践的小栏目，给你创造了众多自主探索的好机会. 书中的习题程度不一，应用问题、探索性和开放性的问题及综合与实践都在向你招手，你的聪明才智必定能得到进一步的发挥.

现在，请你打开这本书，与我们一起继续在奇妙的数学世界里漫游，进一步探索数学的奥秘.

你在生活中会遇到各种各样的问题，比如要租用多少辆车才能使大家都能坐车去春游，又比如要花多少时间才能完成任务，等等. 本书的前两章**"一元一次方程"**与**"一次方程组"**展现给你的就是解决这些问题的方法，有了它们，你将成为解决实际问题的小能手.

由等式到不等式是一个大转变，生活中存在许多不相等的数量关系. 儿童乐园里的跷跷板、做实验用的天平等都给我们一种等式或不等式的直观形象. **"一元一次不等式"**将使你学会解决一些不等问题，找到适合某些不等关系的数值，你会发现许多问题中隐含着不少数学道理.

我们还要到图形世界去遨游. 你会看到各种各样的图形，如等腰三角形、等边三角形、多边形等，一个个独特的形状都显示着各自的风貌. 春节晚会上悬挂着的一条条花边，其中有不少图形就是我们在**"多边形"**与**"轴对称、平移与旋转"**里将要认识的新朋友，那独特的形式会给你带来不少启示，学完它你自己就可以剪出更多更漂亮的花边了.

让我们一起走进更奇妙的数学世界吧！

编者

目　录

第 8 章　一元一次不等式

第 9 章　多边形

第 10 章 轴对称、平移与旋转

数学实验附图

第6章　一元一次方程

某校七年级328名师生乘车外出春游，已有2辆校车共可乘坐64人，还需租用44座的客车多少辆？

$$44 \times (\quad) + 64 = 328$$

本章将学习一元一次方程的解法，并学会解决一些简单的实际问题.

6.1 从实际问题到方程

问题 1

某校七年级 328 名师生乘车外出春游,已有 2 辆校车共可乘坐 64 人,还需租用 44 座的客车多少辆?

你会解决这个问题吗? 有哪些方法?

回忆

小学里已经学过列方程的解法,我们不妨回顾一下:

设需租用客车 x 辆,共可乘坐 $44x$ 人,加上乘坐校车的 64 人,就是全体的 328 人. 可得

$$44x + 64 = 328. \quad ①$$

问题归结为求出使方程①左、右两边的值相等的未知数 x 的值(即方程的解). 也就是说,需要解这个方程.

问题 2

在课外活动中,张老师发现同学们的年龄基本上都是 13 岁,就问同学们:“我今年 45 岁,经过几年后你们的年龄正好是我年龄的$\frac{1}{3}$?”

“3 年!”小敏同学很快发现了答案. 他是这样算的:

这里采用了尝试检验法:选取未知量的一些值,逐个尝试、检验,找到符合问题要求的解答.

1 年后,老师的年龄是 46 岁,同学的年龄是 14 岁,不是老师年龄的$\frac{1}{3}$;

2 年后,老师的年龄是 47 岁,同学的年龄是 15 岁,也不是老师年龄的$\frac{1}{3}$;

3 年后,老师的年龄是 48 岁,同学的年龄是 16 岁,恰好是老师年龄的$\frac{1}{3}$.

也有的同学说,我们可以列出方程来解:

设经过 x 年后同学的年龄是老师年龄的$\frac{1}{3}$,而经过 x 年后同学的年龄是$(13+x)$岁,老师的年龄是$(45+x)$岁,可得

$$13+x=\frac{1}{3}(45+x). \qquad ②$$

这个方程不像问题 1 中的方程①那样容易求出它的解. 但小敏同学的方法启发我们,可以用尝试、检验的方法找出方程②的解,即只要将 $x=1,2,3,4,\cdots$代入方程②的左右两边,看哪个数能使两边的值相等,同样可得到方程的解 $x=3$.

你会解这个方程吗?从小敏同学的求解方法中你能得到什么启发?

思考

如果未知数可能取到的数值较多,或者不一定是整数,那么该从何试起?如果尝试、检验无法入手,那么又该怎么办?

学习了下一节,你将能圆满地解决这个问题!

练 习

根据题意设未知数,并列出方程(不必求解):

1. 某班原分成两个小组进行课外体育活动,第一组 26 人,第二组 22 人. 根据学校活动器材的数量,要将第一组的人数调整为第二组的一半,应从第一组调多少人到第二组去?

2. 师徒两人铺设一条长 186 米的地下电缆,师傅每小时铺设 18 米,徒弟每小时铺设 12 米. 师傅先开始工作,2 个小时后徒弟在另一端开始铺设,那么师徒两人还需一起工作多少时间才能完成铺设任务?

习题 6.1

1. 检验下列方程后面大括号内所列各数是否为相应方程的解：

   (1) $\dfrac{5x+1}{8}=x-1$, $\left\{-\dfrac{3}{2}, 3\right\}$;

   (2) $2(y-2)-9(1-y)=3(4y-1)$, $\{-10, 10\}$.

2. 根据班级内男、女同学的人数编一道应用题，和同学交流一下.

3. 小赵去商店买练习本，回来后问同学：“店主告诉我，如果多买一些就给我八折优惠. 于是，我就买了 20 本，结果便宜了 1.60 元. 你猜原来每本价格是多少？”你能列出方程吗？

6.2 解一元一次方程

1. 等式的性质与方程的简单变形

我们在小学阶段学过等式的性质，你还记得吗？

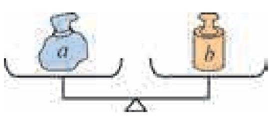


图 6.2.1

如图 6.2.1，天平处于平衡状态，它表示左右两个盘内物体的质量 a、b 是相等的. 如图 6.2.2，若在平衡天平两边的盘内都添上（或都拿去）质量相等的物体，则天平仍然平衡. 如图 6.2.3，若把平衡天平两边盘内物体的质量都扩大（或都缩小）相同的倍数，则天平仍然平衡.

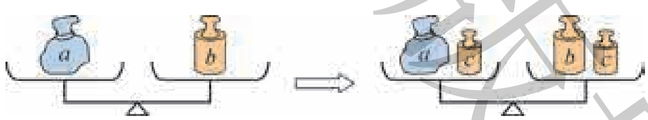


图 6.2.2

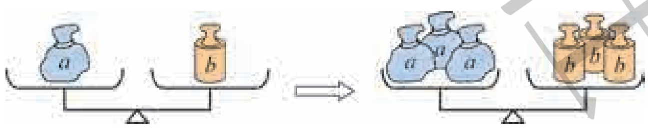


图 6.2.3

这个事实反映了等式的基本性质：

1. 等式两边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，所得结果仍是等式.

如果 $a=b$，那么 $a+c=b+c$，$a-c=b-c$.

2. 等式两边都乘以（或都除以）同一个数（除数不能为0），所得结果仍是等式.

如果 $a=b$，那么 $ac=bc$，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c}\ (c\neq 0)$.

练　习

1. 回答下列问题：

（1）由 $a=b$ 能不能得到 $a-2=b-2$？为什么？

（2）由 $m=n$ 能不能得到 $-\dfrac{m}{3}=-\dfrac{n}{3}$？为什么？

（3）由 $2a=6b$ 能不能得到 $a=3b$？为什么？

（4）由 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}$ 能不能得到 $3x=2y$？为什么？

2. 填空，使所得结果仍是等式，并说明是根据哪一条等式性质得到的：

（1）如果 $x-2=5$，那么 $x=5+$______；

（2）如果 $3x=10-2x$，那么 $3x+$______ $=10$；

（3）如果 $2x=7$，那么 $x=$______；

（4）如果 $\dfrac{x-1}{2}=3$，那么 $x-1=$______.

每道小题中，从前一个等式到后一个等式，发生了什么变化？

由等式的基本性质，可以得到**方程的变形规则**：

1. 方程两边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，方程的解不变；

2. 方程两边都乘以（或都除以）同一个不等于0的数，方程的解不变.

根据这些规则,我们可以对方程进行适当的变形,求得方程的解.

例1 解下列方程:

(1) $x-5=7$;

(2) $4x=3x-4$.

解 (1) $x-5=7$,

两边都加上5,得 $x=7+5$,

即 $x=12$.

(2) $4x=3x-4$,

两边都减去 $3x$,得 $4x-3x=-4$,

即 $x=-4$.

在解这两个方程时,进行了怎样的变形?有什么共同点?

以上两个方程的解法,都依据了方程的变形规则1. 这里的变形,相当于将方程中的某些项改变符号后,从方程的一边移到另一边. 像这样的变形叫做**移项**(transposition).

例2 解下列方程:

(1) $-5x=2$;

(2) $\frac{3}{2}x=\frac{1}{3}$.

解 (1) 方程两边都除以 -5,得

$$x=-\frac{2}{5}.$$

在解这两个方程时,进行了怎样的变形?有什么共同点?

(2) 方程两边都除以 $\frac{3}{2}$(或都乘以 $\frac{2}{3}$),得

$$x=\frac{1}{3}\div\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3},$$

即 $x=\frac{2}{9}$.

这两个方程的解法,都依据了方程的变形规则2,将方程的两边都除以未知数的系数. 像这样的变形通常称作“将未知数的系数化为1”.

概括

以上例1和例2解方程的过程,都是将方程进行适当的变形,得到 $x=a$ 的形式.

练　习

1. 下列方程的变形是否正确? 为什么?

(1) 由 $3+x=5$,得 $x=5+3$;　(2) 由 $7x=-4$,得 $x=-\frac{7}{4}$;

(3) 由 $\frac{1}{2}y=0$,得 $y=2$;　(4) 由 $3=x-2$,得 $x=-2-3$.

2. (口答)求下列方程的解:

(1) $x-6=6$;　(2) $7x=6x-4$;

(3) $-5x=60$;　(4) $\frac{1}{4}y=\frac{1}{2}$.

做一做

利用方程的变形,求方程 $2x+3=1$ 的解,并和同学交流.

例3 解下列方程:

(1) $8x=2x-7$;　(2) $6=8+2x$;

(3) $2y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}y-3$.

解 (1) $$8x=2x-7,$$

移项,得

$$8x-2x=-7,$$

即
$$6x=-7.$$

两边都除以6,得

$$x=-\frac{7}{6}.$$

(2)
$$6=8+2x,$$

原方程即

$$8+2x=6.$$

移项,得

$$2x=-2.$$

两边都除以2,得

$$x=-1.$$

(3)
$$2y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}y-3,$$

移项,得

$$2y-\frac{1}{2}y=-3+\frac{1}{2},$$

即
$$\frac{3}{2}y=-\frac{5}{2}.$$

两边都除以$\frac{3}{2}$,得

$$y=-\frac{5}{3}.$$

练　习

1. 解下列方程:

(1) $3x+4=0$;　　(2) $7y+6=-6y$;

(3) $5x+2=7x+8$;　　(4) $3y-2=y+1+6y$;

(5) $\frac{2}{5}x - 8 = \frac{1}{4} - 0.2x$;　　　(6) $1 - \frac{1}{2}x = x + \frac{1}{3}$.

2. 试解6.1节中问题1所列出的方程.

习题 6.2.1

1. 解下列方程:

(1) $18 = 5 - x$;

(2) $\frac{3}{4}x + 2 = 3 - \frac{1}{4}x$;

(3) $3x - 7 + 4x = 6x - 2$;

(4) $10y + 5 = 11y - 5 - 2y$;

(5) $x - 1 = 5 + 2x$;

(6) $0.3x + 1.2 - 2x = 1.2 - 2.7x$.

2. 解下列方程:

(1) $2y + 3 = 11 - 6y$;　　　(2) $2x - 1 = 5x + 7$;

(3) $\frac{1}{3}x - 1 - 2x = -1$;　　　(4) $\frac{1}{2}x - 3 = 5x + \frac{1}{4}$.

3. 已知 $A = 3x + 2$, $B = 4 - x$, 解答下列问题:

(1) 当 x 取何值时, $A = B$?

(2) 当 x 取何值时, A 比 B 大 4?

2. 解一元一次方程

前面我们遇到的一些方程,例如

$$44x + 64 = 328,$$

$$13 + x = \frac{1}{3}(45 + x)$$

等,有一个共同特点:它们都只含有一个未知数,并且含有未知数的式子都是整式,未知数的次数都是1,像这样的方程叫做**一元一次方程**(linear equation with one unknown).

我们再一起来解几个一元一次方程.

例 4 解方程：$3(x-2)+1=x-(2x-1)$.

解 原方程的两边分别去括号，得

$$3x-6+1=x-2x+1,$$

即 $$3x-5=-x+1.$$

移项，得

$$3x+x=1+5,$$

即 $$4x=6.$$

两边都除以 4，得

$$x=\frac{3}{2}.$$

练　习

1. 解下列方程：
   (1) $5(x+2)=2(5x-1)$；
   (2) $(x+1)-2(x-1)=1-3x$；
   (3) $2(x-2)-(4x-1)=3(1-x)$.
2. 列方程求解：
   (1) 当 x 取何值时，代数式 $3(2-x)$ 和 $2(3+x)$ 的值相等？
   (2) 当 y 取何值时，代数式 $2(3y+4)$ 的值比 $5(2y-7)$ 的值大 3？
3. 试解 6.1 节中问题 2 所列出的方程.

例 5 解方程：$\frac{x-3}{2}-\frac{2x+1}{3}=1$.

分析 这个方程中的系数出现了分数，通常可以将方程的两边都乘以同一个数（这里是都乘以 6），去掉方程中的分母. 像这样的变形通常称为“去分母”.

解 去分母，得

$$3(x-3)-2(2x+1)=6,$$

即
$$3x-9-4x-2=6.$$

这里为什么要添上括号?

移项，得

$$3x-4x=6+9+2,$$

即
$$-x=17.$$

两边都乘以(-1)，得

$$x=-17.$$

思考

回顾以上各例的解答过程，总结一下：解一元一次方程通常有哪些步骤？各步进行的是怎样的变形？如何根据方程的特点灵活运用方程的变形规则？

练　习

1. 指出下列方程求解过程中的错误，并予以改正：

(1) 解方程：$\dfrac{3x-1}{2}=\dfrac{4x+2}{5}-1$.

解
$$15x-5=8x+4-1,$$
$$15x-8x=4-1+5,$$
$$7x=8,$$
$$x=\frac{7}{8}.$$

(2) 解方程：$\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{4-x}{2}$.

解
$$2x-2-x+2=12-3x,$$
$$2x-x+3x=12+2+2,$$
$$4x=16,$$
$$x=4.$$

2. 解下列方程：

(1) $\dfrac{5x-1}{8}=\dfrac{7}{4}$;　　(2) $\dfrac{4-x}{3}=\dfrac{x-3}{5}-1$.

例 6 如图 6.2.4，天平的两个盘内分别盛有 51 g 和 45 g 的盐，问应从盘 A 中拿出多少盐放到盘 B 中，才能使两者所盛盐的质量相等？

图 6. 2. 4

用方程解决问题的关键是弄清题意，找出等量关系.

分析 从盘 A 中拿出一些盐放到盘 B 中，使两盘所盛盐的质量相等，于是有这样的等量关系：

盘 A 现有盐的质量 = 盘 B 现有盐的质量.

设应从盘 A 中拿出 x 克盐放到盘 B 中，我们来计算两盘中现有盐的质量，可列出表 6. 2. 1.

请你将正确的式子填入表中空白处.

表 6. 2. 1

	盘 A	盘 B
原　有　盐(g)	51	45
现　有　盐(g)		

解 设应从盘 A 中拿出 x g 盐放到盘 B 中，则根据题意，得

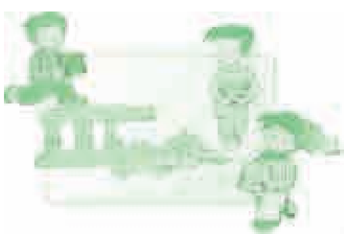
$$51 - x = 45 + x.$$

解这个方程，得

$$x = 3.$$

经检验，符合题意.

答：应从盘 A 中拿出 3 g 盐放到盘 B 中.



例 7 学校团委组织 65 名新团员为学校建花坛搬砖. 女同学每人每次搬 6 块，男同学每人每次搬 8 块，每人各搬了 4 次，共搬了 1800 块. 问这些新团员中有多少名男同学？

读题，找找看，题目告诉了我们哪些等量关系？

分析 题目告诉了我们好几个等量关系，其中有这样的等量关系：

男同学搬砖数 + 女同学搬砖数 = 搬砖总数.

设新团员中有 x 名男同学，那么立即可知女同学的人数，从而容易算出男同学和女同学的搬砖数，可列出表6.2.2. 由上述等量关系即可列出方程.

表 6.2.2

	男同学	女同学	总　数
参加人数(名)	x		65
每人搬砖数(块)		6×4	
共搬砖数(块)			1800

请把表格填完整.

解 设新团员中有 x 名男同学，根据题意，得

$$32x+24(65-x)=1800.$$

解这个方程，得

$$x=30.$$

经检验，符合题意.

答：这些新团员中有 30 名男同学.

练　习

1. 学校田径队的小刚在 400 米跑测试时，先以 6 米/秒的平均速度跑了大部分路程，最后以 8 米/秒的速度冲刺到达终点，成绩为 1 分零 5 秒. 问小刚在冲刺阶段花了多少时间?
2. 将上题的分析和列得的方程与例 7 相比较，看看是否相似. 将你的想法和同学交流一下.
3. 在第 1 题中，若问“小刚在离终点多远处开始冲刺”，该如何求解?

概括

用一元一次方程解决实际问题，关键在于抓住问题中的等量关系，列出方程. 求得方程的解后，经过检验，得到实际问题的解答.

这一过程也可以简单地表述为：

$$\boxed{\text{问题}\xrightarrow[\text{抽象}]{\text{分析}}\text{方程}\xrightarrow[\text{检验}]{\text{求解}}\text{解答}}$$

其中分析和抽象的过程通常包括：

（1）弄清题意和其中的数量关系，用字母表示适当的未知数（设元）；

（2）找出问题所给出的等量关系，它反映了未知量与已知量之间的关系；

（3）对这个等量关系中涉及的量，列出所需的代数式，根据等量关系，列出方程.

在设未知数和作出解答时，应注意量的单位.

习题 6.2.2

1. 解下列方程：

（1）$3=1-2(4+x)$；　　（2）$3(2x+5)=2(4x+3)+1$.

2. 解下列方程：

（1）$\dfrac{5-3x}{2}=\dfrac{3-5x}{3}$；　　（2）$1-\dfrac{1}{2}x=3-\dfrac{1}{6}x$；

（3）$\dfrac{y+2}{4}-\dfrac{2y-1}{6}=1$.

3. （1）在等式 $S=\dfrac{n(a+b)}{2}$ 中，已知 $S=279$，$b=7$，$n=18$，求 a 的值；

（2）已知梯形的上底 $a=3$，高 $h=5$，面积 $S=20$，根据梯形的面积公式 $S=\dfrac{1}{2}(a+b)h$，求下底 b 的长.

4. 如图，足球的表面是由一些呈多边形的黑、白皮块缝合而成的，共计有 32 块，已知黑色皮块数比白色皮块数的一半多 2，问两种颜色的皮块各有多少？

（第 4 题）

5. 小莉和同学在“五一”假期去森林公园玩，在溪流边的 A 码头租了一艘小艇，逆流而上，划行速度约为 4 千米/时. 到 B 地后沿原路返回，速度增加了 50%，回到 A 码头比去时少花了 20 分钟. 求 A、B 两地之间的路程.

阅读材料

丢番图的墓志铭与方程

古希腊数学家丢番图(Diophantus),是以研究一类方程(不定方程)著称于世的数学家. 在他的墓碑上,刻着这样一段墓志铭:

坟中安葬着丢番图,
多么令人惊讶,
它忠实地记录了所经历的道路.
上帝给予的童年占六分之一,
又过十二分之一,两颊长胡,
再过七分之一,点燃起结婚的蜡烛.
五年之后天赐贵子,
可怜迟到的宁馨儿,
享年仅及其父之半,便进入冰冷的墓.
悲伤只有用数论的研究去弥补,
又过四年,他也走完了人生的旅途.

请你列出方程,算一算丢番图去世时的年龄.

你知道吗? 现存世界上最古老的方程出现在英国考古学家兰德 1858 年找到的一份古埃及人的“纸草书”上,经破译,上面都是一些方程,共 85 个问题. 如“啊哈,它的全部,它的$\frac{1}{7}$,是 19”;“一堆,它的$\frac{2}{3}$,$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{7}$,居然是 33”. 译得更明白一点就是:$x+\frac{1}{7}x=19$;$x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=33$.

在我国,“方程”一词最早出现于东汉初年的数学经典著作《九章算术》的第八章“方程”. 到唐、宋时期,对方程的研究达到我国古代的鼎盛阶段. 那时所创立的用“天元术”解题,从设未知数到列方程都和现代数学十分相似. 也就是在那段时期,方程的知识从中国传入日本.

6.3 实践与探索

问题 1

用一根长 60 厘米的铁丝围成一个长方形.

(1) 如果长方形的宽是长的$\frac{2}{3}$,求这个长方形的长和宽;

(2) 如果长方形的宽比长少 4 厘米,求这个长方形的面积;

(3) 比较(1)、(2)所得的两个长方形面积的大小. 还能围出面积更大的长方形吗?

讨论

每小题中如何设未知数? 在小题(2)中,能不能直接设长方形的面积为 x 平方厘米? 若不能,该怎么办?

探索

将小题(2)中的宽比长少 4 厘米改为少 3 厘米、2 厘米、1 厘米、0 厘米(即长与宽相等),长方形的面积分别有什么变化?

练　习

1. 一块长、宽、高分别为 4 厘米、3 厘米、2 厘米的长方体橡皮泥,要用它来捏一个底面半径为 1.5 厘米的圆柱,则圆柱的高是多少?(精确到 0.1 厘米,π 取 3.14)

2. 在一个底面直径5厘米、高18厘米的圆柱形瓶内装满水，再将瓶内的水倒入一个底面直径6厘米、高10厘米的圆柱形玻璃杯中，能否完全装下？若装不下，那么瓶内水面还有多高？若未能装满，求杯内水面离杯口的距离.

读一读

本节问题1中，通过探索我们发现，在周长一定的情况下，长方形的长和宽越接近，面积就越大. 实际上，当长和宽相等，即成为正方形时，面积最大. 通过以后的学习，我们就会知道其中的道理.

有趣的是：若把这根铁丝围成任何封闭的平面图形（包括随意七凹八凸的不规则图形），面积最大的是圆. 这里面的道理涉及进一步的数学知识，将来你有兴趣去认识它们吗？

问题 2

新学年开始，某校三个年级为地震灾区捐款. 经统计，七年级捐款数占全校三个年级捐款总数的$\frac{2}{5}$，八年级捐款数是全校三个年级捐款数的平均数，已知九年级捐款1964元，求其他两个年级的捐款数.

讨论

在解决本题时，你是怎样设元的？还有没有其他的设元方法？比较一下，哪种设元方法比较容易列出方程？说说你的道理.

练　习

1. 填空：

   (1) 学校图书馆原有图书 a 册，最近增加了 20%，现在有图书______册；

   (2) 某煤矿预计今年比去年增产 15%，达到年产煤 60 万吨，设去年产煤 x 万吨，则可列方程____________________；

   (3) 某商品按定价的八折出售，售价为 14.80 元，则原定价是________元.

2. 自“政府补贴，家电下乡”活动开展以来，农村家电市场销量明显增加. 某县的一个家电门市部统计了在家电下乡活动启动前后，销售给农户的 A、B 两种型号电视机的情况：启动前一个月，A 型电视机和 B 型电视机共售出 960 台；启动后第一个月销售 A 型电视机和 B 型电视机的数量分别比活动启动前一个月增长 20% 和 30%，两种型号的电视机共售出 1192 台.

（第 2 题）

   已知 A 型电视机每台价格是 2198 元，B 型电视机每台价格是 1898 元. 根据“家电下乡”的有关政策，政府按每台电视机价格的 13% 给予农户补贴. 求活动启动后的第一个月，该门市部销售给农户的 1192 台电视机，政府共补贴了多少？（精确到 0.1 万元）

习题 6.3.1

1. 一个角的余角比这个角的补角的一半小 40°，求这个角的度数.
2. 某市去年年底人均居住面积为 11 平方米，计划在今年年底增加到人均 13.5 平方米. 求今年的住房年增长率.（精确到 0.1%）
3. 某银行设立大学生助学贷款，分 3～4 年期与 5～7 年期两种. 贷款年利率分别为 6.03% 和 6.21%，贷款利息的 50% 由国家财政贴补. 某大学生预计 6 年后能一次性偿还1.8 万元，问他现在大约可以贷款多少？（精确到 0.1 万元）
4. 解答下列问题：

   (1) 师徒两人检修一条长 180 米的自来水管道，师傅每小时检修 15 米，徒弟每小时检修 10 米. 现两人合作，多少时间可以完成整条管道的检修？

   (2) 师徒两人检修一条煤气管道，师傅单独完成要 10 小时，徒弟单独完成要 15 小时. 现两人合作，需多少小时完成？

5. 学校准备添置一批课桌椅，原订购 60 套，每套 100 元. 店方表示：如果多购，可以优惠. 结果校方购了 72 套，每套减价 3 元，但商店获得同样多的利润. 求每套课桌椅的成本.

问题 3

课外活动时李老师来教室布置作业，有一道题只写了“学校校办厂需制作一块广告牌，请来两名工人. 已知师傅单独完成需 4 天，徒弟单独完成需 6 天”就停住了. 片刻后，同学们带着疑问的目光，窃窃私语：“这个题目没有完呀！”“要求什么呢？”……

李老师开口了：“同学们的疑问是有道理的. 今天我就是要请同学们自己来提出问题. 请发挥你的想象力，把这个问题补充完整.”

调皮的小刘说：“让我试一试.”于是，上去添了：两人合作需几天完成？

有同学反对：“这太简单了！”但也引起了大家的兴趣，于是各自试了起来：有考虑一人先做几天再让另一人做的，有考虑两人先合作再一人离开的，也有考虑两人合作完成后的报酬问题的……

李老师选了两位同学的问题，综合起来，在黑板上写出：现由徒弟先做 1 天，再两人合作，完成后共得到报酬 450 元. 如果按各人完成的工作量计算报酬，那么该如何分配？

试解答这一问题，并与同学们一起交流各自的做法.

你还能提出其他问题吗？试一试，并解答这些问题.

习题 6. 3. 2

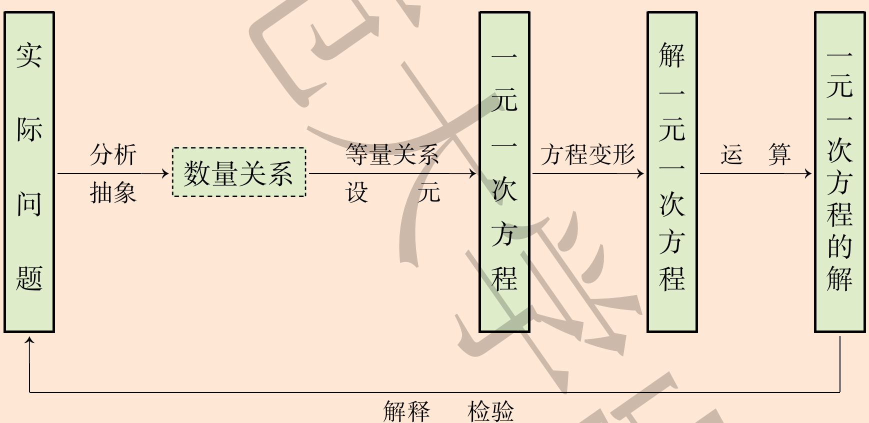
1. 试将下列问题改为与我们日常生活、学习有关的问题，使所列得的方程相同或相似：食堂存煤若干吨，原来每天烧煤 3 吨，用去 15 吨后，改进设备，每天的耗煤量降低为原来的一半，结果多烧了 10 天，求原存煤量.
2. 中国民航规定：乘坐飞机经济舱的旅客每人最多可免费托运 20 千克行李，超过部分每千克按飞机票价的 1.5% 购买行李票. 一名乘坐经济舱的旅客托运了 35 千克行李，机票连同行李费共付 1323 元，求该旅客的机票价.

3. 为庆祝学校运动会开幕,七年级(2)班学生接受了制作小旗的任务,原计划一半同学参加制作,每天制作 40 面. 完成了三分之一以后,全班同学一起参加制作,结果比原计划提前一天半完成任务. 假设每人的制作效率相同,问共制作小旗多少面?

4. 一辆汽车从 A 地驶往 B 地,前三分之一路段为普通公路,其余路段为高速公路. 已知汽车在普通公路上行驶的速度为 60 km/h,在高速公路上行驶的速度为 100 km/h,汽车从 A 地到 B 地一共行驶了 2.2 小时. 请你根据以上信息,就该汽车行驶的"路程"或"时间",提出一个问题,并给出解答.

小结

一、知识结构



二、要点

1. 对一元一次方程的认识,要联系生活实际,在解决实际问题过程中体会:方程是反映现实世界数量相等关系的一个有效的数学模型.

2. 解一元一次方程时,既要注意合理地进行方程的变形,也要注意根据方程的特点灵活运用方程的变形规则.

3. 在应用一元一次方程解实际问题时,要学会分析问题的本领,能根据题意,将实际问题转化为数学问题,特别是寻求主要的数量相等关系,列出方程. 求得方程的解后,要注意检验所得结果是否符合实际问题的要求.

复习题

A 组

1. 解下列方程：

(1) $\frac{2}{3}x-1=\frac{1}{2}x+3$；　　(2) $5(x-5)+2(x-12)=0$；

(3) $4x+3=2(x-1)+1$；　　(4) $y+\frac{1}{2}=\frac{2-y}{3}$；

(5) $\frac{2}{7}(3x+7)=2-\frac{3}{2}x$；　　(6) $\frac{2x+5}{6}-\frac{3x-2}{8}=1$.

2. (1) x 取何值时，代数式 $4x-5$ 与 $3x-6$ 的值互为相反数？

(2) k 取何值时，代数式 $\frac{k+1}{3}$ 的值比 $\frac{3k+1}{2}$ 的值小 1？

3. 课外活动中一些学生分组参加活动，原来每组 8 人，后来重新编组，每组 12 人，这样就比原来减少 2 组. 问这些学生共有多少人？

4. 一种药品现在售价为每盒 56.10 元，比原来降低了 15%，问原售价为多少元？

5. 用一根直径为 12 厘米的圆柱形铅柱，铸造 10 只直径为 12 厘米的铅球，问应截取多长的铅柱？（球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$）

6. 一个三位数，百位数字比十位数字大 1，个位数字比十位数字的 3 倍少 2. 若将三个数字的顺序颠倒后，所得的三位数与原三位数的和是 1171，求这个三位数.

7. 七年级 3 个班为希望小学捐赠图书.（1）班捐了 152 册，（2）班捐书数是 3 个班级捐书数的平均数，（3）班捐书数是年级捐书总数的 40%，3 个班共捐了多少册？

B 组

8. 解下列方程：

(1) $\frac{3}{2}\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\right]=5x$；　　(2) $2-\frac{3x-7}{4}=-\frac{x+17}{5}$；

(3) $2.4-\frac{x-4}{2}=\frac{3}{5}x$；　　(4) $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}x-1\right)-2-x=2$.

9. 已知 $x=\frac{2}{3}$ 是方程 $3\left(m-\frac{3}{4}x\right)+\frac{3}{2}x=5m$ 的解，求 m 的值.

10. 当 k 取何值时，关于 x 的方程 $2(2x-3)=1-2x$ 和 $8-k=2(x+1)$ 的解相同？

11. 学校在植树活动中种了杨树和杉树两类树木，已知种植杨树的棵数比总数的一半多 56 棵，种植杉树的棵数比总数的三分之一少 14 棵. 两类树木各种了多少棵？

12. 从甲地到乙地，长途汽车原需行驶 7 个小时，开通高速公路后，路程缩短了 30 千米，车速平均每小时增加了 30 千米，结果只需 4 个小时即可到达. 求甲、乙两地之间高速公路的路程.

13. 小王每天去体育场晨练，都见到一位田径队的叔叔也在锻炼. 两人沿 400 米环形跑道跑步，每次总是小王跑 2 圈，叔叔跑 3 圈.

(1) 一天，两人同时同地出发，反向而跑，小明看了一下记时表，发现隔了 32 秒钟两人第一次相遇，求两人的速度；

(2) 第二天小王打算和叔叔同时同地出发，同向而跑，看叔叔隔多少时间再次与他相遇. 你能先给小王预测一下吗？

C 组

14. 当 $x=2$ 时，代数式 $2x^2+(3-c)x+c$ 的值是 10，求当 $x=-3$ 时这个代数式的值.

15. 解下列方程：

(1) $|x-3|=2$；　　(2) $|2x+1|=5$.

16. 一批树苗按下列方法依次由各班领取：第一班取 100 棵和余下的 $\frac{1}{10}$，第二班取 200 棵和余下的 $\frac{1}{10}$，第三班取 300 棵和余下的 $\frac{1}{10}$……最后树苗全部被取完，且各班的树苗数都相等. 求树苗总数和班级数.

17. 小赵为班级购买笔记本用作晚会上的奖品. 回来时向生活委员小陈交账说：“一共买了 36 本，有两种规格，单价分别为 1.80 元和 2.60 元. 去时我领了 100 元，现在找回 27.60 元.”小陈算了一下，说：“你肯定搞错了.”小赵一想，发觉的确不对，因为他把自己口袋里原有的 2 元钱一起当作找回的钱款给了小陈. 请你算一算两种笔记本各买了多少？想一想有没有可能找回 27.60 元，试应用方程的知识予以解释.

18. 七年级(5)班有 46 名学生，安排值日生时要考虑：周一至周五每天除打扫教室外，还要打扫学校包干区；包干区面积不大，平时人数可少些，周五大扫除要和打扫教室的人数差不多；周一早晨需安排 1 至 2 名同学整理教室；每位同学每周轮到一次值日. 请你代理劳动委员，安排值日人数.

第 7 章　一次方程组

"我们的小世界杯"足球赛规定:胜一场得 3 分,平一场得 1 分,负一场得 0 分. 勇士队赛了 9 场,共得 17 分. 已知这个队只负了 2 场,那么胜了几场? 又平了几场呢?

$$\bigcirc + \square = 9 - 2$$

$$3 \times \bigcirc + 1 \times \square = 17$$

这就要研究有两个未知数的问题了!

本章将研究一次方程组的解法,并学会解决一些简单的实际问题.

7.1 二元一次方程组和它的解

问题 1

让我们来看导图中的问题：

暑假里，《新晚报》组织了“我们的小世界杯”足球邀请赛. 比赛规定：胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分. 勇士队在第一轮比赛中赛了 9 场，只负了 2 场，共得 17 分.

那么这个队胜了几场？又平了几场呢？

请你试一试，并比较一下两种解法.

这个问题可以用算术方法来解，也可以列一元一次方程来解.

思考

问题中告诉了我们哪些等量关系？问题中有两个未知数，如果分别设为 x、y，又会怎样呢？

探索

在下表的空格中填入数字或式子.

	胜	平	合　计
场　　数	x	y	
得　　分			

设勇士队胜了 x 场,平了 y 场,那么根据题意,由上表得

$$x+y=7, \quad ①$$

和

$$3x+y=17. \quad ②$$

这两个方程有什么共同的特点?

这里,比赛场数 x、y 要满足两个等量关系:一个是胜与平的场数,一共是 7 场;另一个是这些场次的得分,一共是 17 分. 也就是说,两个未知数 x、y 必须同时满足①、②这两个方程. 因此,把两个方程合在一起,并写成

$$\begin{cases} x+y=7, & ① \\ 3x+y=17. & ② \end{cases}$$

上面列出的两个方程都有两个未知数,并且含未知数项的次数都是 1. 像这样的方程,叫做**二元一次方程**. 把这样的两个二元一次方程合在一起,就组成了一个**二元一次方程组**(system of linear equations with two unknowns).

用算术方法或者通过列一元一次方程都可以求得勇士队胜了 5 场,平了 2 场,即 $x=5$, $y=2$.

这里的 $x=5$ 与 $y=2$ 既满足方程①,即

$$5+2=7,$$

又满足方程②，即

$$3\times5+2=17.$$

我们就说 $x=5$ 与 $y=2$ 是二元一次方程组

$$\begin{cases}x+y=7,\\3x+y=17\end{cases}$$

的解，并记作

$$\begin{cases}x=5,\\y=2.\end{cases}$$

一般地，使二元一次方程组中两个方程的左右两边的值都相等的两个未知数的值，叫做**二元一次方程组的解**.

问题 2

某校现有校舍 20 000 m^2，计划拆除部分旧校舍，改建新校舍，使校舍总面积增加 30%. 若新建校舍的面积为被拆除的旧校舍面积的 4 倍，则应该拆除多少旧校舍，建造多少新校舍？

试一试

若设应拆除 x m^2 旧校舍，建造 y m^2 新校舍，请你根据题意列一个方程组.

习题 7.1

1. 设适当的未知数，列出二元一次方程组：

(1) 甲、乙两数的和为 14，甲数的 $\frac{1}{3}$ 比乙数的 2 倍少 7，求这两个数；

(2) 摩托车的速度是货车速度的 $\frac{3}{2}$ 倍，两车的速度之和是 200 千米/时，求摩托车和货车的速度；

(3) 某种时装的单价是某种皮装单价的 1.4 倍,5 件皮装比 3 件时装贵 700 元,求时装和皮装的单价.

2. 已知下面的三对数值:

$\begin{cases} x = -8, \\ y = 10; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ y = -6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 10, \\ y = -1. \end{cases}$

(1) 哪几对数值能使方程 $\frac{1}{2}x - y = 6$ 左、右两边的值相等?

(2) 哪几对数值是方程组 $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 6, \\ 2x + 31y = -11 \end{cases}$ 的解?

7.2 二元一次方程组的解法

探索

我们先来回顾 7.1 节中的问题 2.

在问题 2 中,如果设应拆除 x m^2 旧校舍,建造 y m^2 新校舍,那么根据题意可列出方程组

$$\begin{cases} y - x = 20\,000 \times 30\%, & ① \\ y = 4x. & ② \end{cases}$$

怎样求这个二元一次方程组的解呢?

观察

方程②表明,y 与 $4x$ 的值是相等的,因此,方程①中的 y 可以看成 $4x$,即将②代入①:

通过"代入","消去"了 y,得到了一元一次方程,就可以解了!

$$\begin{array}{c} y = \boxed{4x} \\ \downarrow \\ \boxed{y} - x = 20\,000 \times 30\%, \end{array}$$

可得

$$4x - x = 20\,000 \times 30\%.$$

解 把②代入①,得

$$\begin{aligned} 4x - x &= 20\,000 \times 30\%, \\ 3x &= 6000, \\ x &= 2000. \end{aligned}$$

把 $x = 2000$ 代入②,得

$$y = 8000.$$

所以

$$\begin{cases} x = 2000, \\ y = 8000. \end{cases}$$

答:应拆除 2000 m^2 旧校舍,建造 8000 m^2 新校舍.

从这个解法中我们可以发现:通过将②代入①,能消去未知数 y,得到一个关于 x 的一元一次方程,求出它的解,进而求出 y 的值.

用同样的方法可以解 7.1 节问题 1 中的二元一次方程组.

这里没有一个方程是一个未知数用另一个未知数表示的形式,怎么办呢?

例 1 解方程组:

$$\begin{cases} x + y = 7, & ① \\ 3x + y = 17. & ② \end{cases}$$

解 由①,得

$$y = 7 - x. \quad ③$$

将③代入②,得

$$3x + 7 - x = 17.$$

解得 $$x=5.$$

将 $x=5$ 代入③，得

$$y=2.$$

所以 $$\begin{cases}x=5,\\y=2.\end{cases}$$

思考

回顾并概括上面的解答过程，并想一想，怎样解方程组：

$$\begin{cases}3x-5y=6,\\x+4y=-15.\end{cases}$$

练　习

解下列方程组：

1. $\begin{cases}x=3y+2,\\x+3y=8.\end{cases}$

2. $\begin{cases}4x-3y=17,\\y=7-5x.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x-y=-5,\\3x+2y=10.\end{cases}$

4. $\begin{cases}2x-7y=8,\\y-2x=-3.2.\end{cases}$

例 2　解方程组：

$$\begin{cases}2x-7y=8, & ①\\3x-8y-10=0. & ②\end{cases}$$

这两个方程中未知数的系数都不是 1，怎么办？

分析　能不能将其中一个方程适当变形，用一个未知数来表示另一个未知数呢？

这里是先消去 x,得到关于 y 的一元一次方程. 可以先消去 y 吗? 试一试.

解 由①,得

$$x = 4 + \frac{7}{2}y. \qquad ③$$

将③代入②,得

$$3\left(4 + \frac{7}{2}y\right) - 8y - 10 = 0.$$

解得 $y = -0.8.$

将 $y = -0.8$ 代入③,得

$$x = 4 + \frac{7}{2} \times (-0.8),$$

即 $x = 1.2.$

所以 $\begin{cases} x = 1.2, \\ y = -0.8. \end{cases}$

练习

1. 把下列各方程变形为用一个未知数的代数式表示另一个未知数的形式:

(1) $4x - y = -1$;

(2) $5x - 10y + 15 = 0$.

2. 解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 2x - 4y = 6, \\ 3x + 2y = 17; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3y = x + 4, \\ 2x + 5y = -19; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x - 5y = 1; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3x + 5y = 5, \\ 3x - 4y = 23. \end{cases}$

例3 解方程组：

$$\begin{cases}3x+5y=5, & ①\\ 3x-4y=23. & ②\end{cases}$$

探索

注意到这个方程组的未知数 x 的系数相同，都是 3. 请你把这两个方程的左边与左边相减，右边与右边相减，看看，能得到什么结果？

把两个方程的两边分别相减，就消去了 x，得到

$$9y=-18,$$

即 $$y=-2.$$

把 $y=-2$ 代入①，得

$$3x+5\times(-2)=5.$$

解得 $$x=5.$$

这样，我们求得了一对 x、y 的值. 显然，$\begin{cases}x=5,\\ y=-2\end{cases}$ 是原方程组的解.

此题我们已在前面练习过，对照一下，这里的解法是否比较简便？优点在哪里？

思考

从上面的解答过程中，你发现了二元一次方程组的新解法吗？

例4 解方程组：

$$\begin{cases}3x+7y=9, & ①\\ 4x-7y=5. & ②\end{cases}$$

怎样消去一个未知数？先消去哪一个比较简便？

解 ①+②，得

$$7x=14,$$

即 $$x=2.$$

将 $x=2$ 代入①,得

$$6+7y=9,$$

解得 $$y=\frac{3}{7}.$$

所以 $$\begin{cases}x=2,\\ y=\dfrac{3}{7}.\end{cases}$$

概括

"代入"也好,"加减"也罢,基本思想是"消元"、"转化",将新问题"化归"为老问题来解决.

在解例1、例2时,我们是通过"代入"消去一个未知数,将方程组转化为一元一次方程来解的. 这种解法叫做**代入消元法**,简称**代入法**.

在解例3、例4时,我们是通过将两个方程的两边分别相加(或相减)消去一个未知数,将方程组转化为一元一次方程来解的. 这种解法叫做**加减消元法**,简称**加减法**.

练 习

解下列方程组:

1. $\begin{cases}5x+y=7,\\ 3x-y=1.\end{cases}$

2. $\begin{cases}4x-3y=5,\\ 4x+6y=14.\end{cases}$

3. $\begin{cases}6x+7y=5,\\ 6x-7y=19.\end{cases}$

4. $\begin{cases}0.5x-3y=-1,\\ -\dfrac{1}{2}x+5y=3.\end{cases}$

例5 解方程组:

$$\begin{cases}3x - 4y = 10, & ①\\ 5x + 6y = 42. & ②\end{cases}$$

直接相加减不能消去一个未知数,怎么办呢?

分析 设法把这个方程组变成像例 3 或例 4 那样的形式. 想想看,如何才能达到要求?

解 ①×3,②×2,得

$$\begin{cases}9x - 12y = 30, & ③\\ 10x + 12y = 84. & ④\end{cases}$$

③+④,得 $19x = 114$,

即 $x = 6.$

把 $x = 6$ 代入②,得

$$30 + 6y = 42,$$

解得 $y = 2.$

所以 $\begin{cases}x = 6,\\ y = 2.\end{cases}$

思考

能否先消去 x 再求解? 怎么做?

试一试

在本节例 2 解方程组

$$\begin{cases}2x - 7y = 8,\\ 3x - 8y - 10 = 0\end{cases}$$

时,用了什么方法? 现在你不妨用加减法试一试,看哪种方法比较简便.

练　习

解下列方程组：

1. $\begin{cases}3x-2y=6,\\2x+3y=17.\end{cases}$

2. $\begin{cases}4x-2y=14,\\5x+y=7.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x-3y=-20,\\3x+7y=100.\end{cases}$

4. $\begin{cases}2x-3y=8,\\5y-7x=5.\end{cases}$

例 6　某蔬菜公司收购到某种蔬菜 140 吨，准备加工后上市销售. 该公司的加工能力是：每天可以粗加工 16 吨或者精加工 6 吨. 现计划用 15 天完成加工任务，该公司应安排几天粗加工，几天精加工？如果每吨蔬菜粗加工后的利润为 1000 元，精加工后的利润为 2000 元，那么照此安排，该公司出售这些加工后的蔬菜共可获利多少元？

分析　问题的关键是解答前一个问题，即先求出安排粗加工和精加工的天数. 从题目的信息中我们可以得到这样的等量关系：

（1）粗加工天数 + 精加工天数 = 15；

（2）粗加工任务 + 精加工任务 = 140.

设粗加工和精加工的天数分别为 x、y，将两个等量关系直接“翻译”就可列出方程组.

解 设应安排 x 天粗加工，y 天精加工. 根据题意，有

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ 16x + 6y = 140. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = 10. \end{cases}$$

出售这些加工后的蔬菜一共可获利

$$\begin{aligned} &1000 \times 16 \times 5 + 2000 \times 6 \times 10 \\ =\ &200\,000(\text{元}). \end{aligned}$$

答：应安排 5 天粗加工，10 天精加工，加工后出售共可获利 200 000 元.

归纳

在第 6 章中，我们借助列一元一次方程解决了一些简单的实际问题. 在这里，又借助列二元一次方程组解决了另一些实际问题. 实际上，在很多问题中，都存在着一些等量关系，因此我们往往可以借助列方程或方程组的方法来处理这些问题. 这种处理问题的过程可以进一步概括为：

$$\text{问题} \xrightarrow[\text{抽象}]{\text{分析}} \text{方程(组)} \xrightarrow[\text{检验}]{\text{求解}} \text{解答}$$

要注意的是，处理实际问题的方法往往是多种多样的，应该根据具体问题灵活选用.

练　习

1. 22 名工人按定额完成了 3400 件产品，其中三级工每人定额 200 件，二级工每人定额 150 件. 若这 22 名工人中只有二级工与三级工，问二级工与三级工各有多少名？
2. 为改善富春河的周围环境，县政府决定，将该河上游 A 地的一部分牧场改为林场. 改变后，预计林场和牧场共有 162 公顷，牧场面积是林场面积的 20%. 请你算一算，改变后林场、牧场的面积各为多少公顷？
3. 某船的载重为 260 吨，容积为 1000 m^3. 现有甲、乙两种货物要运，其中甲种货物每吨体积为 8 m^3，乙种货物每吨体积为 2 m^3，若要充分利用这艘船的载重与容积，则甲、乙两种货物应各装多少吨？（设装运货物时不留空隙）

习题 7.2

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x-3y=2, \\ 2x+y=18; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2a+b=0, \\ 4a+3b=6; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x-2y+20=0, \\ 2x+15y-3=0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2y-8=-x, \\ 4x+3y=7. \end{cases}$

2. 第一小组的同学分铅笔若干支，若每人各取 5 支，则还剩 4 支；若有 1 人只取 2 支，则其余每人恰好各得 6 支. 问第一小组同学有多少人？铅笔有多少支？
3. 甲、乙两人要加工 400 个机器零件，若甲先做 1 天，然后两人再共做 2 天，则还有 60 个无法完成；若两人合作 3 天，则可超产 20 个. 问甲、乙两人每天各加工多少个零件？
4. 某厂第二车间的人数比第一车间人数的 $\frac{4}{5}$ 少 30 人. 如果从第一车间调 10 人到第二车间，那么第二车间的人数就是第一车间人数的 $\frac{3}{4}$. 问这两个车间原来各有多少人？

*7.3 三元一次方程组及其解法

问题

在 7.1 节中，我们应用二元一次方程组，求出了勇士队在“我们的小世界杯”足球赛第一轮比赛中胜与平的场数.

在第二轮比赛中，勇士队参加了 10 场比赛，按同样的计分规则，共得 18 分. 已知勇士队在比赛中胜的场数正好等于平与负的场数之和，那么勇士队在第二轮比赛中胜、平、负的场数各是多少?

这个问题可以用多种方法(算术方法、列出一元一次方程或二元一次方程组)来解决.

请你试一试，并对不同的方法进行比较.

小明同学提出了一个新的思路:

问题中有三个未知数，如果设这个队在第二轮比赛中胜、平、负的场数分别为 x、y、z，又将怎样呢?

分别将已知条件直接“翻译”，列出方程，并将它们写成方程组的形式，得

$$\begin{cases} x+y+z=10, & ① \\ 3x+y=18, & ② \\ x=y+z. & ③ \end{cases}$$

像这样的方程组称为三元一次方程组.

怎样解三元一次方程组呢?

回忆一下二元一次方程组的解法，从中能得到什么启示?

在上一节中，我们学习了二元一次方程组的解法，其基本思想是：通过“消元”，消去一个未知数，将方程组转化为一元一次方程求解. 方法有代入消元法和加减消元法.

对于三元一次方程组，同样可以先消去一个（或两个）未知数，转化为二元一次方程组（或一元一次方程）求解.

注意到方程③中，x 是用含 y 和 z 的代数式来表示的，将它分别代入方程①、②，得到

$$\begin{cases} 2y+2z=10, & \text{④} \\ 4y+3z=18. & \text{⑤} \end{cases}$$

化归思想在这里进一步得到体现，你体会到了吗？

这是一个关于 y、z 的二元一次方程组，解之得

$$\begin{cases} y=3, \\ z=2. \end{cases}$$

将 $y=3$，$z=2$ 代入方程③，可以得到 $x=5$.

所以这个三元一次方程组的解是

$$\begin{cases} x=5, \\ y=3, \\ z=2. \end{cases}$$

试一试

上面的三元一次方程组能否应用加减消元法求解？或者能否利用方程③，直接消去方程①中的 $y+z$？比较一下，哪种方法更简便？

例 1 解方程组：

$$\begin{cases} 2x-3y+4z=3, & \text{①} \\ 3x-2y+z=7, & \text{②} \\ x+2y-3z=1. & \text{③} \end{cases}$$

解 由方程②，得

$$z=7-3x+2y. \qquad \text{④}$$

将④分别代入方程①和③，得

$$\begin{cases} 2x-3y+4(7-3x+2y)=3, \\ x+2y-3(7-3x+2y)=1. \end{cases}$$

整理,得

$$\begin{cases}-2x+y=-5,\\5x-2y=11.\end{cases}$$

解这个二元一次方程组,得

$$\begin{cases}x=1,\\y=-3.\end{cases}$$

代入④,得

$$z=7-3-6=-2.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x=1,\\y=-3,\\z=-2.\end{cases}$$

概括

这里,我们用的是代入消元法:先由方程②,用含有 x、y 的代数式表示 z,再分别代入方程①和③,消去未知数 z,转化为只含有 x、y 的二元一次方程组求解.

能否先消去 x(或 y)?怎么做?比较一下,哪个更简便?

练　习

1. 解下列方程组:

(1) $\begin{cases}x+y+z=6,\\3x-y+2z=12,\\x-y-3z=-4;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3x-2y=5,\\y-5z=-11,\\3z-4x=2.\end{cases}$

2. 试用加减消元法解例 1 中的方程组.

例 2　解方程组:

$$\begin{cases}3x+4y-3z=3, & ①\\2x-3y-2z=2, & ②\\5x-3y+4z=-22. & ③\end{cases}$$

分析 三个方程中未知数的系数都不是1或-1，用代入消元法比较麻烦，可考虑用加减消元法来解.

解 ③$-$②，得

$$3x+6z=-24,$$

即

$$x+2z=-8.$$

①$\times 3+$②$\times 4$，得

$$17x-17z=17,$$

即

$$x-z=1.$$

得方程组

$$\begin{cases}x+2z=-8,\\ x-z=1.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=-2,\\ z=-3.\end{cases}$$

将$x=-2$，$z=-3$代入方程②，得$y=0$.

所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x=-2,\\ y=0,\\ z=-3.\end{cases}$$

通过“加减”，先消去y.

能否先消去z(或x)？怎么做？比较一下，哪个更简便？

概括

上述例1和例2的解答分别应用了代入消元法和加减消元法，先消去某一个未知数，将三元一次方程组转化为二元一次方程组，然后解所得的二元一次方程组，得到两个未知数的值，进而求出第三个未知数的值，从而得到原方程组的解.

练 习

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x+y-z=2, \\ 4x-2y+3z+8=0, \\ x+3y-2z-6=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}, \\ \dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}, \\ x+y+z=60. \end{cases}$

2. 已知 $y=ax^2+bx+c$. 当 $x=-2$ 时，$y=9$；当 $x=0$ 时，$y=3$；当 $x=2$ 时，$y=5$. 求 a、b、c 的值.

习题 7.3

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-y+3z=2, \\ x-4y-2z+6=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x+y=6, \\ x+2y-z=5, \\ 5x-3y+2z=4; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y+z=-1, \\ 4x-2y+3z=5, \\ y-z=8-2x; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 3y-4z=3, \\ 4z+5x=7. \end{cases}$

2. 某初级中学共有学生 673 人，已知八年级学生人数比其他两个年级人数的平均数多 25 人，九年级学生人数比七年级学生人数少 8 人，3 个年级各有多少人？

7.4 实践与探索

问题 1

要用 20 张白卡纸做长方体的包装盒，准备把这些白卡纸分成两部分，一部分做侧面，另一部分做底面. 已知每张白卡纸可以做 2 个侧面，或者做 3 个底面. 如果 1 个侧面和 2 个底面可以做成一个包装盒，那么如何分才能使做成的侧面和底面正好配套?

请你设计一种分法.

想一想，如果可以将一张白卡纸裁出一个侧面和一个底面，那么，该如何分这些白卡纸，才能既使做出的侧面和底面配套，又能充分利用白卡纸?

问题 2

小明在拼图时，发现 8 个大小一样的长方形，恰好可以拼成如图 7.4.1 所示的一个大的长方形.

小红看见了，说:“我来试一试.”结果小红七拼八凑，拼成如图 7.4.2 所示的正方形. 咳，怎么中间还留下了一个洞，恰好是边长为 2 mm 的小正方形!

你能求出这些长方形的长和宽吗?

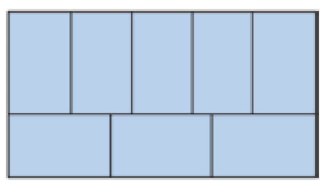


图 7.4.1

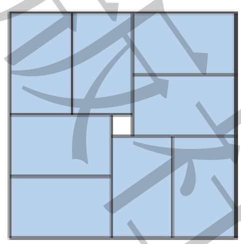


图 7.4.2

探索

设长方形的长和宽分别为 x mm、y mm. 图 7.4.2 给我们提供了一个信息：

$$S_{\text{大正方形}} - 8 \times S_{\text{长方形}} = 2^2,$$

即
$$(x + 2y)^2 - 8xy = 4.$$

但这是我们还没有研究过的方程！你有什么其他办法来解决这个问题？

一条路不通，另辟蹊径！仔细观察两幅图，你还能发现哪些有用的信息？

做一做

在 6.3 节提出的问题中选出一个，用本章的方法来处理，并比较一下两种方法，谈谈你的感受.

习题 7.4

1. 某市为更有效地利用水资源，制定了用水收费标准：如果一户三口之家每月用水量不超过 A m³，按每立方米水 1.30 元收费；如果超过 A m³，超过部分按每立方米水 2.90 元收费，其余仍按每立方米水 1.30 元收费. 小红一家三人，1 月份共用水 12 m³，支付水费 22 元. 问该市制定的用水标准 A 为多少？小红一家超过部分的用水是多少立方米？

2. 长风乐园的门票价格如下表所示. 某校七年级（1）、（2）两个班共 104 人去游长风乐园，其中（1）班人数较少，不到 50 人，（2）班人数较多，有 50 多人. 经估算，如果两个班都以班为单位分别购票，那么一共应付 1240 元；如果两个班联合起来，作为一个团体购票，那么可以节省不少钱. 问两个班各有多少名学生？

购票人数（人）	1～50	51～100	100 以上
每人门票价（元）	13	11	9

阅读材料

鸡 兔 同 笼

今有鸡兔同笼
上有三十五头
下有九十四足
问鸡兔各几何

这是出自我国《孙子算经》卷中著名的“雉(鸡)兔同笼”问题,可以认为是我国鸡兔同笼问题的始祖. 对这一问题,《孙子算经》给出了简捷而又巧妙的解法:“上置头,下置足. 半其足,以头除足,以足除头,即得.”(此处除意为减)

即先设金鸡独立,玉兔双腿(即“半其足”),这时共有腿数为:$94\div2=47$.

在这 47 条腿数中,每数一条腿应该有一只鸡,而每数两条腿才有一只兔,也就是说,鸡的头足数相等,而每只兔的头数却比足数少一,所以兔数为

$$47-35=12,$$

鸡数为

$$35-12=23.$$

在一般情况下,如果设 x 为鸡数,y 为兔数,A 为鸡兔总共只数,B 为鸡兔总共足数,则

$$\begin{cases}x+y=A,\\2x+4y=B.\end{cases}$$

可解得

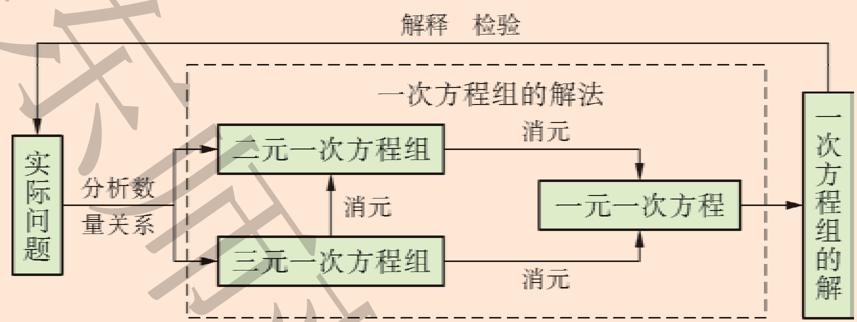
$$\begin{cases}x=A-y=A-\left(\dfrac{B}{2}-A\right),\\y=\dfrac{B}{2}-A.\end{cases}$$

这就是说,兔数恰好为腿数的二分之一(半其足)与总头数之差(以头除足).

在古代朱世杰的《算学启蒙》(1299 年)卷中、《永乐大典》卷中的《丁巨算法》、严恭的《通原算法》中,也有鸡兔同笼问题的记载. 朱世杰的解法与《孙子算经》不同,而与现在算术解法则几乎完全一样.

小结

一、知识结构



二、要点

1. 在实际问题中,经常会遇到有多个未知量的问题. 和一元一次方程一样,二(三)元一次方程组也是反映现实世界数量之间相等关系的数学模型. 要学会将实际问题转化为数学问题,列出二(三)元一次方程组,最终求得符合实际的解.

2. 解一次方程组的基本思想是消元、转化:通过消元,把三元一次方程组转化为二元一次方程组,把二元一次方程组转化为一元一次方程. 最常见的消元方法有代入法和加减法. 一个方程组用什么方法来逐步消元,应根据它的特点灵活选定.

3. 通过列方程组来解实际问题,应注意检验和正确作答. 检验不仅要检查求得的解是否满足所列方程组中的每一个方程,而且要检验所得的解答是否符合实际问题的要求.

复习题

A 组

1. 填空：

(1) 在 $y=\frac{2}{3}x-4$ 中，如果 $x=1.5$，那么 $y=$ ________，如果 $y=0$，那么 $x=$ ________；

(2) 由 $3x-2y=5$，得到用 x 表示 y 的式子为 $y=$ ________.

2. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x-13y=-16,\\x+3y=2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x+2y+2=0,\\7x-4y=-41;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3t-4s=14,\\5t+4s=2;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}5x+6y=15.2,\\3x-2y=-0.4;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}2m+9n=4.8,\\3m-5n=-15;\end{cases}$　　(6) $\begin{cases}\frac{1}{2}x+3y=\frac{2}{3},\\x-\frac{3}{4}y=-\frac{29}{12}.\end{cases}$

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x-2y=8,\\2y+3z=1,\\x+5y-z=-4;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x-3y-z=-4,\\x+2y+2z=6,\\3x+2y+z=11.\end{cases}$

4. 在等式 $y=kx+b$ 中，当 $x=1$ 时，$y=-2$；当 $x=-1$ 时，$y=-4$. 求 k、b 的值.

5. 小明与他的爸爸一起做“投篮球”游戏. 两人商定规则为：小明投中 1 个得 3 分，小明爸爸投中 1 个得 1 分. 结果两人一共投中了 20 个，经计算，发现两人的得分恰好相等. 你能知道他们两人各投中几个吗？

6. 今年，小李的年龄是他爷爷的 $\frac{1}{5}$. 小李发现，12 年之后，他的年龄变成爷爷的 $\frac{1}{3}$. 试求出今年小李的年龄.

7. 某检测站计划在规定时间内检测一批仪器，如果每天检测 30 台，那么在规定时间内只能检测计划数的 $\frac{4}{5}$. 现在每天实际检测 40 台，结果不但比原计划提前了一天完成任务，还多检测了 25 台. 问规定时间是多少天？原计划检测多少台？

B 组

8. 解下列方程组：

(1) $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{2x-y}{3}=x+2$；　　(2) $\begin{cases}\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{3y-2}{4}=2,\\ \dfrac{3x+1}{5}-\dfrac{3y+2}{4}=0.\end{cases}$

9. A、B 两地相距 3 千米. 甲从 A 地出发步行到 B 地，乙从 B 地出发步行到 A 地. 两人同时出发，20 分钟后相遇，又经过 10 分钟后，甲所余路程为乙所余路程的 2 倍. 求两人的速度.

10. 甲、乙两人同时加工一批零件，前 3 小时两人共加工 126 件，后 5 小时中甲先花了1 小时修理工具，之后甲每小时比以前多加工 10 件，结果在后 5 小时内，甲比乙多加工了 10 件. 甲、乙两人原来每小时各加工多少件?

11. 已知某个三角形的周长为 18 cm，其中两条边的长度之和等于第三条边长度的 2 倍，而它们的差等于第三条边长度的$\dfrac{1}{3}$，求这个三角形三边的长度.

12. 两块试验田去年共产花生 470 千克. 改用良种后，今年共产花生 523 千克. 已知第一块田的产量比去年增产 16%，第二块田的产量比去年增产 10%. 求改用良种后每块田的产量.

（第 12 题）

13. 二果问价（源于我国古代算书《四元玉鉴》）：

九百九十九文钱　甜果苦果买一千　甜果九个十一文
苦果七个四文钱　试问甜苦果几个　又问各该几个钱

C 组

14. 客车和货车分别在两条平行的铁轨上行驶，客车长 450 米，货车长 600 米. 如果两车相向而行，那么从两车车头相遇到车尾离开共需 21 秒钟；如果客车从后面追货车，那么从客车车头追上货车车尾到客车车尾离开货车车头共需 1 分 45 秒. 求两车的速度.

15. 李老师去一家文具店给美术小组的 30 名同学买铅笔和橡皮. 到了商店后发现,按商店规定,如果给全组每人都买 2 支铅笔和 1 块橡皮,那么按零售价计算,共需付 30 元;如果给全组每人都买 3 支铅笔和 2 块橡皮,那么可以按批发价计算,共需付 40.50 元. 已知每支铅笔的批发价比零售价低 0.05 元,每块橡皮的批发价比零售价低 0.10 元. 这家文具店每支铅笔和每块橡皮的批发价各是多少元?

16. 一张方桌由 1 个桌面、4 条桌腿组成. 如果 1 立方米木料可以做方桌的桌面 50 个或做桌腿 300 条,现有 5 立方米木料,那么用多少立方米木料做桌面、多少立方米木料做桌腿,做出的桌面和桌腿能恰好配成方桌? 能配成多少张方桌?

第 8 章　一元一次不等式

某班 27 名学生去世纪公园. 世纪公园的票价是每人 5 元;一次购票满 30 张,每张票可少收 1 元.

怎么买票合算?

这里涉及数学上的不等式!

本章将研究一元一次不等式的解法,
并学会解决一些简单的实际问题.

8.1 认识不等式

问题

世纪公园的票价是每人 5 元;一次购票满 30 张,每张票可少收 1 元. 某班有 27 名少先队员去世纪公园进行活动. 当领队王小华准备好了零钱到售票处买 27 张票时,爱动脑筋的李敏同学喊住了王小华,提议买 30 张票. 但有的同学不明白,明明我们只有 27 个人,买 30 张票,岂不是“浪费”吗?

那么,究竟李敏的提议对不对? 是不是真的“浪费”呢?

解决这个问题的关键是比较两种方式付款的多少.

我们不妨一起来算一算:

买 27 张票,要付款

$$5 \times 27 = 135(\text{元}).$$

买 30 张票,要付款

$$4 \times 30 = 120(\text{元}).$$

显然 $120 < 135.$

这就是说,买 30 张票比买 27 张票付款要少,表面上看是“浪费”了 3 张票,实际上反而节省了.

当然,如果去世纪公园的人数较少(例如 10 个人),显然不值得去买 30 张票,还是按实际人数买票为好. 现在的问题是:少于 30 人时,有多少人去世纪公园,买 30 张票反而合算呢?

探索

我们一起来分析上面提出的问题.

设有 x 人要去世纪公园. 如果 $x<30$,那么按实际人数买票 x 张,要付款 $5x$(元);买 30 张票,要付款 $4\times30=120$(元).

如果买 30 张票合算,那么应有

$$120 < 5x.$$

尝试、检验,找出符合要求的答案.

现在的问题就是:x 取哪些数值时,上式成立?

前面已经算过,当 $x=27$ 时,上式成立. 让我们再取一些值试一试,将结果填入下表.

x	$5x$	比较 120 与 $5x$ 的大小	$120<5x$ 成立吗?
21	105	$120>5x$	不成立
22			
23			
24			
25			
26			
27	135	$120<5x$	成立
28			
29			

由上表可见,当 $x=$ ________________ 时,$120<5x$ 成立. 也就是说,少于 30 人时,至少要有________人进公园,买 30 张票反而合算.

概括

像上面出现的 $120<135$, $x<30$, $120<5x$ 那样用不等号"<"或">"表示不等关系的式子,叫做**不等式**(inequality).

不等式 $120<5x$ 中含有未知数 x. 能使不等式成立的未知数的值,叫做**不等式的解**(solution of inequality).

如上例中,$x=25, 26, 27, \cdots$ 都是不等式 $120<5x$ 的解,而 $x=24, 23, 22, 21$ 则都不是它的解.

例 用不等式表示下列关系,并分别写出两个满足不等式的数:

(1) x 的一半小于 -1;

(2) y 与 4 的和大于 0.5;

(3) a 是负数;

(4) b 是非负数.

解 (1) $\frac{1}{2}x < -1$. 如 $x = -3, -4$.

(2) $y + 4 > 0.5$. 如 $y = 0, 1$.

(3) $a < 0$. 如 $a = -3, -4$.

(4) b 是非负数,即 b 不是负数,所以 $b > 0$ 或 $b = 0$. 如 $b = 0, 2$.

$b>0$ 或 $b=0$,通常可表示成 $b\geqslant 0$.

练 习

1. 用不等式表示:

(1) x 的 3 倍大于 5;

(2) y 与 2 的差小于 -1;

(3) x 的 2 倍大于 x;

(4) y 的 $\frac{1}{2}$ 与 3 的差是负数;

(5) a 是正数;

(6) b 不是正数.

2. 用"<"号或">"号填空:

(1) $7+3$ ________ $4+3$;

(2) $7+(-1)$ ________ $4+(-1)$;

(3) 7×3 ________ 4×3;

(4) $7\times(-3)$ ________ $4\times(-3)$.

3. 下列各数中,哪些是不等式 $x+2>5$ 的解? 哪些不是?

$$-3, -2, -1, 0, 1.5, 2.5, 3, 3.5, 5, 7.$$

习题 8.1

1. 比较下列各数的大小,用"<"号或">"号填空:

(1) -3 ____ -2;

(2) -1 ____ 0;

(3) 3 ____ -4;

(4) -5 ____ -6;

(5) $\frac{1}{2}$ ____ $\frac{2}{3}$;

(6) $-\frac{1}{2}$ ____ $-\frac{2}{3}$.

2. 用不等式表示：

(1) x 的$\frac{1}{2}$与 3 的差大于 2；

(2) $2x$ 与 1 的和小于零；

(3) a 的 2 倍与 4 的差是正数；

(4) b 的$\frac{1}{2}$与 c 的和是负数；

(5) a 与 b 的差是非负数；

(6) x 的绝对值与 1 的和大于 1.

8.2 解一元一次不等式

1. 不等式的解集

回忆

在上一节练习第 3 题中，我们发现，-3、-2、-1、0、1.5、2.5、3 都不是不等式 $x+2>5$ 的解，而 3.5、5、7 都是不等式 $x+2>5$ 的解. 由此可以看出，不等式 $x+2>5$ 有许多个解.

进而看出，大于 3 的每一个数都是不等式 $x+2>5$ 的解，而不大于 3 的每一个数都不是不等式 $x+2>5$ 的解. 不等式 $x+2>5$ 的解有无数个，它们组成一个集合，称为不等式 $x+2>5$ 的解集.

概括

一个不等式的所有解，组成这个不等式的解的集合，简称为这个不等式的**解集**(solution set).

研究不等式的一个重要任务,就是求出不等式的解集. 求不等式的解集的过程,叫做解不等式.

不等式 $x+2>5$ 的解集,可以表示成 $x>3$,它也可以在数轴上直观地表示出来,如图 8.2.1 所示.

同样,如果某个不等式的解集为 $x\leqslant -2$,也可以在数轴上直观地表示出来,如图 8.2.2 所示.

比较图 8.2.1 与图 8.2.2,它们有什么区别?

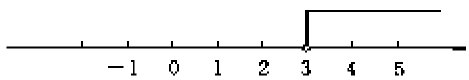


图 8.2.1

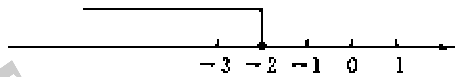


图 8.2.2

这里,出现了符号"$\leqslant$". 一般地,解集 $x\leqslant a$,表示"x 小于或等于 a",或者说"x 不大于 a". 类似地,解集 $x\geqslant a$,表示"x 大于或等于 a",或者说"x 不小于 a".

在数轴上,解集 $x\leqslant a$,是指表示数 a 的点左边的部分,包括表示数 a 的点在内,这一点画成实心圆点. 而解集 $x<a$,则是指表示数 a 的点左边的部分,但不包括表示数 a 的点,这一点画成空心圆圈. 对于解集 $x\geqslant a$ 和 $x>a$ 在数轴上的表示,与此相仿.

练 习

1. 根据"当 x 为任何正数时,都能使不等式 $x+3>2$ 成立",能不能说"不等式 $x+3>2$ 的解集是 $x>0$"? 为什么?
2. 两个不等式的解集分别为 $x<2$ 和 $x\leqslant 2$,它们有什么不同? 在数轴上怎样表示它们的区别?
3. 两个不等式的解集分别为 $x<1$ 和 $x\geqslant 1$,分别在数轴上将它们表示出来.

2. 不等式的简单变形

回顾与探索

在解一元一次方程时，我们主要是对方程进行变形．在研究解不等式时，我们先探究不等式的变形规律．

方程有哪些简单变形？

如图 8.2.3 所示，一个倾斜的天平两边分别放有重物，其质量分别为 a 和 b，$a>b$．如果在两边盘内分别加上等质量的砝码 c，那么盘子仍然像原来那样倾斜，即有 $a+c>b+c$．

图 8.2.3

概括

不等式的性质 1　如果 $a>b$，那么

$$\boldsymbol{a+c>b+c,\ a-c>b-c.}$$

这就是说，不等式的两边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，不等号的方向不变．

思考

不等式的两边都乘以（或都除以）同一个不为零的数，不等号的方向是否也不变呢？

试一试

将不等式 $7>4$ 的两边都乘以同一个数,比较所得结果的大小,用"<"、">"或"="号填空:

$$7\times3\ \_\_\_\_\ 4\times3,$$
$$7\times2\ \_\_\_\_\ 4\times2,$$
$$7\times1\ \_\_\_\_\ 4\times1,$$
$$7\times0\ \_\_\_\_\ 4\times0,$$
$$7\times(-1)\ \_\_\_\_\ 4\times(-1),$$
$$7\times(-2)\ \_\_\_\_\ 4\times(-2),$$
$$7\times(-3)\ \_\_\_\_\ 4\times(-3),$$
$$\cdots\cdots$$

你能从中发现什么?

概括

不等式的性质 2　如果 $a>b$,并且 $c>0$,那么

$$ac>bc,\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c}.$$

不等式的性质 3　如果 $a>b$,并且 $c<0$,那么

$$ac<bc,\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c}.$$

这就是说,不等式的两边都乘以(或都除以)同一个正数,不等号的方向不变;不等式的两边都乘以(或都除以)同一个负数,不等号的方向改变.

与解方程类似,解不等式的过程,就是利用不等式的基本性质,将不等式进行适当的变形,得到 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式.

例 1　解不等式:

(1) $x-7<8$;

(2) $3x<2x-3$.

解 （1）不等式的两边都加上7，不等号的方向不变，所以

$$x-7+7<8+7,$$

得 $$x<15.$$

（2）不等式的两边都减去$2x$（即都加上$-2x$），不等号的方向不变，所以

$$3x-2x<2x-3-2x,$$

得 $$x<-3.$$

这里的变形，与方程变形中的移项类似. 试总结一下：怎样进行不等式的“移项”？

这两小题中不等式的变形与方程的什么变形类似？

例2 解不等式：

（1）$\frac{1}{2}x>-3$； （2）$-2x<6$.

解 （1）不等式的两边都乘以2，不等号的方向不变，所以

$$\frac{1}{2}x\times 2>(-3)\times 2,$$

得 $$x>-6.$$

（2）不等式的两边都除以-2（即都乘以$-\frac{1}{2}$），不等号的方向改变，所以

$$-2x\times\left(-\frac{1}{2}\right)>6\times\left(-\frac{1}{2}\right),$$

得 $$x>-3.$$

这两小题中不等式的变形与方程的什么变形类似？有什么不同？

这里的变形，与方程变形中的“将未知数的系数化为1”类似，它依据的是不等式的性质2或性质3. 要注意不等式两边都乘以（或都除以）的数是正数还是负数，从而确定变形时不等号的方向是否需要改变.

练　习

解下列不等式，并把解集在数轴上表示出来：

1. $x-2>0$.　　2. $x+1>0$.

3. $-2x<4$.　　4. $3x\leqslant 0$.

3. 解一元一次不等式

前面遇到的不等式有一个共同的特点：它们都只含有一个未知数，并且含未知数的式子都是整式，未知数的次数都是1. 像这样的不等式叫做**一元一次不等式**(linear inequality with one unknown).

我们再来解一些一元一次不等式.

例3　解下列不等式，并将解集在数轴上表示出来：

(1) $2x-1<4x+13$;

(2) $2(5x+3)\leqslant x-3(1-2x)$.

解　(1) $2x-1<4x+13$.

移项，得

$$2x-4x<13+1.$$

合并同类项，得

$$-2x<14.$$

两边都除以 -2，得

$$x>-7.$$

它在数轴上的表示如图8.2.4.

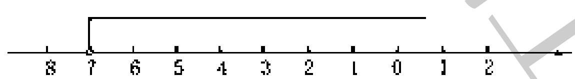


图 8.2.4

一元一次不等式与一元一次方程的解法有哪些类似之处？有什么不同？

(2) $2(5x+3) \leqslant x-3(1-2x)$.

去括号,得

$$10x+6 \leqslant x-3+6x.$$

移项、合并同类项,得

$$3x \leqslant -9.$$

两边都除以 3,得

$$x \leqslant -3.$$

它在数轴上的表示如图 8.2.5.

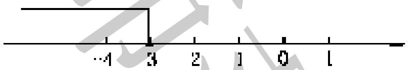


图 8.2.5

例 4 当 x 取何值时,代数式 $\dfrac{x+4}{3}$ 与 $\dfrac{3x-1}{2}$ 的值的差大于 1?

解 根据题意,得

$$\frac{x+4}{3}-\frac{3x-1}{2}>1.$$

去分母,得

$$2(x+4)-3(3x-1)>6.$$

去括号,得

$$2x+8-9x+3>6,$$

即

$$-7x+11>6.$$

移项,得

$$-7x>-5.$$

两边都除以 -7,得

$$x<\frac{5}{7}.$$

所以，当 x 取小于 $\frac{5}{7}$ 的任何数时，代数式 $\frac{x+4}{3}$ 与 $\frac{3x-1}{2}$ 的值的差大于 1.

讨论

回顾例 3 与例 4 的解答过程，总结一下解一元一次不等式的方法，与你的同伴讨论和交流.

练　习

1. 解下列不等式，并把解集在数轴上表示出来：

   (1) $2x+1>3$；　　(2) $2-x<1$；

   (3) $2(x+1)<3x$；　　(4) $3(x+2)\geqslant 4(x-1)+7$.

2. 解不等式：$\frac{2x-3}{3}>\frac{3x-2}{2}$.

3. 一个工程队原定在 10 天内至少要挖土 600 m^3，前两天一共完成了 120 m^3，由于整个工程调整工期，要求提前两天完成挖土任务. 问后 6 天内平均每天至少要挖土多少立方米？

问题

在“科学与艺术”知识竞赛的预选赛中共有 20 道题，对于每一道题，答对得 10 分，答错或不答扣 5 分，总得分不少于 80 分者能通过预选赛. 育才中学有 25 名学生通过了预选赛，通过者至少应答对多少道题？有哪些可能情形？

讨论

(1) 试解决这个问题. 你是用什么方法解决的？有没有其他方法？与你的同伴讨论和交流一下.

（2）如果你是利用不等式的知识解决这个问题的，那么在得到不等式的解集后，如何给出原问题的答案？应该如何表述？

练　习

1. 求下列不等式的所有正整数解：

（1）$-4x \geqslant -12$；　　（2）$3x - 11 < 0$.

2. 一次智力测验，有 20 道选择题. 评分标准为：对 1 题给 5 分，错 1 题扣 2 分，不答题不给分也不扣分. 小明有 2 道题未答，则他至少要答对几道题，总分才不会低于 60 分？

习题 8.2

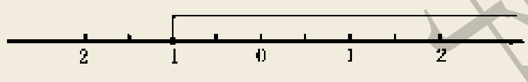
1. 解下列不等式：

（1）$x - 5 < 0$；　　（2）$3x \geqslant 2x - 6$；

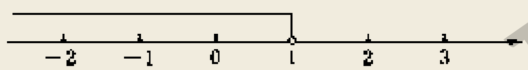
（3）$2x < -3$；　　（4）$-2x > \dfrac{1}{3}$.

2. 写出下列各图所表示的不等式的解集：

（1）



（2）



3. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

（1）$3x \geqslant -3$；

（2）$-3x + 3 < 0$；

（3）$2x + 2 \leqslant 3x + 3$；

（4）$5x - 1 > 8x + 3$.

4. a 分别取什么值时，代数式 $4a + 2$ 的值满足下列要求？

（1）大于 1；

（2）等于 1；

（3）小于 1.

5. 解下列不等式：

(1) $\frac{x}{2}+1>x$；

(2) $3(x+3)<5(x-1)+7$；

(3) $\frac{1}{2}(x-3)<\frac{1}{3}-2x$；

(4) $\frac{x-1}{3}-\frac{x+4}{2}>-2$.

6. 求不等式 $1-2x<6$ 的所有负整数解.

7. 某高速公路工地需要实施爆破，操作人员点燃导火线后，要在炸药爆炸前跑到400米以外的安全区域. 已知导火线的燃烧速度是1.2厘米/秒，人跑步的速度是5米/秒. 问导火线必须超过多长，才能保证操作人员的安全？

8.3 一元一次不等式组

问题

用每分钟可抽30吨水的抽水机来抽污水管道里积存的污水，估计积存的污水不少于1200吨且不超过1500吨，那么需要多少时间能将污水抽完？

分析

设需要 x 分钟能将污水抽完，那么总的抽水量为 $30x$ 吨. 由题意，应有

$$30x \geqslant 1200,$$

并且

$$30x \leqslant 1500.$$

在这个实际问题中，未知量 x 应同时满足这两个

不等式. 我们把这两个一元一次不等式合在一起,就得到一个**一元一次不等式组**:

$$\begin{cases}30x \geqslant 1200, & ①\\ 30x \leqslant 1500. & ②\end{cases}$$

分别求这两个不等式的解集,得

$$\begin{cases}x \geqslant 40,\\ x \leqslant 50.\end{cases}$$

同时满足不等式①、②的未知数 x 应是这两个不等式解集的公共部分. 如图 8.3.1,在同一数轴上表示出这两个不等式的解集,可知其公共部分是 40 和 50 之间的数(包括 40 和 50),记作 $40 \leqslant x \leqslant 50$. 这就是所列不等式组的解集.

图 8.3.1

所提问题的答案为:需要 40 到 50 分钟能将污水抽完.

概括

不等式组中几个不等式的解集的公共部分,叫做这个不等式组的解集.

解一元一次不等式组,通常可以先分别求出不等式组中每一个不等式的解集,再求出它们的公共部分. 利用数轴可以帮助我们得到一元一次不等式组的解集.

例 1 解不等式组:

$$\begin{cases}3x - 1 > 2x + 1, & ①\\ 2x > 8. & ②\end{cases}$$

解 解不等式①,得 $x > 2$.

解不等式②,得 $x > 4$.

如图 8. 3. 2,在同一数轴上表示不等式①、②的解集,可知所求不等式组的解集是

$$x > 4.$$

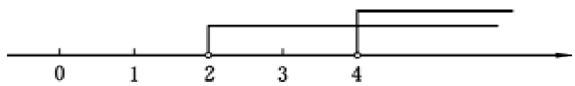


图 8. 3. 2

练 习

解下列不等式组,并把它们的解集在数轴上表示出来:

1. $\begin{cases} x - 1 < 0, \\ 2x - 5 < 1. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 5x + 9 > -1, \\ 1 - x < 0. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ 4 - x > 0. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} -3x \leqslant 0, \\ 4x + 7 > 0. \end{cases}$

例 2 解不等式组:

$$\begin{cases} 2x + 1 < -1, & ① \\ 3 - x \leqslant 1. & ② \end{cases}$$

解 解不等式①,得 $x < -1$.

解不等式②,得 $x \geqslant 2$.

如图 8. 3. 3,在同一数轴上表示不等式①、②的解集. 容易看出,这两个不等式的解集没有公共部分. 这时,这个不等式组无解.

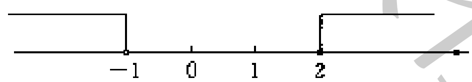


图 8. 3. 3

练　习

1. 填表：

不等式组	$\begin{cases}x-2<0,\\x+3<0\end{cases}$	$\begin{cases}x-2<0,\\x+3>0\end{cases}$	$\begin{cases}x-2>0,\\x+3<0\end{cases}$	$\begin{cases}x-2>0,\\x+3>0\end{cases}$
数轴表示				
解　　集				

2. 解下列不等式组，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $\begin{cases}x-1>6(x+3),\\5(x-2)-1\leqslant 4(1+x);\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}<0,\\4-\dfrac{1}{3}x\leqslant -\dfrac{1}{4}x.\end{cases}$

3. 试求不等式组 $\begin{cases}x+2>0,\\x-6\leqslant 0\end{cases}$ 的所有整数解.

习题 8.3

1. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}4+2x>7x+3,\\4x+5<3x+6;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x-5<3x-5,\\6x-3<6-3x;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}4x+50<8x+3,\\4x-7\leqslant 6x-\dfrac{5}{7};\end{cases}$

(4) $\begin{cases}5x+4<3(x+1),\\\dfrac{x-1}{2}\geqslant\dfrac{2x-1}{5}.\end{cases}$

2. 求不等式组 $2\leqslant 3x-7<8$ 的所有整数解.

阅读材料

等号与不等号的由来

等号“ = ”与不等号“ > ”、“ < ”，从小学用到现在，都是我们最熟悉的符号了.

你知道它们的由来吗? 人们是从什么时候开始使用这些符号的呢?

说来话长. 16 世纪中叶之前的数学书中，都还是用单词表示两个量的相等关系的. 直到 1557 年，英国数学家列科尔德在他的论文《智慧的磨刀石》中提出：“为了避免枯燥地重复 isaequalleto(等于)这个单词，我认真比较了许多的图形与记号，觉得世界上再也没有比两条平行而又等长的线段，意义更相同了. ”这位伟大的数学家很有创见地用两条平行且相等的线段“ = ”表示“相等”，“ = ”叫做等号.

当时，也有人用其他符号表示过相等关系，数学家笛卡儿在 1637 年出版的《几何学》中，还曾用“ ∞ ”表示相等关系.

17 世纪，德国数学家莱布尼兹，在各种场合大力倡导使用符号“ = ”，在他和其他数学家的共同努力下，这一符号才逐渐被世人所公认.

至于不等号“ > ”和“ < ”，其经历就更多了. 1629 年，法国数学家日腊尔在他的《代数教程》中，用象征的符号“*ff*”表示“大于”，用“ § ”表示“小于”. 例如，A 大于 B，记作：“A *ff* B”；A 小于 B，记作：“A § B”.

1631 年，英国数学家哈里奥特创造了符号“ > ”与“ < ”，分别表示“大于”和“小于”，这就是我们使用的不等号.

那时，还有数学家创造过其他符号，例如，数学家奥乌列德曾于 1631 年采用“‾‾|__|”与“___|”分别表示“大于”和“小于”. 又如，法国数学家厄里贡曾在 1634 年采用一些看来并不简便的符号表示不等关系，如用“$a3 \mid 2b$”表示“$a > b$”，用“$b2 \mid 3a$”表示“$b < a$”.

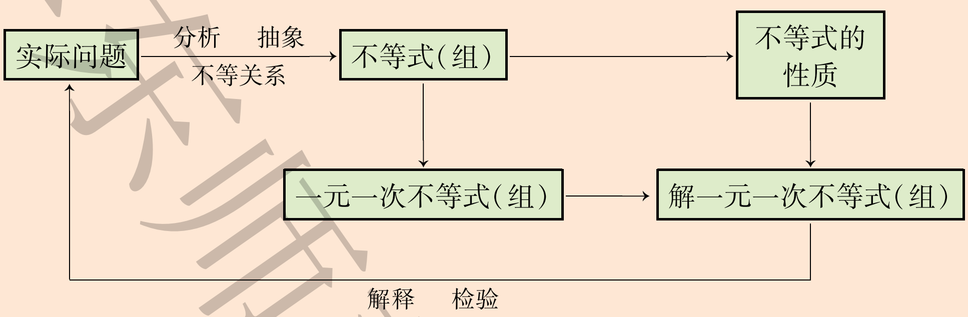
那些繁琐的记号，逐渐被人们所淘汰，只有哈里奥特创造的符号“ > ”和“ < ”，由于它们的简便性，在数学中广为传用，为人们所接受和认可.

由等号“ = ”与不等号“ > ”和“ < ”还引申出一些其他数学符号. 例如，全等“≌”、恒等“≡”、相似“∽”、近似“≈”、近似“≐”、不等于“≠”、大于或等于“≥”、小于或等于“≤”、远大于“≫”、远小于“≪”、不大于“≯”、不小于“≮”等.

数学中的符号太多了，它们的出现，都是为了数学表达的简捷方便，有了这些符号，我们就能简单明了地表达数学推理与求解过程.

小结

一、知识结构



二、要点

1. 不等式的知识源于实际问题. 要学会分析现实世界中量与量之间的不等(大小)关系,并列出不等式.

2. 要注意把解一元一次不等式的过程与解一元一次方程的过程进行类比,把不等式的变形与方程的变形相对照,特别要注意不等式的性质 3:当不等式的两边都乘以(或都除以)同一个负数时,不等号的方向改变. 这种类比的思想,在以后的学习中还会经常用到.

3. 将一元一次不等式的解集在数轴上表示出来,可以加深对一元一次不等式和一元一次不等式组的解集的理解,也便于直观地得到一元一次不等式组的解集.

复习题

A 组

1. 下面方程或不等式的解法对不对？为什么？

(1) 由 $-x=5$，得 $x=-5$；

(2) 由 $-x>5$，得 $x>-5$；

(3) 由 $2x>-4$，得 $x<-2$；

(4) 由 $-\frac{1}{2}x\leqslant 3$，得 $x\geqslant -6$.

2. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $-3x<0$；

(2) $8x+1\leqslant 5x-3$；

(3) $3(x+2)-1\geqslant 5-2(x-2)$；

(4) $\frac{1}{3}(1-2x)>\frac{3(2x-1)}{2}$.

3. x 分别取什么值时，代数式 $5-3x$ 的值满足下列要求？

(1) 是负数；　(2) 是0；　(3) 是正数.

4. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}2(x+1)<0,\\2x-1\leqslant 0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x>3x,\\x+2>4;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}<1,\\3x-7<-1;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}2x-6<3x,\\\frac{x+2}{5}-\frac{x-1}{4}\geqslant 0.\end{cases}$

5. 求满足不等式 $2n-5<5-2n$ 的所有正整数 n.

B 组

6. 判断下列不等式的变形是否正确：

(1) 由 $a<b$，得 $ac<bc$；

(2) 由 $x>y$，且 $m\neq 0$，得 $-\frac{x}{m}<-\frac{y}{m}$；

(3) 由 $x>y$，得 $xz^2>yz^2$；

(4) 由 $xz^2>yz^2$，得 $x>y$.

7. 三个连续自然数的和小于15，这样的自然数组共有几组？把它们分别写出来.

C 组

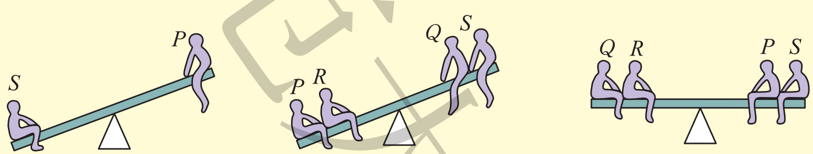
8. 已知关于 x 的方程 $3k-5x=-9$ 的解是非负数,求 k 的取值范围.

9. 已知 $|5x-3|=3-5x$, 求 x 的取值范围.

10. (1) A、B、C 三人去公园玩跷跷板,由下面的示意图(1),你能判断三人的轻重吗?

(2) P、Q、R、S 四人去公园玩跷跷板,由下面的示意图(2),你该如何判断这四人的轻重呢?

(1)



(2)

(第 10 题)

综合与实践

球赛出线问题

我们观看各种激烈的体育比赛时，总是对结果充满了期待，那么你能利用所学的知识预测比赛结果吗？例如：中国男子篮球队所在小组有六支球队，小组前 4 名出线，那么中国队要想小组出线，至少应该取得几场胜利？在现实生活中，有许多这样的比赛，那么怎样分析比赛呢？请研究如下问题：

问题　某次篮球联赛中，火炬队与月亮队要争夺一个出线权，火炬队目前的战绩是 17 胜 13 负（其中有 1 场以 4 分之差负于月亮队），后面还要比赛 6 场（其中包括再与月亮队比赛 1 场）；月亮队目前的战绩是 15 胜 16 负，后面还要比赛 5 场.

探究以下问题：

（1）为确保出线，火炬队在后面的比赛中至少要胜多少场？

（2）如果火炬队在后面对月亮队的 1 场比赛中至少胜月亮队 5 分，那么它在后面的其他比赛中至少胜几场就一定能出线？

（3）如果月亮队在后面的比赛中 3 胜（包括胜火炬队 1 场）2 负，那么火炬队在后面的比赛中至少要胜几场才能确保出线？

（4）如果火炬队在后面的比赛中 2 胜 4 负，未能出线，那么月亮队在后面的比赛中的战果如何？

第 9 章　多边形

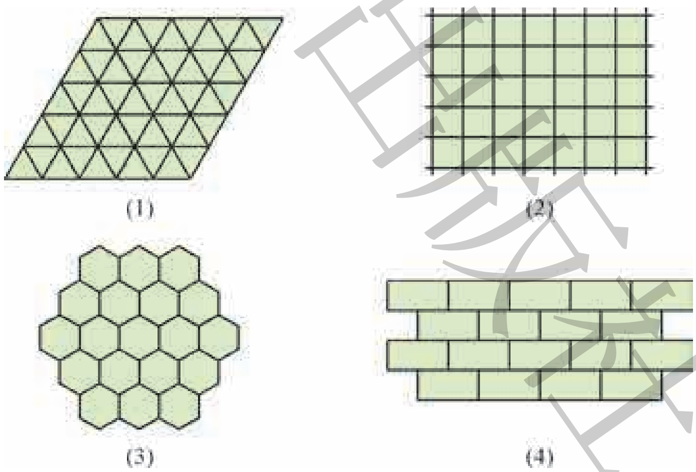
瓷砖是生活中常见的装饰材料. 你见过哪些形状的瓷砖? 它们的形状有什么特点呢?

你知道瓷砖能铺满地面的奥秘吗?

本章将探索三角形和多边形的有关性质,
解开关于瓷砖的一个个疑团.

9.1 三角形

走在大街上,进入宾馆或饭店,在许多地方,我们经常可以看到由各种形状的地砖或瓷砖铺成的漂亮的地面和墙面,在这些地面或墙面上,相邻的地砖或瓷砖平整地贴合在一起,整个地面或墙面没有一点空隙,如图9.1.1所示.



(1) (2) (3) (4)

图9.1.1

这些形状的地砖或瓷砖为什么能铺满地面而不留一点空隙呢？换一些其他形状的行不行？

为了解决这些问题，我们有必要研究多边形的有关性质. 三角形是最简单的多边形，让我们从三角形开始，探究一下其中的道理.

1. 认识三角形

三角形（triangle）是我们早就认识的几何图形，它是由三条不在同一条直线上的线段首尾顺次连结组成的平面图形，这三条线段就是三角形的边.

三角形的顶点采用大写字母 A、B、C、…表示，如图 9.1.2(1)，整个三角形记为 $\triangle ABC$.

如图 9.1.2(2) 所示，在三角形中，每两条边所组成的角叫做三角形的内角，如 $\angle ACB$；三角形中内角的一边与另一边的反向延长线所组成的角叫做三角形的外角，如 $\angle ACD$ 是与 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle ACB$ 相邻的外角. 图 9.1.2(2) 指明了与 $\triangle ABC$ 相关的主要名称.

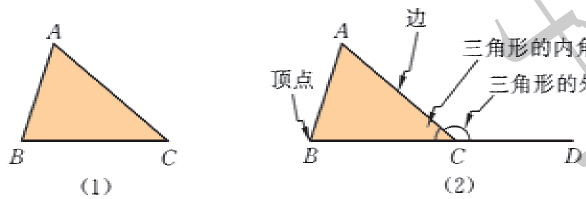


图 9.1.2

思考

$\triangle ABC$ 有多少个内角？多少个外角？与内角 $\angle A$ 相邻的外角有几个？它们是什么关系？怎样画出 $\triangle ABC$ 的外角？

试一试

图 9.1.3 中,三个三角形的内角各有什么特点?

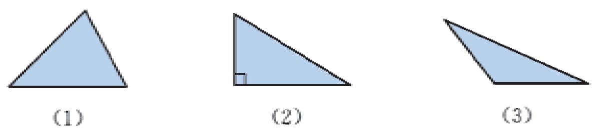


图 9.1.3

第一个三角形中,三个内角均为锐角;第二个三角形中,有一个内角是直角;第三个三角形中,有一个内角是钝角.

三角形可以按角来分类:

所有内角都是锐角——锐角三角形;

有一个内角是直角——直角三角形;

有一个内角是钝角——钝角三角形.

试一试

图 9.1.4 中,三个三角形的边各有什么特点?

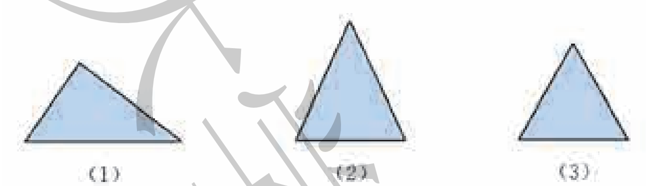


图 9.1.4

等边三角形是等腰三角形吗?

第一个三角形的三边互不相等;第二个三角形有两条边相等;第三个三角形的三边都相等.

我们把有两条边相等的三角形称为**等腰三角形**,相等的两边叫做等腰三角形的腰;把三条边都相等的三角形称为**等边三角形**(或正三角形).

做一做

在图 9.1.5 中找出等腰三角形、正三角形、锐角三角形、直角三角形和钝角三角形.

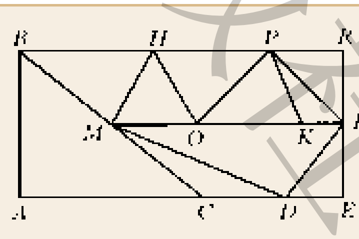


图 9.1.5

练　习

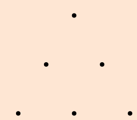
1. 在练习本上画出：

　(1) 等腰锐角三角形；

　(2) 等腰直角三角形；

　(3) 等腰钝角三角形.

2. 6 个点如图所示那样放着. 把这些点作为三角形的顶点，看看可以画多少个正三角形?



(第 2 题)

如图9.1.6所示，取△ABC边AB的中点E，连结CE，线段CE就是△ABC的一条中线；作△ABC的内角∠BAC的平分线交对边BC于点D，线段AD就是△ABC的一条角平分线；过顶点B作△ABC的边AC的垂线，垂足为点F，线段BF就是△ABC的一条高.

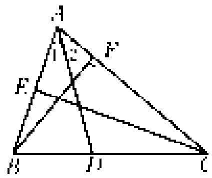
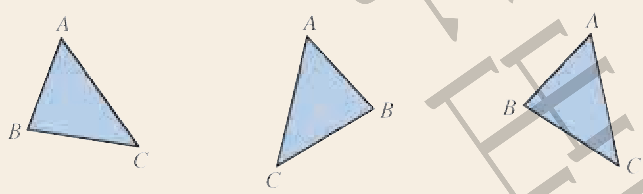


图 9.1.6

显然，△ABC有三条中线、三条角平分线和三条高.

做一做

下面给出了三个相同的锐角三角形，分别在这三个三角形中画出三条中线、三条角平分线和三条高.

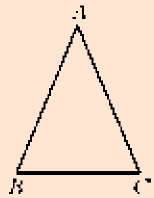


把锐角三角形换成直角三角形或钝角三角形，再试一试. 你发现了什么?

由上面的操作，我们可以发现，三角形的三条中线、三条角平分线和三条高(或所在的直线)分别________；直角三角形三条高的交点就是________；钝角三角形有两条高位于三角形的外部.

练　习

1. 如图，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，$AB=AC$. 试画出 BC 边上的中线和高以及 $\angle A$ 的平分线. 从中你发现了什么？
2. 在一个直角三角形中，画出斜边上的中线，先观察一下图形中有几个等腰三角形，再用刻度尺验证你的结论.



（第 1 题）

2. 三角形的内角和与外角和

如图 9.1.7，在小学我们曾剪下三角形的两个内角，将它们与第三个内角拼在一起，发现三个内角恰好拼成了一个平角，得出如下的结论：

三角形的内角和等于 180°.

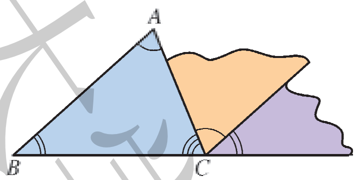


图 9.1.7

由图 9.1.7 的操作，你能发现证明的方法吗？

现在我们尝试用说理的方式说明该结论正确.

如图 9.1.8，已知 $\triangle ABC$，分别用 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 表示 $\triangle ABC$ 的三个内角，证明 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$.

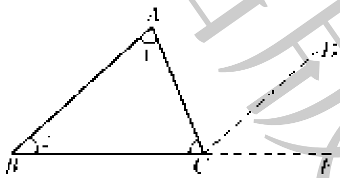


图 9.1.8

解　延长 BC 至点 E，以点 C 为顶点，在 BE 的上侧作 $\angle DCE=\angle 2$，则 $CD\parallel BA$（同位角相等，两直线平行）.

$\because$ $CD\parallel BA$，

$\therefore\ \angle 1 = \angle ACD$（两直线平行，内错角相等）.

$\because\ \angle 3 + \angle ACD + \angle DCE = 180°$，

$\therefore\ \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$（等量代换）.

由三角形的内角和等于 180°，容易得出下面的结论：

直角三角形的两个锐角互余.

你能说明其理由吗？

现在我们讨论三角形的外角及外角和.

如图 9.1.9，一个三角形的每一个外角对应一个相邻的内角和两个不相邻的内角.

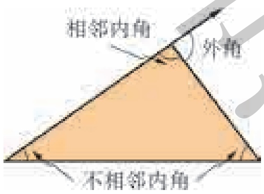


图 9.1.9

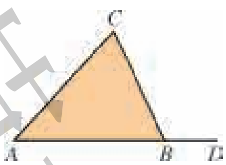


图 9.1.10

三角形的外角与内角有什么关系呢？

在图 9.1.10 中，显然有

$\angle CBD$（外角）$+ \angle ABC$（相邻的内角）$= 180°$.

那么外角 $\angle CBD$ 与其他两个不相邻的内角又有什么关系呢？

依据三角形的内角和等于 180°，我们有

$$\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 180°.$$

由上面两个式子，可以推出

$$\angle CBD = 180° - \angle ABC,$$
$$\angle ACB + \angle BAC = 180° - \angle ABC.$$

因而可以得到你与你的同伴所发现的结论：

$$\angle CBD = \angle ACB + \angle BAC.$$

由此可知，三角形的外角有两条性质：

1. 三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.

2. 三角形的一个外角大于任何一个与它不相邻的内角.

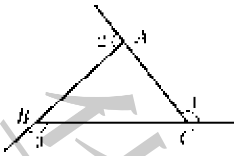


图 9.1.11

与三角形的每个内角相邻的外角分别有两个，这两个外角是对顶角. 从与每个内角相邻的两个外角中分别取一个相加，得到的和称为三角形的外角和. 如图 9.1.11 所示，$\angle 1+\angle 2+\angle 3$ 就是 $\triangle ABC$ 的外角和.

做一做

在图 9.1.11 中，

$\angle 1+$ ______ $=180^\circ$，$\angle 2+$ ______ $=180^\circ$，$\angle 3+$ ______ $=180^\circ$.

三式相加可以得到

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+$ ______ $+$ ______ $+$ ______ $=$ ____，①

而 $\angle ACB+\angle BAC+\angle ABC=180^\circ$，②

将①与②相比较，你能得出什么结论？

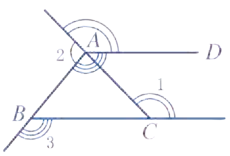
概括

可以得到

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^\circ.$$

由此可知：**三角形的外角和等于 360°.**

你能由下图说明这一结论吗？



($AD /\!/ BC$)

例 1 如图 9.1.12，D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上一点，$\angle B=\angle BAD$，$\angle ADC=80^\circ$，$\angle BAC=70^\circ$. 求：

（1）$\angle B$ 的度数；

（2）$\angle C$ 的度数.

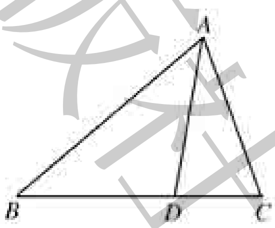


图 9.1.12

解 (1) ∵ $\angle ADC$ 是 $\triangle ABD$ 的外角(已知),

∴ $\angle B+\angle BAD=\angle ADC=80^\circ$(三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和).

又∵ $\angle B=\angle BAD$(已知),

∴ $\angle B=80^\circ\times\frac{1}{2}=40^\circ$(等量代换).

(2) ∵ $\angle B+\angle BAC+\angle C=180^\circ$(三角形的内角和等于 180°),

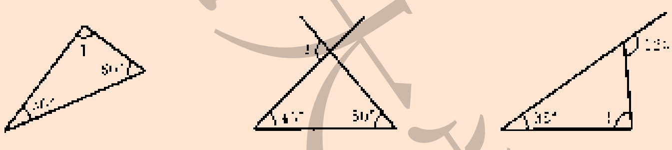
∴ $\angle C=180^\circ-\angle B-\angle BAC$(等式的性质)

$=180^\circ-40^\circ-70^\circ$

$=70^\circ$.

练 习

1. (口答)一个三角形可以有两个内角都是直角吗?可以有两个内角都是钝角或都是锐角吗?为什么?
2. 说出下列各图中 $\angle 1$ 的度数.

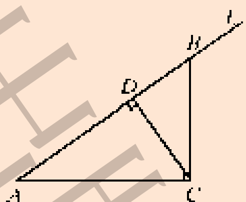


(1) (2) (3)

(第 2 题)

3. 如图,在直角三角形 ABC 中,CD 是斜边 AB 上的高,$\angle BCD=35^\circ$,求:(1) $\angle EBC$ 的度数;(2) $\angle A$ 的度数.

对于上述问题,在以下解答过程的空白处填上适当的内容(理由或数学式).



(第 3 题)

解 (1) ∵ $CD\perp AB$(已知),

∴ $\angle CDB=$________.

∵ $\angle EBC=\angle CDB+\angle BCD$(   ),

∴ $\angle EBC=$________ $+35^\circ=$________(等量代换).

(2) ∵ $\angle EBC=\angle A+\angle ACB$(   ),

∴ $\angle A=\angle EBC-\angle ACB$(等式的性质).

∵ $\angle ACB=90^\circ$(已知),

∴ $\angle A=$________ $-90^\circ=$________(等量代换).

你还能用其他方法解决这一问题吗?

3. 三角形的三边关系

在小学阶段，我们已经通过观察或度量，了解到三角形的任意两边之和大于第三边这样一个事实，现在让我们通过画三角形的过程，再次体会这一结论.

做一做

画一个三角形，使它的三条边长分别为 4 cm、3 cm、2.5 cm.

圆上任意一点到圆心的距离相等.

如图 9.1.13，先画线段 $AB = 4$ cm，然后以点 A 为圆心、3 cm 长为半径画圆弧，再以点 B 为圆心、2.5 cm 长为半径画圆弧，两弧相交于点 C，连结 AC、BC. $\triangle ABC$ 就是所要画的三角形.

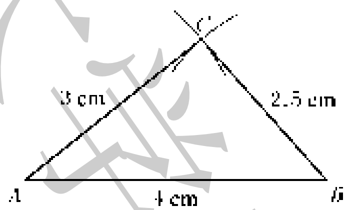


图 9.1.13

试一试

现有若干条已知长度的线段：三条长 2 cm、三条长 3 cm、两条长 4 cm、两条长 5 cm、两条长 6 cm. 任意选择三条线段画三角形，使它的三条边长分别为你所选择的三条线段的长.

说说你的发现与想法.

如图 9.1.14，在画三角形的过程中，你可能会发现下列几种情况：

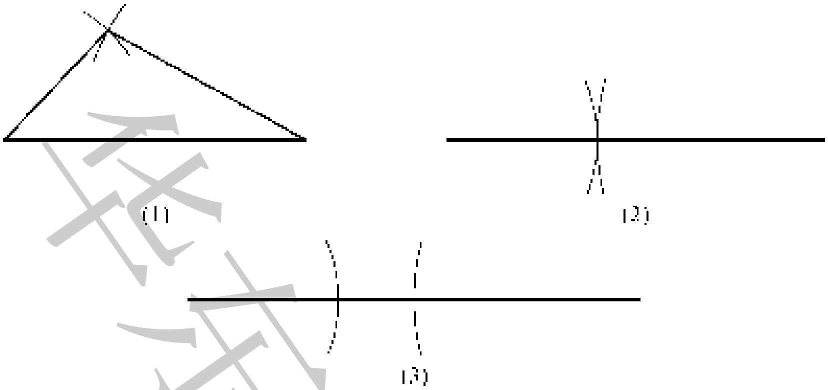


图 9.1.14

因此，并不是任意三条线段都可以组成一个三角形. 在三条线段中，如果两条较短线段的和不大于第三条线段，那么这三条线段就不能组成一个三角形.

换句话说：

三角形的任何两边的和大于第三边.

这一结论的根本依据是关于线段的基本事实“两点之间，线段最短”.

用三根木条钉一个三角形，你会发现再也无法改变这个三角形的形状和大小，也就是说，如果三角形的三条边固定，那么三角形的形状和大小就完全确定了. 三角形的这个性质叫做**三角形的稳定性.**

用四根木条钉一个四边形，你会发现这个四边形的形状和大小都可以改变，这说明四边形不具有稳定性.

三角形的稳定性在生产实践中有着广泛的应用. 例如桥梁拉杆（如图 9.1.15 所示）、电视塔架底座，都是三角形结构.

图 9.1.15

练　习

1. （口答）下列长度的各组线段能否组成一个三角形？

   （1）15 cm，10 cm，7 cm；　　　　（2）4 cm，5 cm，10 cm；

   （3）3 cm，8 cm，5 cm；　　　　（4）4 cm，5 cm，6 cm.

2. 一木工有两根长分别为 40 厘米和 60 厘米的木条，要另找一根木条，钉成一个三角木架. 问第三根木条的长度应在什么范围内？

3. 举两个三角形的稳定性在实际生活中应用的例子.

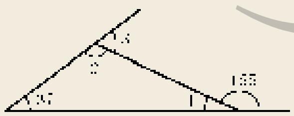
习题 9.1

1. 已知△ABC 是等腰三角形.

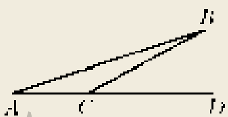
   （1）如果它的两条边的长分别为 8 cm 和 3 cm，那么它的周长是________cm；

   （2）如果它的周长为 18 cm，一条边的长为 4 cm，那么它的腰长是________cm.

2. 按图中所给的条件，可得 $\angle 1 =$ ________，$\angle 2 =$ ________，$\angle 3 =$ ________.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，飞机要从 A 地飞往 B 地，因受大风影响，一开始就偏离航线（AB）18°（即 $\angle A = 18°$），飞到了 C 地，经 B 地的导航站测得 $\angle ABC = 10°$. 此时飞机必须沿某一方向飞行才能到达 B 地. 求这一方向与 AC 方向的夹角 $\angle BCD$ 的度数.

4. 如图，在△ABC 中，$\angle ABC = 80°$，$\angle ACB = 50°$，BP 平分 $\angle ABC$，CP 平分 $\angle ACB$，求 $\angle BPC$ 的度数.

   对于上述问题，在以下解答过程的空白处填上适当的内容（理由或数学式）.

   解　∵ BP 平分 $\angle ABC$（已知），

   ∴ $\angle PBC = \dfrac{1}{2}\angle ABC = \dfrac{1}{2} \times 80° = 40°$.

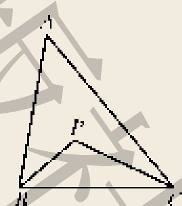
   同理可得 $\angle PCB =$ ________.

   ∵ $\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180°$（　　　　　　　　），

   ∴ $\angle BPC = 180° - \angle PBC - \angle PCB$（等式的性质）

   $= 180° - 40° -$ ________

   $=$ ________.



（第 4 题）

9.2 多边形的内角和与外角和

试一试

三角形有三个内角、三条边，我们也可以把三角形称为三边形（但我们习惯称为三角形）．我们已经知道什么叫三角形，你能说出什么叫四边形、五边形吗？

图 9.2.1（1）是四边形，它是由四条不在同一直线上的线段首尾顺次连结组成的平面图形，记为四边形 *ABCD*；图 9.2.1（2）是五边形，它是由五条不在同一直线上的线段首尾顺次连结组成的平面图形，记为五边形 *ABCDE*．一般地，由 n 条不在同一直线上的线段首尾顺次连结组成的平面图形称为 n 边形，也即我们已经认识的多边形．

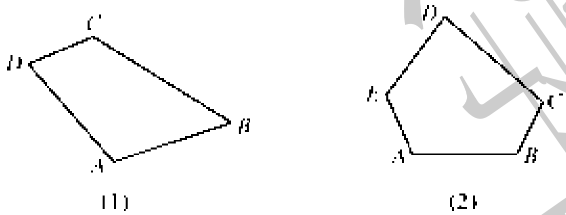
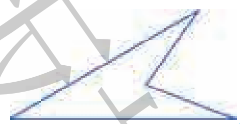


图 9.2.1

下面所示的图形也是多边形，但不在现在的研究范围内．



注意

我们现在研究的是如图 9.2.1 所示的多边形，也就是凸多边形．

与三角形类似，如图 9.2.2 所示，$\angle A$、$\angle D$、$\angle C$、$\angle ABC$是四边形$ABCD$的四个内角，$\angle CBE$ 和 $\angle ABF$ 都是与$\angle ABC$ 相邻的外角，两者互为对顶角．

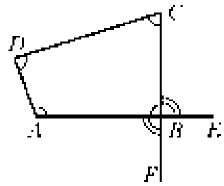


图 9.2.2

五边形、六边形分别有多少个内角？多少个外角？n 边形呢？

如果多边形的各边都相等，各内角也都相等，那么就称它为**正多边形**(regular polygon). 如正三角形、正四边形(正方形)、正五边形等.

连结多边形不相邻的两个顶点的线段叫做多边形的对角线. 例如，图 9.2.3(1)中，线段 AC 是四边形 $ABCD$ 的一条对角线；图 9.2.3(2)、(3)中，虚线表示的线段也是所画多边形的对角线.

还可以画出哪些对角线？

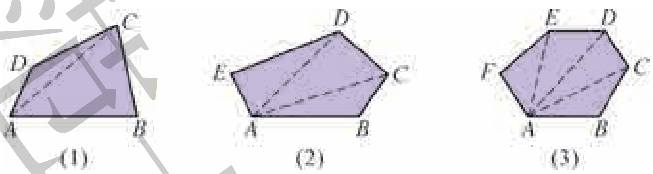


图 9.2.3

试一试

由图 9.2.3 可以看出，从多边形的一个顶点引出的对角线把多边形划分为若干个三角形. 我们已知一个三角形的内角和等于 180°，那么四边形的内角和等于多少呢？五边形、六边形呢？一般地，n 边形的内角和等于多少呢？

探索

为了求得 n 边形的内角和，请根据图 9.2.4 所示，完成表 9.2.1.

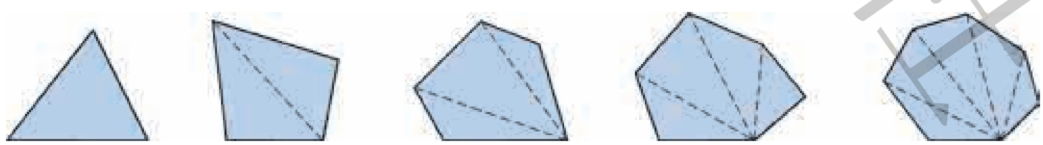


图 9.2.4

表 9.2.1

多边形的边数	3	4	5	6	7	…	n
分成的三角形的个数	1	2				…	
多边形的内角和	180°	360°				…	

由此，我们得出

n 边形的内角和为 $(n-2)\cdot 180°$.

读一读

“归纳推理”是数学中的一种推理方式，体现了从特殊到一般的推理过程. 在这里，我们通过对三边形、四边形、五边形等的探索，发现它们的内角和与边数之间存在某种逻辑关系，从而归纳出多边形的内角和公式. 这种归纳推理的方式，我们今后还会经常用到. 当然，“看”出来的数学结果未必一定正确，但它们还是给我们指引了研究的方向. 因此，归纳推理和演绎推理相结合是必要的.

例 1 求八边形的内角和.

解 八边形的内角和为

$$(n-2)\times 180° = (8-2)\times 180° = 1080°.$$

例 2 已知一个多边形的内角和等于 2160°，求这个多边形的边数.

解 设这个多边形的边数为 n，根据题意，得

$$(n-2)\cdot 180° = 2160°.$$

解得 $$n = 14.$$

即这个多边形的边数为 14.

试一试

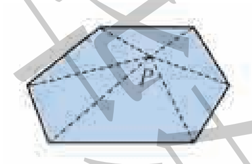


图 9.2.5

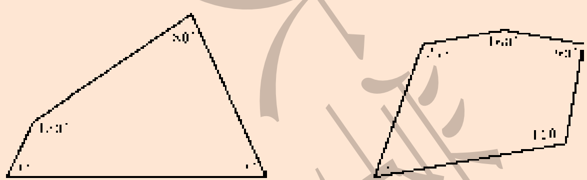
如图 9.2.5，在 n 边形（图中取 $n=6$ 的情形）内任取一点 P，连结点 P 与多边形的每一个顶点，可得几个三角形？你能否根据这样划分多边形的方法来说明 n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180°$？

为了说明多边形的内角和公式，我们已经尝试用两种方法划分多边形. 这里是在多边形内任取一点，前面可以看作是任取一个顶点. 那么是否还可以移动点 P，引出其他的方法呢？

试试看，你一定会有新的发现.

练　习

1. 求下列图形中 x 的值.



（第 1 题）

2. 已知一个多边形的内角和等于 1440°，求这个多边形的边数.

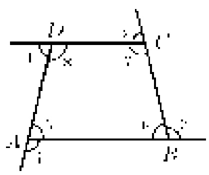


图 9.2.6

与多边形的每个内角相邻的外角分别有两个，这两个外角是对顶角. 从与每个内角相邻的两个外角中分别取一个相加，得到的和称为多边形的外角和. 如图 9.2.6，$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4$ 就是四边形 $ABCD$ 的外角和.

从图中可以知道：

$(\angle 1+\angle 5)+(\angle 2+\angle 6)+(\angle 3+\angle 7)+(\angle 4+\angle 8)=4\times 180°$，所以

$$\begin{aligned}&\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4\\=&4\times 180°-(\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8).\end{aligned}$$

四边形 $ABCD$ 的内角和为

$$\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8=360°.$$

因此 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360°$.

那么,n 边形的外角和应该等于多少度呢?

探索

根据 n 边形的每一个内角与它的相邻的外角都互为补角,可以求得 n 边形的外角和. 据此,请将数据填入表 9.2.2 中.

> 试用计算器计算相应的数据.

表 9.2.2

多边形的边数	3	4	5	6	7	…	n
多边形的内角和与外角和的总和	$3\times180°=540°$					…	
多边形的内角和	180°					…	
多边形的外角和	360°					…	

因此,**任意多边形的外角和都为 360°.**

例 3 一个多边形的每个外角都是 72°,这个多边形是几边形?

解 设多边形的边数为 n,根据题意,得

$$n\cdot 72°=360°.$$

解得 $n=5$.

因此,这个多边形是五边形.

例 4 一个多边形的内角和等于它外角和的 5 倍,这个多边形是几边形?

解 设多边形的边数为 n,根据题意,得

$$(n-2)\cdot 180°=5\times 360°.$$

解得 $n=12$.

因此,这个多边形是十二边形.

练 习

1. 一个多边形的每一个外角都等于45°,这个多边形是几边形?它的每一个内角是多少度?
2. 在一个多边形中,它的内角最多可以有几个是锐角?

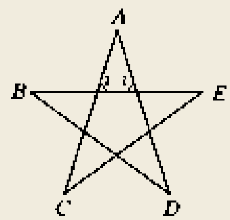
习题 9.2

1. 先任意画一个五边形,然后画出它所有的对角线,数一数,一共有多少条对角线?
2. 根据图形填空:

   (1) $\angle 1 = \angle C +$ ________, $\angle 2 = \angle B +$ ________;

   (2) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E =$ ________ $+ \angle 1 + \angle 2 =$ ________.

   想一想,这个结论对任意的五角星是否都成立.



(第 2 题)

3. 一个多边形的外角和是内角和的$\frac{2}{7}$,求这个多边形的边数.

9.3 用正多边形铺设地面

现在让我们回到本章一开始所提出的问题:某些形状的地砖或瓷砖为什么能铺满地面而不留一点空隙?实际生活中,它们的形状大多是正多边形,就让我们从此开始,探究一下其中的奥秘吧!

1. 用相同的正多边形

探索

使用给定的某种正多边形,它能否铺满地面,既不留下一丝空白,又不相互重叠呢?

这显然与正多边形的内角大小有关. 为了探索哪些正多边形能铺满地面,请根据图 9. 3. 1,完成表 9. 3. 1.

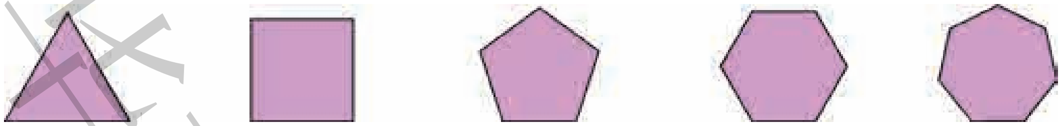


图 9. 3. 1

可以借助于计算器.

表 9. 3. 1

正多边形的边数	3	4	5	6	7	…	n
正多边形的内角和	180°	360°				…	
正多边形每个内角的大小	60°	90°				…	

概括

使用给定的某种正多边形,当围绕一点拼在一起的几个内角加在一起恰好组成一个周角时,就可以铺满地面.

如正六边形的每个内角为 120°,三个 120°拼在一起恰好组成周角,所以全用正六边形瓷砖就可以铺满地面(如第 72 页图 9. 1. 1(3)所示).

参见图 9. 1. 1(1)、(2),你能说明为什么正三角形和正方形能铺满地面吗?

如图 9. 3. 2,正五边形不能铺满地面,正八边形也不能铺满地面.

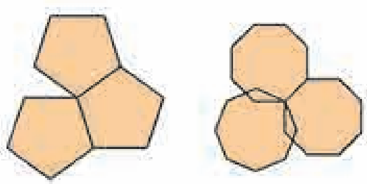
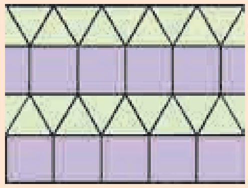


图 9. 3. 2

练 习

如图，将图9.1.1(1)中相邻两行正三角形分开，添一行正方形. 它表明把正三角形和正方形结合在一起也能铺满地面. 正三角形、正方形、正六边形两两结合是否都能铺满地面呢？把正三角形、正方形、正六边形三者结合在一起呢？请你试试看.



2. 用多种正多边形

如图9.3.3，用正三角形和正六边形也能铺满地面. 类似的情况还有吗？

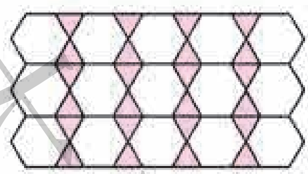


图9.3.3

我们还可以发现其他的情况，如图9.3.4～9.3.7.

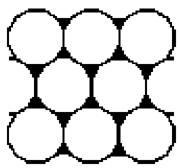


图9.3.4

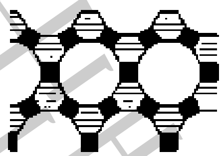


图9.3.5

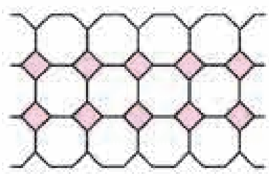


图9.3.6

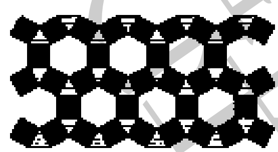


图9.3.7

现以图 9.3.5 为例,观察一下其中的关系. 正十二边形的一个内角为 $\frac{(12-2)\cdot 180°}{12}=150°$, 正六边形的一个内角为 120°,正方形的一个内角为 90°,三者之和恰为一个周角 360°. 实际上这三种正多边形结合在一起恰好能铺满地面.

其他的图形是否也满足这一条件?

练　习

1. 试说明本节中几种正多边形能铺满地面的理由.
2. 任意剪出一些形状、大小相同的三角形纸板,拼拼看,它们能否铺满地面.

习题 9.3

1. 选择题(可能有多个答案)

　(1) 下列正多边形中,能够铺满地面的是(　　).

　　A. 正方形　　B. 正五边形　　C. 正八边形　　D. 正六边形

　(2) 下列正多边形的组合中,能够铺满地面的是(　　).

　　A. 正八边形和正方形

　　B. 正五边形和正八边形

　　C. 正六边形和正三角形

2. 试画出用正三角形和正六边形铺满地面,但与图 9.3.3 不同的图形.
3. 任意剪出一些形状、大小相同的四边形纸板,拼拼看,它们能否铺满地面.

阅读材料

多姿多彩的图案

我们已经看到了用正多边形拼成的各种图案,实际上,有许多图案是用规则或不规则的基本图形拼成的,如图 1～4.

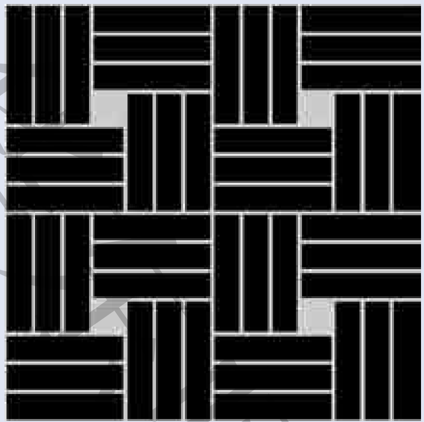


图 1

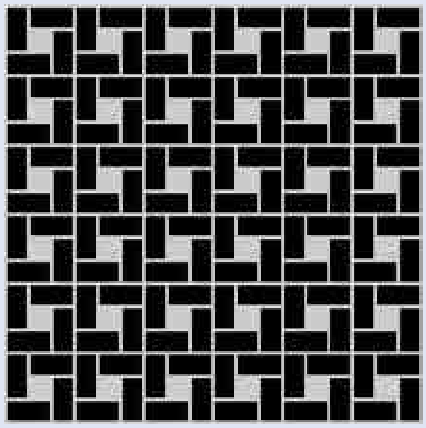


图 2

图 3

图 4

图 5 和图 6 分别说明了相应的图案是如何由基本图形拼成的.

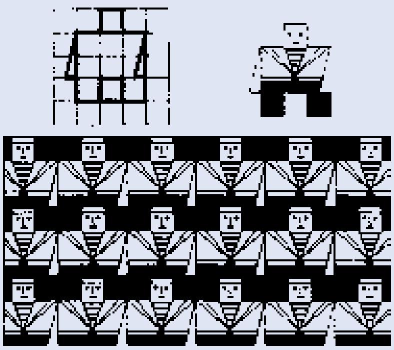


图 5

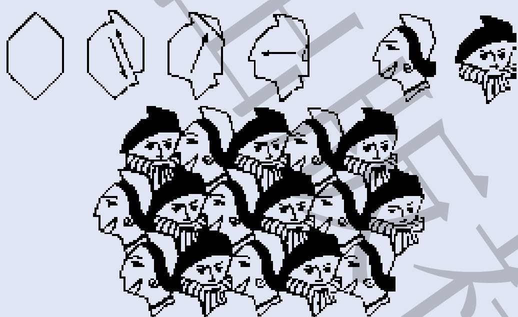
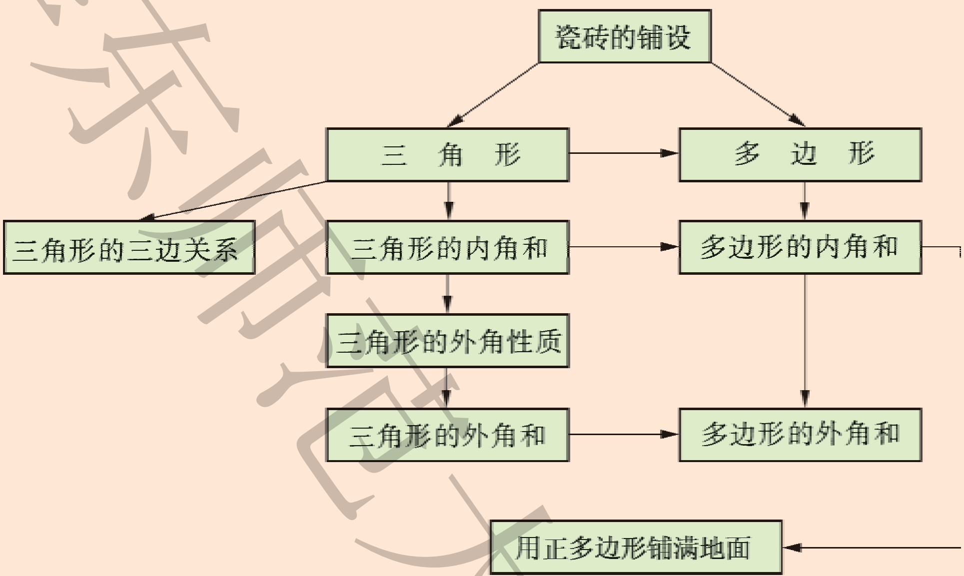


图 6

你玩过哪些拼图？你自己能设计出一幅拼图吗？

小结

一、知识结构



二、要点

1. 本章通过对三角形和多边形的一系列探索活动,归纳得到关于三角形的边、角及多边形的角的一些推断,演绎证明了某些推断的正确性.

2. 推理的数学思想在本章得到了充分体现:我们运用归纳推理,从具体的多边形着手分析,发现其中的逻辑关系,归纳出多边形内角和公式;我们还对探索得到的“三角形的内角和等于180°”这一结论,进行了演绎推理,基本依据是平行线中的一些基本事实与推导所得的结论.

3. 本章还利用学习得到的数学结论,用于实际生活,理解某些正多边形能够铺满地面的道理.

复习题

A 组

1. 判断题(对的填“✓”,错的填“×”)

(1) 三角形中至少有两个锐角. (　　)

(2) 钝角三角形的内角和大于锐角三角形的内角和. (　　)

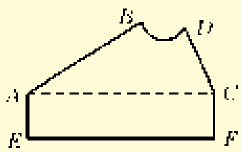
(3) 锐角三角形的三个内角都是锐角. (　　)

(4) 钝角三角形的三个内角都是钝角. (　　)

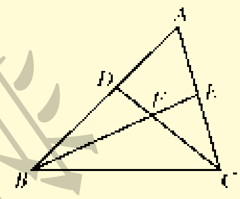
(5) 直角三角形的两个锐角互为余角. (　　)

2. 已知两条线段 a、b,其长度分别为 2.5 cm 与 3.5 cm. 另有长度分别为 1 cm、3 cm、5 cm、7 cm 和 9 cm 的 5 条线段,其中能够与线段 a、b 一起组成三角形的有哪几条?

3. 如图,按规定,一块模板中 AB、CD 的延长线应相交成 85°角. 因交点不在板上,不便测量,工人师傅连结 AC,测得 $\angle BAC=32°$, $\angle DCA=65°$,此时 AB、CD 的延长线相交所成的角是不是符合规定? 为什么?



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图,在△ABC 中,D 是 AB 上一点,E 是 AC 上一点,BE、CD 相交于点 F, $\angle A=62°$, $\angle ACD=35°$, $\angle ABE=20°$. 求:(1) $\angle BDC$ 的度数;(2) $\angle BFD$ 的度数.

对于上述问题,在以下解答过程的空白处填上适当的内容(理由或数学式).

解　(1) ∵ $\angle BDC=\angle A+\angle ACD$(　　　　　　　　　　),

∴ $\angle BDC=62°+35°=97°$(等量代换).

(2) ∵ $\angle BFD+\angle BDC+\angle ABE=$ ________(　　　　　　　　　　),

∴ $\angle BFD=180°-\angle BDC-\angle ABE$(等式的性质)

$=180°-97°-20°$(等量代换)

$=63°$.

5. 求下列多边形的内角和:

(1) 五边形;　　(2) 九边形;　　(3) 十二边形.

6. 已知多边形的内角和分别如下,求相应的多边形的边数:

(1) 900°; (2) 1980°; (3) 2700°.

7. 已知在一个十边形中,其中九个内角的和是 1290°,求这个十边形另一个内角的度数.

8. 正八边形的每一个外角是多少度?

9. 如果一个正多边形的每个外角都是 24°,那么这个多边形有多少条边?

10. 若三角形三个内角的比为 1∶2∶3,则这个三角形是什么三角形?

B 组

11. 选择题

(1) 在三角形的所有外角(每个顶点处只取一个外角)中,锐角最多有(　　).

A. 3 个　　B. 2 个

C. 1 个　　D. 0 个

(2) $(n+1)$边形的内角和比 n 边形的内角和大(　　).

A. 180°　　B. 360°

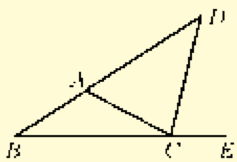
C. $n \cdot 180°$　　D. $n \cdot 360°$

12. 在$\triangle ABC$ 中,$AC = 12$ cm,$AB = 8$ cm,那么 BC 的最大长度应小于多少?最小长度应满足什么条件呢?

13. 在各个内角都相等的多边形中,一个外角等于一个内角的$\frac{1}{5}$,求这个多边形每一个内角的度数和它的边数.

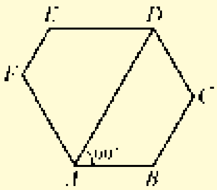
C 组

14. 如图,已知 CD 是$\triangle ABC$ 中$\angle ACB$ 的外角平分线,请说明 $\angle BAC > \angle B$.



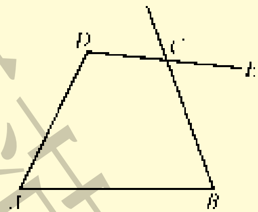
(第 14 题)

15. 如图,六边形 $ABCDEF$ 的内角都相等, $\angle DAB = 60°$. AB 与 DE 有什么关系?



(第 15 题)

16. 如图, $\angle BCE$ 是四边形 $ABCD$ 的一个外角,如果 $\angle B$ 与 $\angle D$ 互为补角,那么 $\angle BCE$ 与 $\angle A$ 的大小相等吗? 请说明理由.



(第 16 题)

第 10 章　轴对称、平移与旋转

世界充满着运动，从天体、星球的运行，到原子、粒子的作用，其中最基本的是轴对称、平移及旋转等运动.

轴对称、平移及旋转等合成了大千世界许许多多千姿百态的运动.

本章将探究在轴对称、平移与旋转的变换下图形发生的变化.

10.1 轴对称

1. 生活中的轴对称

不论是在自然界中还是在建筑中,不论是在艺术中还是在科学中,甚至在最普通的日常生活用品中,对称的形式都随处可见. 山倒映在湖中,这是令人难忘的对称景象. 自远古以来,对称的形式都被认为是和谐美丽的.

图 10.1.1 中的各个图形,相信你可能都见过,把它们沿某条直线对折,对折后的两部分能完全重合,即为**轴对称图形**(a figure of line symmetry),这条直线即为这个图形的**对称轴**(axis of symmetry).

找出图 10.1.1 中各图形的对称轴. 是否有些图形的对称轴不止一条呢?

图 10.1.1

做一做

用一张半透明的纸描出图 10. 1. 2 所示的星形图，然后用不同的方式对折，用直尺画出折痕，看看这颗星有多少条对称轴.

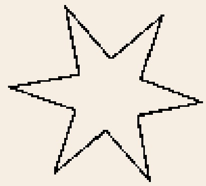


图 10. 1. 2

我们再看图 10. 1. 3 中的两组图形.

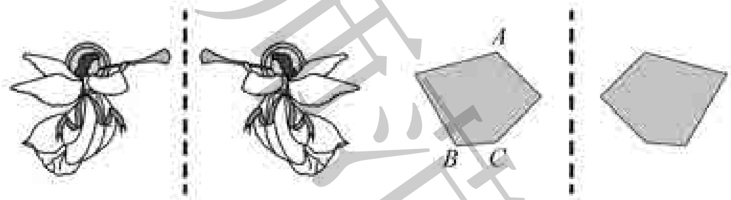


图 10. 1. 3

每一组里，某一边的图形沿虚线对折之后与另一边的图形完全重合.

像这样，把一个图形沿着某一条直线翻折过去，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形**成轴对称**，这条直线就是**对称轴**，两个图形中的对应点(即两个图形重合时互相重合的点)叫做**对称点**.

你能举出日常生活中两个图形成轴对称的例子吗?

做一做

请你标出图 10. 1. 3 中 A、B、C 三点的对称点 A_1、B_1、C_1.

试一试

在纸上滴几滴墨水，把纸张对折，随后打开，看看形成的两块墨迹是不是关于折痕对称. 画出它的对称轴.

这就是轴对称图形的基本特征.

显然,轴对称图形(或成轴对称的两个图形)沿对称轴对折后的两部分是完全重合的,所以

轴对称图形(或成轴对称的两个图形)的对应线段(对折后重合的线段)相等,对应角(对折后重合的角)相等.

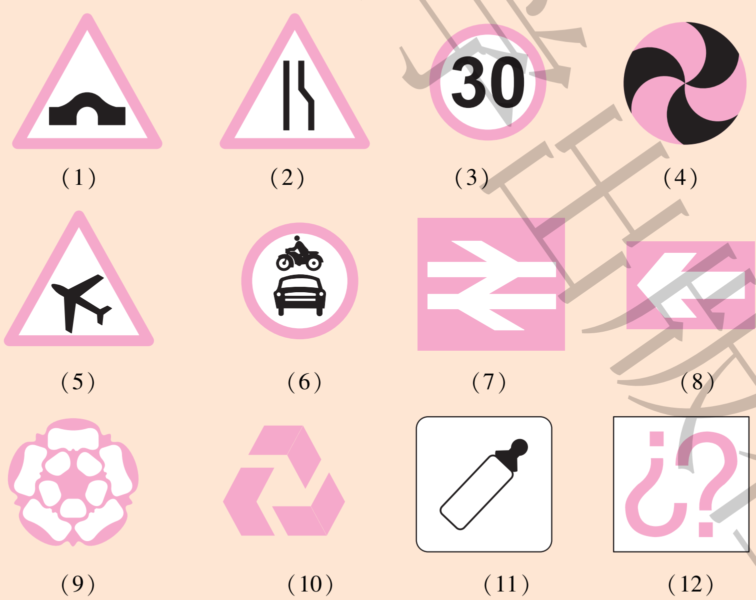
练 习

1. 你一定见过许多美丽的照片或图片,如图所示的三幅图片都给我们一种美妙和谐的轴对称形象.

(第 1 题)

现在请你尽可能多地找出类似的照片或图片,与你的同伴一起欣赏.

2. 观察下列各种图形,分别判断是不是轴对称图形.



(第 2 题)

阅读材料

剪正五角星

节日前夕，常要制作许多五角星. 我们用折纸的方法，可以直接剪出一个五角星.

方法是这样的：拿一张长方形(或圆形)的纸，如图 1，先对折，再沿虚线将平角折成五等份，得到图 2；在五等份的折线上，取点 A 和点 C，使 OC 比三分之一的 OA 微微长一点，沿斜线 AC 把图 2 中的阴影部分剪掉，然后把纸展开，就得到图 3 所示的一个正五角星.

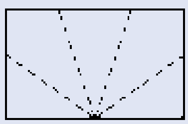


图 1

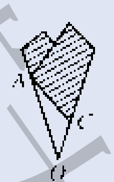


图 2

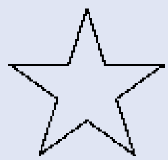


图 3

如图 4，若取 OC 比三分之一的 OA 长得多(如 OC 为 OA 的一半)，这时剪出的五角星就不一样了，它的五个角的边比较短；如图 5，而当沿直角方向剪去时，展开后则成了一个正五边形.

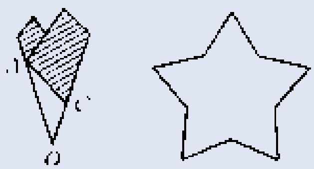


图 4


图 5

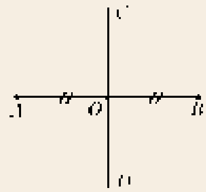
想一想，这种折纸剪正五角星的方法，其中隐含着什么数学道理?

2. 轴对称的再认识

观察线段和角，它们都是轴对称图形吗?

做一做

在纸上画出线段 AB 及它的中点 O，再过点 O 画出与 AB 垂直的直线 CD，沿直线 CD 将纸对折. 看看线段 OA 与 OB 是否重合?



从上面的操作我们可以看出，线段是轴对称图形.

直线 CD 是线段 AB 的对称轴，它垂直于线段 AB，又平分线段 AB，我们把这样垂直并且平分一条线段的直线称为这条线段的**垂直平分线**(perpendicular bisector).

垂直平分线又可称为**中垂线**.

试一试

如图 10.1.4，在半透明纸上画出 $\angle AOB$，对折，使角的两条边完全重合，然后用直尺画出折痕 OM，看看射线 OM 与 $\angle AOB$ 是什么关系.

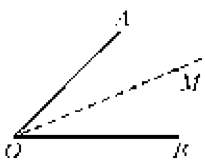


图 10.1.4

从上面的操作可以看出，角也是轴对称图形，对称轴是它的角平分线所在的直线.

在研究轴对称图形时，往往需要找到它的对称轴，看看沿对称轴翻折后各部分的对称情况.

试一试

如图 10.1.5，方格纸内的两图形都是轴对称图形，请画出它们的对称轴.

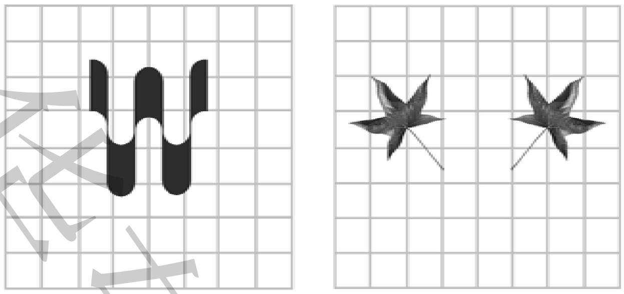


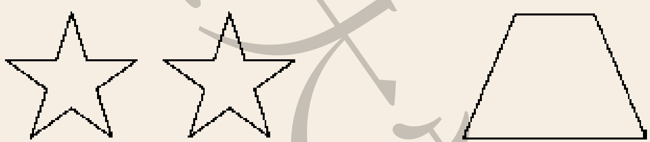
图 10. 1. 5

由于图形在方格纸内，我们可以凭直觉很准确地画出两个图形的对称轴，你能想想这是什么原因吗？

如果没有方格纸，且又不能折叠时，那么如何准确地画出图形的对称轴呢？

做一做

请试着分别画出图 10. 1. 6 所示图形的对称轴.



(1)　　(2)

图 10. 1. 6

用折叠的方法可以检验自己画的对称轴是否准确. 如果不能折叠，又该如何判断对称轴的位置呢？

连结对称点的线段与对称轴有什么关系？

做一做

如图 10. 1. 7，点 A 和点 A' 关于某条直线成轴对称，你能画出这条直线吗？

图 10. 1. 7

其实，如图10.1.8，我们只要连结点A和点A'，取线段AA'的中点O，过点O画直线l，使l垂直于AA'，即画出线段AA'的垂直平分线l，直线l就是点A和点A'的对称轴.

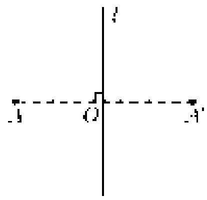


图 10.1.8

我们现在可以总结出其他复杂的轴对称图形的对称轴的画法：

你还能找到其他方法吗?

先找出轴对称图形的任意一组对称点，连结对称点，得到一条线段，再画出这条线段的垂直平分线，就可以得到该图形的对称轴.

通过以上的操作，我们有下面的结论：

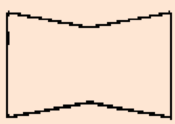
如果一个图形是轴对称图形，那么连结对称点的线段的垂直平分线就是该图形的对称轴.

练　习

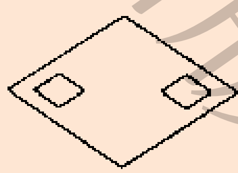
1. 平面上的两条相交直线是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？画图试试看.

2. 把一张正方形的纸折叠两次，然后分别剪出下列图形.

（1）

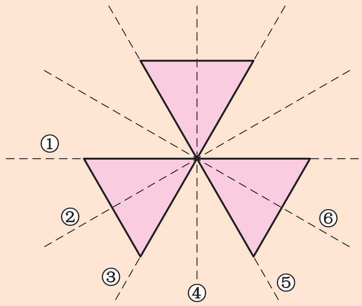


（2）



（第2题）

3. 下面的一些虚线,哪些是图形的对称轴,哪些不是?



(第 3 题)

3. 画轴对称图形

如果给出一个图形和一条直线,那么如何画出这个图形关于这条直线的对称图形呢?

试一试

如图 10. 1. 9,实线所构成的图形为已知图形,虚线为对称轴,试画出已知图形的轴对称图形. 画好之后,你可以通过折叠的方法来验证你画得是否正确.

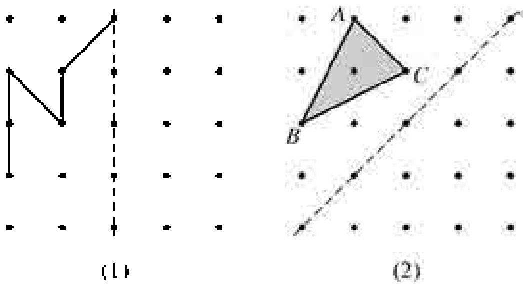


图 10. 1. 9

和其他同学比较一下,谁的方法较为简单?

在格点图中,很容易画出已知图形的轴对称图形,如果没有格点,你还能准确地画出已知图形的轴对称图形吗?

做一做

如图 10.1.10，已知点 A 和直线 l，试画出点 A 关于直线 l 的对称点 A'.

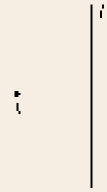


图 10.1.10

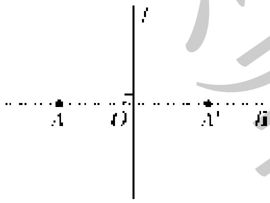


图 10.1.11

如图 10.1.11，按下面的方法画点 A 关于直线 l 的对称点 A'：

（1）用量角器或三角尺过点 A 画直线 l 的垂线 AB，垂足为点 O；

（2）在 AB 上取 $OA'=OA$，从而得到对称点 A'.

画好之后，你可以通过折叠的方法来验证一下点 A 和点 A'是否关于直线 l 对称.

例 已知 $\triangle ABC$，直线 l，画出 $\triangle ABC$ 关于直线 l 对称的图形.

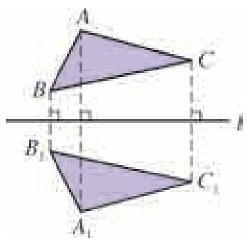


图 10.1.12

解 如图 10.1.12，我们可以按这样的步骤来画：

（1）分别画出点 A、B 和 C 关于直线 l 的对称点 A_1、B_1 和 C_1；

（2）连结 A_1B_1、B_1C_1、C_1A_1.

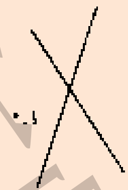
$\triangle A_1B_1C_1$ 就是所求的 $\triangle ABC$ 关于直线 l 对称的三角形.

你可以试一试，画出其他复杂图形的轴对称图形.

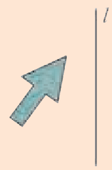
从上例可以知道，如果图形是由直线、线段或射线组成时，那么只要画出图形中的特殊点（如线段的端点、角的顶点等）的对称点，然后连结对称点，就可以画出关于这条直线的对称图形.

练　习

1. 在图中分别画出点 A 关于两条直线的对称点 A' 和 A''.
2. 画出所示图形关于直线 l 的对称图形.



（第 1 题）



（第 2 题）

4. 设计轴对称图案

在商标、衣料图案和众多的日用品上，我们可以看到不少丰富多彩的装饰图案，仔细观察这些装饰图案，你会发现其中有许多轴对称图形.

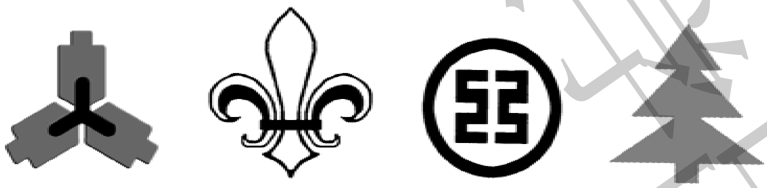


图 10.1.13 是两个轴对称图形，它们有多少条对称轴？我们可以利用轴对称来画出它们吗？

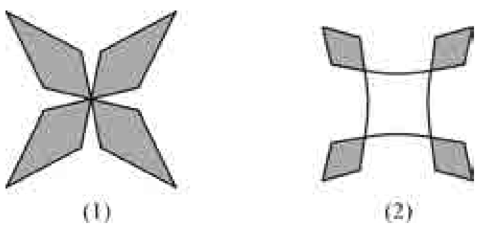


图 10.1.13

请准备一张正方形纸片,按图 10.1.14 所示的 5 个步骤来画:

(1) 在正方形纸片上用虚线画出 4 条对称轴;

(2) 如图(2),在其中一个三角形中,画出图形形状的基本线条(注意:不同的线条最终会得到不同的图案,你可以自己设计线条,而不必和课本上的一样);

(3) 按照其中一条斜的对称轴画出图(2)中图形的对称图形;

(4) 按照另一条斜的对称轴画出图(3)中图形的对称图形;

(5) 按照水平(或垂直)的对称轴画出图(4)中图形的对称图形,得到图(5),从而得到图 10.1.13 中的图(1).

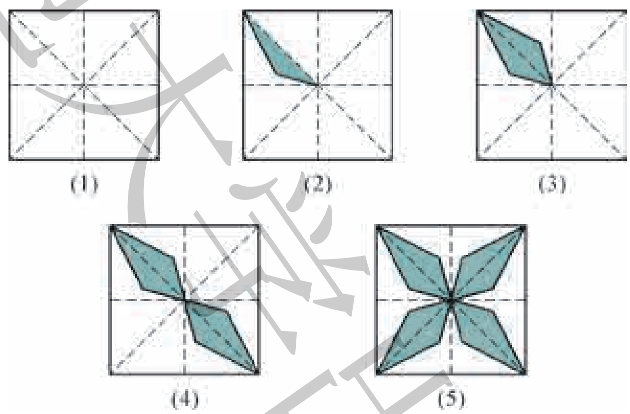


图 10.1.14

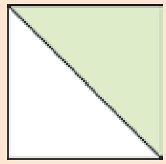
画好之后,你可以在图案上涂上你喜欢的颜色,擦掉其他多余的线条,一幅对称的图案就完成了.

画轴对称图形,这只是图案设计的一种方法,我们以后还会接触更多的方法. 当然如果我们懂一些美术知识,就可以设计出许多漂亮的图案了.

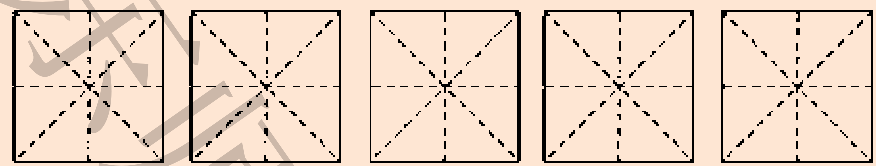
练　习

1. 用四块如图所示的瓷砖拼成一个正方形,形成轴对称的图案,和你的同伴比一比,看谁的拼法多.

2. 仿照课本给出的步骤,利用下图设计一个轴对称图案.



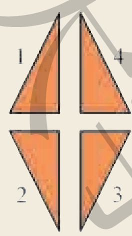
(第 1 题)



(第 2 题)

习题 10. 1

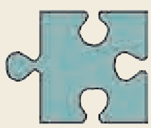
1. 图中三角形 4 与哪些三角形成轴对称? 整个图形中有几条对称轴?



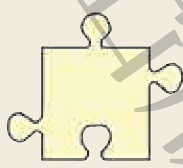
(第 1 题)

2. 下面的图形中,哪些是轴对称图形? 哪些不是轴对称图形?

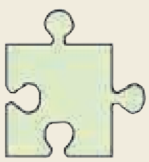
(1)



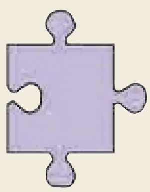
(2)



(3)

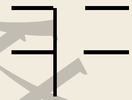
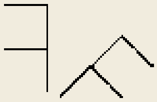
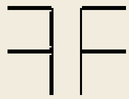


(4)

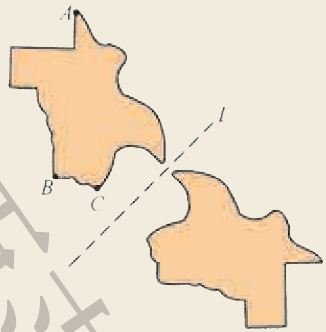


(第 2 题)

3. 右边图形与左边图形成轴对称的是(　　).

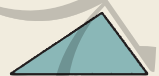
A. 　　B. 　　C. 

4. 在图形中标出点 A、B 和 C 关于直线 l 的对称点.



(第 4 题)

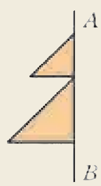
5. 下列图形中,哪些是轴对称图形?哪些不是轴对称图形?如果是轴对称图形,请画出对称轴.

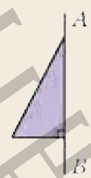
(1) 　　(2) 　　(3) 

(第 5 题)

6. 如图,分别以 AB 为对称轴,画出各图形的对称图形,并观察图形(3)和它的轴对称图形构成什么三角形,说说你的想法.

(1) 

(2) 

(3) 

(第 6 题)

阅读材料

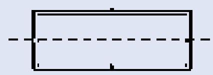
Times and dates

Wang Bei's computer shows the time on the screen. 06:20

The times are sometimes symmetrical, like this: 18:03

1. (a) Which of these times are symmetrical?

01:18	03:38	11:18	01:00
02:20	14:41	03:17	13:13
06:09	05:18	01:10	10:01

(b) Do any of the times have two lines of symmetry? 

(c) Write three more times that have one line of symmetry.

(d) Write one more time that has two lines of symmetry.

Wang Bei's computer shows the date in a similar way.

2. 11 November 2011 looks like this. 11:11:11

   How many lines of symmetry does it have?

3. 3 August 2001 looks like this. 03:08:01

   Is this date symmetrical?

4. Say whether each of these dates has one, two or no lines of symmetry.

   (a) 06:01:08 (b) 18:11:81 (c) 16:11:91 (d) 08:10:13

5. Write these dates the way the computer shows them, and say how many lines of symmetry each one has.

   (a) 4 February 2033 (b) 31 October 2081

   (c) 8 November 2080 (d) 8 January 2080

6. Write two more dates that have only one line of symmetry.

7. Write two more dates that have two lines of symmetry.

(素材取自 *SMP Interact Book 1*, Cambridge University Press)

10.2 平　移

1. 图形的平移

在日常生活中,我们经常可以看到如图 10.2.1 所示的一些现象:

滑雪运动员在白茫茫的平坦雪地上滑行,大楼电梯上上下下地迎送来客,火车在笔直的铁轨上飞驰而过,飞机起飞前在跑道上加速滑行,这些都给我们以物体平行移动的感觉.

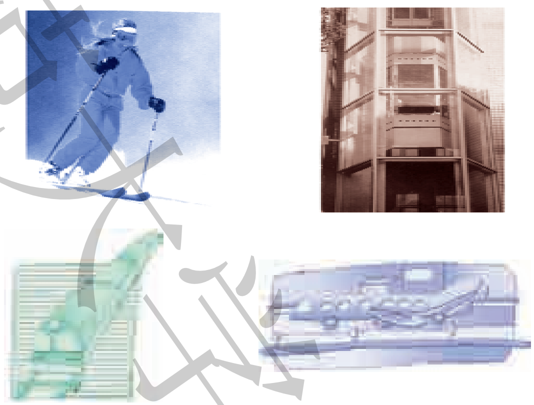


图 10.2.1

我们还可以看到如图 10.2.2 所示的一幅幅美丽的图案,它们都可以看成是某一基本的平面图形沿着一定的方向移动而产生的结果.

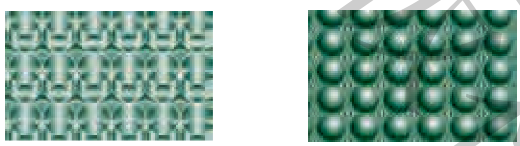


图 10.2.2

平面图形在它所在的平面上的平行移动,简称为**平移**(translation). 它由移动的方向和距离所决定.

如图 10.2.3，当我们使用直尺与三角尺画平行线时，$\triangle ABC$ 沿着直尺 PQ 平移到 $\triangle A'B'C'$，就可以画出 AB 的平行线 $A'B'$ 了.

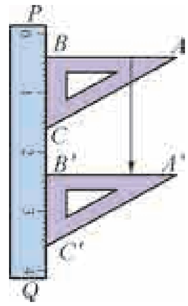


图 10.2.3

我们把点 A 与点 A' 叫做对应点，把线段 AB 与线段 $A'B'$ 叫做对应线段，$\angle A$ 与 $\angle A'$ 叫做对应角. 此时：

点 B 的对应点是点____________；

点 C 的对应点是点____________；

线段 AC 的对应线段是线段____________；

线段 BC 的对应线段是线段____________；

$\angle B$ 的对应角是____________；

$\angle C$ 的对应角是____________.

$\triangle ABC$ 平移的方向就是由点 B 到点 B' 的方向，平移的距离就是线段 BB' 的长度.

试一试

在图 10.2.4 中，$\triangle ABC$ 沿着由点 A 到点 A' 的方向，平移到 $\triangle A'B'C'$ 的位置. 你知道线段 AC 的中点 M 以及线段 BC 上的点 N 平移到什么地方去了吗？请在图上标出它们的对应点 M' 和 N' 的位置.

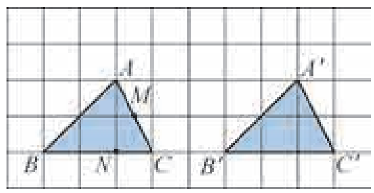
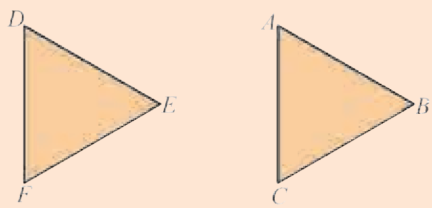


图 10.2.4

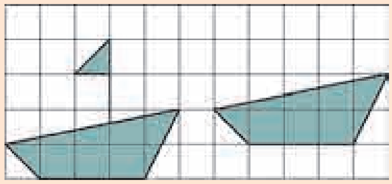
练　习

1. 举出现实生活中平移的一些实例.
2. 如图所示的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 都是等边三角形，其中一个等边三角形经过平移后成为另一个等边三角形. 指出点 A、B、C 的对应点，线段 AB、BC、CA 的对应线段，以及 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对应角.



（第 2 题）

3. 如图，小船经过平移到了新的位置，你发现缺少什么了吗？请补上.



（第 3 题）

2. 平移的特征

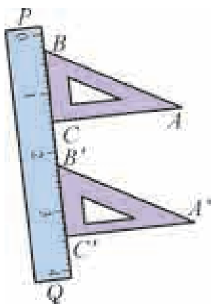


图 10.2.5

如图 10.2.5，在画平行线的时候，有时为了需要，将直尺与三角尺放在倾斜的位置上. 但不管怎样，我们总可以推得

$$A'B' \parallel AB,\ A'B' = AB,\ \angle B' = \angle B.$$

同时也有

$$A'C' \parallel \underline{\qquad},\ A'C' = \underline{\qquad},\ \angle C' = \underline{\qquad}.$$

这就告诉我们，**平移后的图形与原来图形的对应线段平行并且相等，对应角相等，图形的形状与大小不变.**

注意

在平移过程中，对应线段也可能在同一条直线上（如图 10.2.5 中的 $B'C'$ 与 BC）.

探索

观察图 10.2.6，$\triangle ABC$ 沿着 PQ 方向平移到 $\triangle A'B'C'$ 的位置，除了对应线段平行并且相等以外，你还发现了什么现象？

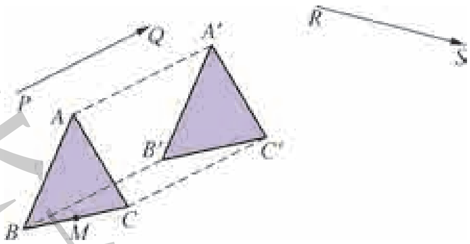


图 10.2.6

我们可以看到，$\triangle ABC$ 上的每一点都作了相同的平移：

$$A \to A',\ B \to B',\ C \to C'.$$

不难发现

$$AA' \ /\!/ \ \underline{\qquad\qquad} \ /\!/ \ \underline{\qquad\qquad};$$

$$AA' = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}.$$

即平移后对应点所连的线段平行并且相等.

你知道线段 BC 的中点 M 平移到什么地方去了吗?

试一试

将图 10.2.6 中的 $\triangle A'B'C'$ 沿着 RS 方向平移到 $\triangle A''B''C''$的位置，其平移的距离为线段 RS 的长度.

注意

如图 10.2.7，在平移过程中，对应点所连的线段也可能在同一条直线上.

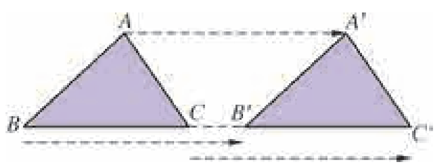


图 10.2.7

例 如图 10.2.8(1),将$\triangle ABC$平移到$\triangle A'B'C'$的位置. 指出平移的方向,并量出平移的距离.(精确到 1 mm)

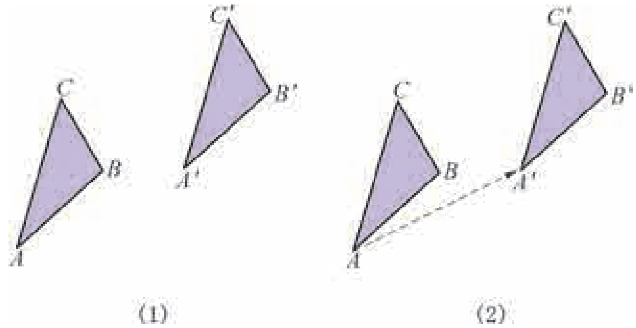


图 10.2.8

解 由于点 A 与点 A'是一对对应点,因此,如图 10.2.8(2),连结 AA',平移的方向就是点 A 到点 A'的方向,平移的距离就是线段 AA'的长度,约 2.4 厘米.

试一试

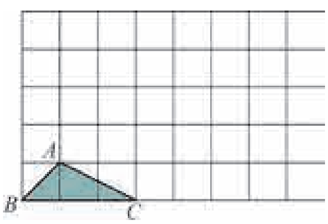


图 10.2.9

在如图 10.2.9 的方格纸中,画出将图中的$\triangle ABC$向右平移 4 格后的$\triangle A'B'C'$,然后再画出将$\triangle A'B'C'$向上平移 3 格后的$\triangle A''B''C''$. $\triangle A''B''C''$是否可以看成是$\triangle ABC$经过一次平移而得到的? 如果是,那么平移的方向和距离分别是什么?

做一做

如图 10.2.10,在纸上画$\triangle ABC$和两条平行的直线 m、n. 先画出$\triangle ABC$关于直线 m 对称的$\triangle A'B'C'$,再画出$\triangle A'B'C'$关于直线 n 对称的$\triangle A''B''C''$. 观察$\triangle ABC$和$\triangle A''B''C''$,你能发现这两个三角形有什么关系吗?

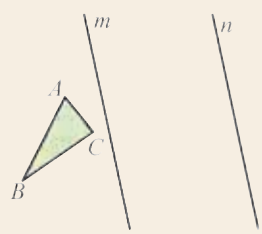
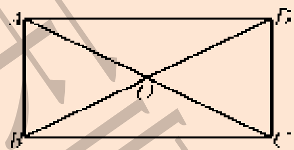


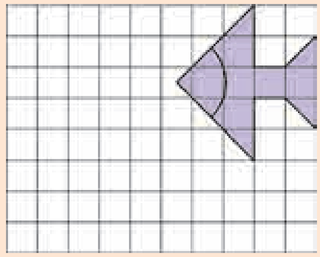
图 10.2.10

练　习

1. 如图,在长方形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 相交于点 O,画出 $\triangle AOB$ 平移后的三角形,其平移方向为射线 AD 的方向,平移的距离为线段 AD 的长.

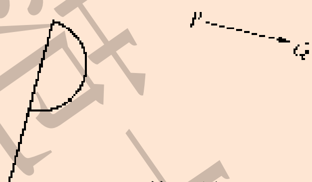


(第 1 题)



(第 2 题)

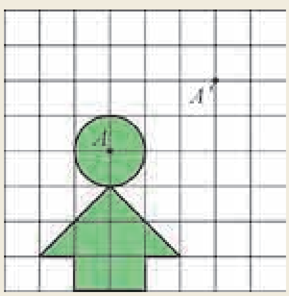
2. 先将方格纸中的图形向左平移 5 格,然后再向下平移 3 格,画出平移后的图形.
3. 将所给图形沿着 PQ 方向平移,平移的距离为线段 PQ 的长,画出平移后的图形.



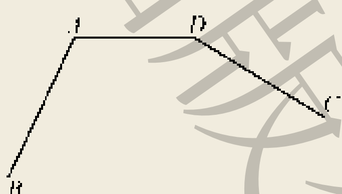
(第 3 题)

习题 10.2

1. 任意画一个三角形,然后将此三角形沿着北偏东 60°的方向平移 2.8 厘米,画出平移后的三角形.
2. 如图,平移方格纸中的图形,使点 A 平移到点 A' 处,画出平移后的图形.



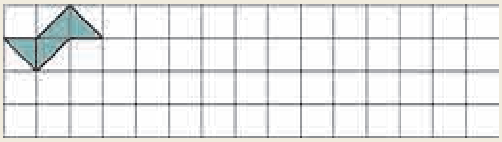
(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图,$AB = DC$,画出线段 AB 平移后的线段 DE,其平移方向为射线 AD 的方向,平移的距离为线段 AD 的长. 平移后,连结 EC,则 $\triangle DEC$ 是什么三角形?试说明理由.

4. 利用如图所示的图形，通过平移设计图案.



（第 4 题）

10.3 旋　转

1. 图形的旋转

在日常生活中，除了物体的平行移动外，我们还可以看到许多如图 10.3.1 所示物体的旋转现象.

时钟上的秒针在不停地转动，大风车的转动给人们带来快乐，飞速转动的电风扇叶片给人们带来丝丝凉意.

图 10.3.1

图 10.3.2 中的两个图形都可以看成：由一个或几个基本的平面图形，在它所在的平面上转动而产生的奇妙画面.

图 10.3.2

这些图形有什么共同点呢?

如图 10.3.3,单摆上的小球由位置 P 转到位置 P',显然它是绕上面的悬挂点在一个平面上转动.像这样的运动,就叫做**旋转**(rotation).这一悬挂点就叫做小球旋转的**旋转中心**(centre of rotation).显然,旋转中心在旋转过程中保持不动,图形的旋转由旋转中心、旋转的角度和旋转的方向所决定.

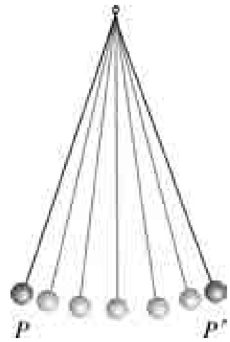


图 10.3.3

试一试

如图 10.3.4,用一张半透明的薄纸,覆盖在画有任意$\triangle AOB$ 的纸上,在薄纸上画出与$\triangle AOB$ 重合的一个三角形.然后用一枚图钉在点 O 处固定,将薄纸绕着图钉(即点 O)逆时针旋转 45°,薄纸上的三角形就旋转到了新的位置,标上 A'、B',我们可以认为$\triangle AOB$ 逆时针旋转 45°后变成$\triangle A'OB'$.

图形旋转时,必须注意旋转中心、旋转的角度和旋转的方向.

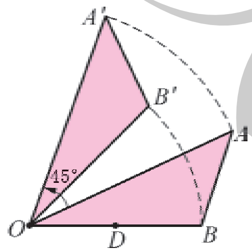


图 10.3.4

在这样的旋转过程中,你发现了什么?

从图 10.3.4 中,可以看到点 A 旋转到点 A', OA 旋转到 OA', $\angle AOB$ 旋转到$\angle A'OB'$,这些都是互相对应的点、线段与角.此时:

点 B 的对应点是点________;

线段 OB 的对应线段是线段________;

线段 AB 的对应线段是线段________;

$\angle A$ 的对应角是________;

$\angle B$ 的对应角是________;

想一想

$\triangle AOB$ 的边 OB 的中点 D 的对应点在哪里?

旋转中心是点________；

旋转的角度是________.

做一做

如图 10.3.5，如果旋转中心在△ABC 外的点 O 处，逆时针旋转 60°，将△ABC 旋转到△$A'B'C'$的位置. 那么这两个三角形的顶点、边与角是如何对应的呢？

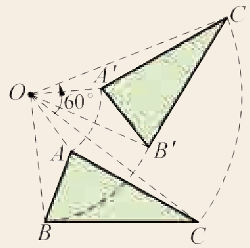


图 10.3.5

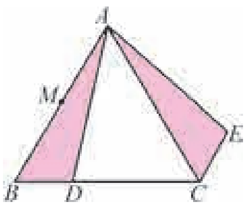


图 10.3.6

例 1 如图 10.3.6，△ABC 是等边三角形，D 是 BC 上一点，△ABD 经过逆时针旋转后到达△ACE 的位置.

（1）旋转中心是哪一点？

（2）旋转了多少度？

（3）如果 M 是 AB 的中点，那么经过上述旋转后，点 M 转到了什么位置？

解 （1）旋转中心是点 A.

（2）旋转了 60°.

（3）点 M 转到了 AC 的中点位置上.

例 2 如图 10.3.7(1)，点 M 是线段 AB 上一点，将线段 AB 绕着点 M 顺时针旋转 90°，旋转后的线段与原线段的位置有何关系？如果逆时针旋转 90°呢？

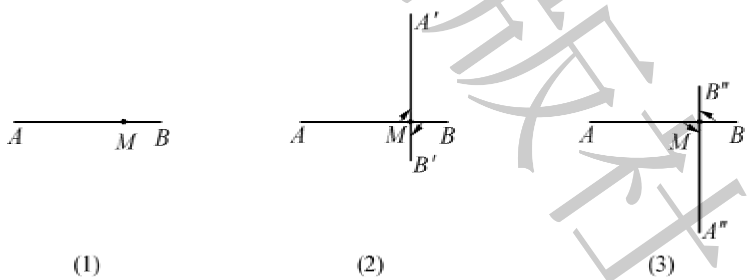


图 10.3.7

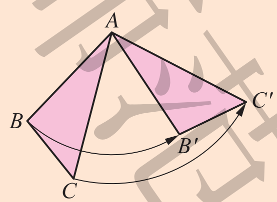
解 如图10.3.7(2),顺时针旋转90°,$A'B'$与AB互相垂直.

如图10.3.7(3),逆时针旋转90°,$A''B''$与AB互相垂直.

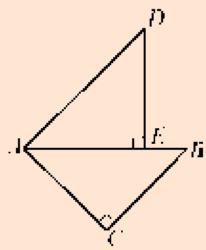
线段旋转90°后与原来位置的线段互相垂直.

练 习

1. 举出现实生活中旋转的一些实例.
2. 如图,$\triangle ABC$按逆时针方向旋转一个角度后成为$\triangle AB'C'$,图中哪一点是旋转中心?旋转了多少度?



(第2题)



(第3题)

3. 如图,$\triangle ABC$与$\triangle ADE$都是等腰直角三角形,$\angle C$和$\angle AED$都是直角,点E在AB上,如果$\triangle ABC$经逆时针旋转后能与$\triangle ADE$重合,那么哪一点是旋转中心?旋转了多少度?

2. 旋转的特征

探索

观察第119页图10.3.4与第120页图10.3.5,你能发现有哪些线段相等?有哪些角相等?

我们可以看到,在图10.3.4中,线段OA、OB都是绕点O逆时针旋转45°到对应线段OA'、OB',而且

$$OA = OA',\ OB = OB',\ AB = A'B';$$

$\angle AOB = \angle A'OB'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$.

在图 10.3.5 中,旋转中心是点 O,点 A、B、C 都是绕点 O 逆时针旋转 60°到对应点 A'、B'、C',而且

OA = ______, OB = ______, OC = ______;

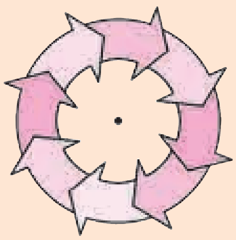
AB = ______, BC = ______, CA = ______;

$\angle CAB$ = ____, $\angle ABC$ = ____, $\angle BCA$ = ____.

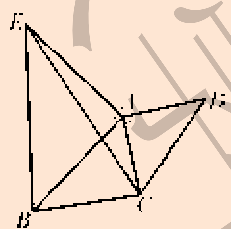
这就是图形旋转的特征:**图形中每一点都绕着旋转中心按同一旋转方向旋转了同样大小的角度,对应点到旋转中心的距离相等,对应线段相等,对应角相等,图形的形状与大小不变.**

练　习

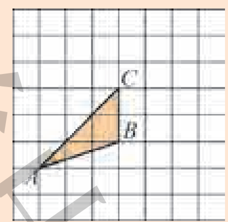
1. 确定如图中的旋转中心,指出这一图形可以看成是由哪个基本图形旋转而生成的,旋转几次,每一次旋转多少度.(不计颜色)
2. 如图,△ACD、△AEB 都是等腰直角三角形,$\angle CAD = \angle EAB = 90°$,画出△$ACE$ 以点 A 为旋转中心、逆时针旋转 90°后的三角形.



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图,画出△ABC 绕点 C 逆时针旋转 90°后的图形.

3. 旋转对称图形

在日常生活中,我们经常可以看到,一些图形绕着某一定点旋转一定的角度后能与自身重合. 如图 10.3.8 所示,电扇的叶片旋转 120°、螺旋桨旋转 180°后,都能与自身重合. 你能再举出一些这样的实例吗?

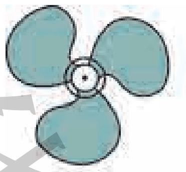


图 10.3.8

试一试

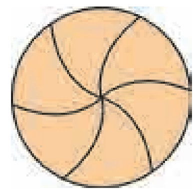


图 10.3.9

用一张半透明的薄纸，覆盖在如图 10.3.9 所示的图形上，在薄纸上画这个图形，使它与如图 10.3.9 所示的图形重合. 然后用一枚图钉在圆心处穿过，将薄纸绕着图钉旋转，观察旋转多少度(小于周角)后，薄纸上的图形能与原图形再一次重合.

由上述操作可知，该图形绕圆心旋转 60°后，能与自身重合，而且绕圆心旋转 120°或 180°后，都能与自身重合.

像这样旋转一定角度后能与自身重合的图形就称为**旋转对称图形**(a figure of rotation symmetry).

若顺时针或逆时针旋转一定角度，该图形都能与原图形重合，则可以淡化旋转方向.

用类似上述的操作方法对如图 10.3.10 所示的图形进行探索，看看它是不是旋转对称图形. 若是，想一想旋转中心在何处，需要旋转多少度后，能与自身重合. 该图形还是轴对称图形吗?

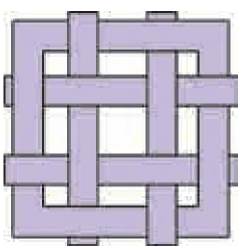


图 10.3.10

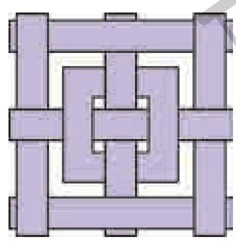


图 10.3.11

图 10.3.11 所示的图形是轴对称图形. 用类似上述的操作方法对图 10.3.11 所示的图形进行探索，它能通过旋转与自身重合吗?

你能设计一个旋转 30°后能与自身重合的图形吗?

做一做

如图 10.3.12，画$\triangle ABC$和过点P的两条直线PQ、PR. 画出$\triangle ABC$关于PQ对称的三角形$A'B'C'$，再画出$\triangle A'B'C'$关于PR对称的三角形$A''B''C''$.

观察$\triangle ABC$和$\triangle A''B''C''$，你能发现这两个三角形有什么关系吗？

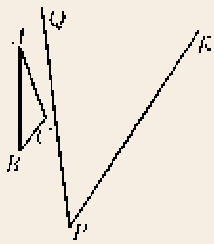
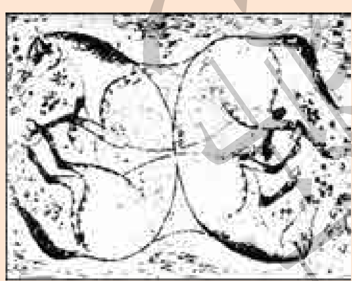


图 10.3.12

练　习

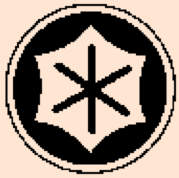
1. 举出日常生活中旋转对称图形的几个实例.
2. 找找看，下面这幅古代艺术品图形中有几匹马？它们的位置关系大致如何？



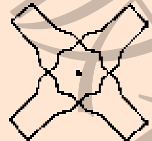
（第 2 题）

3. 如图所示的图形绕哪一点旋转多少度后能与自身重合？

(1)



(2)



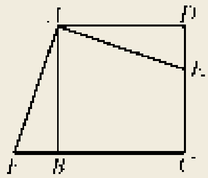
（第 3 题）

4. 任意画一个$\triangle ABC$，再任意画一个点P，然后画出$\triangle ABC$绕点P逆时针旋转$60°$后的三角形.

习题 10.3

1. 如图所示的五角星绕哪一点旋转多少度后能与自身重合?

(第 1 题)



(第 2 题)

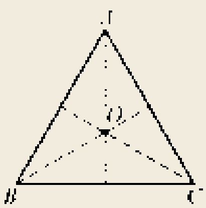
2. 如图,四边形 $ABCD$ 是正方形,$\triangle ADE$ 经顺时针旋转后与$\triangle ABF$ 重合.

(1) 旋转中心是哪一点?

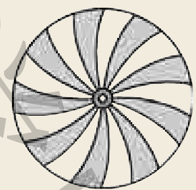
(2) 旋转了多少度?

(3) 如果连结 EF,那么$\triangle AEF$ 是怎样的三角形?

3. 如图,$\triangle ABC$ 是等边三角形,点 O 是三条中线的交点,$\triangle ABC$ 以点 O 为旋转中心,旋转多少度后能与原来的图形重合?



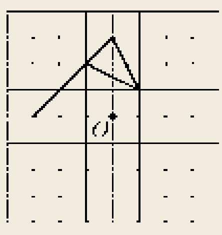
(第 3 题)



(第 4 题)

4. 仿照第 123 页“试一试”的方法,分两种情况:考虑颜色和不考虑颜色,看看如图所示的图形绕圆心旋转多少度后能与自身重合?

5. 画出所给图形绕点 O 顺时针旋转 90°后的图形. 旋转几次后可以与原图形重合?



(第 5 题)

阅读材料

古建筑中的旋转对称

——从敦煌洞窟到欧洲教堂

敦煌的佛教洞窟与欧洲的基督教堂相距数千公里，文化和宗教背景截然不同，然而，在相距几百年的时间里，却先后出现了完全相同的一种图案：三只兔子相互追逐形成一环. 大英博物馆《国际敦煌学项目》(IDP News)披露了这一新发现.

隋朝，敦煌 407 窟窟顶上的图案

16 世纪早期，德国帕德波恩大教堂的玻璃镶花图案

敦煌佛教洞窟中，至少有 16 个洞窟出现了这一图案：三只兔子位于莲花的中心，耳朵相连，朝着不同方向，互相追逐，有的是顺时针(如 305 窟)，有的是逆时针(如 407 窟). 这些洞窟建于隋朝和晚唐时期. 但是，敦煌学文献中却找不到关于这一图案的相关研究的记录.

而到了 13 世纪，在欧洲的德国、法国和英国某些基督教堂的屋顶浮雕等处，都发现了相同或相似的图案. 这三只兔子是如何从中国传到欧洲的，一时成为敦煌学界的一大研究热点. 有专家指出，这一图案是通过中国的纺织品经由丝绸之路传到欧洲的，但目前还没有确切的证据证实这一观点. 专家们正在加紧研究，以期解开“三只兔子之谜”.

19 世纪欧洲一本谜语书中的图案

10.4 中心对称

在上一节,我们已经看到有不少图形绕某一中心旋转一定角度后,可以与自身重合. 如图 10.4.1 所示的三个图形都是这样的旋转对称图形.

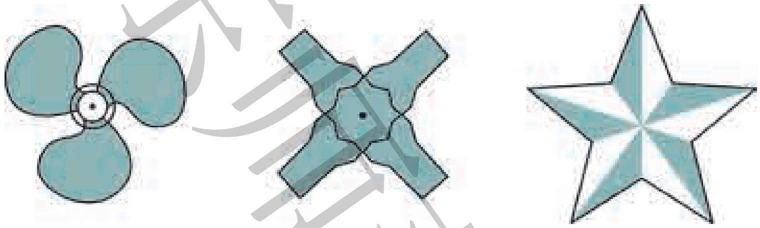


图 10.4.1

图 10.4.1 中间的一个图形绕着中心旋转 180°后能与自身重合, 我们把这种图形叫做**中心对称图形**(a figure of central symmetry),这个中心叫做**对称中心**(centre of symmetry).

中心对称图形是旋转角度为 180°的旋转对称图形.

把一个图形绕着某一点旋转 180°,如果它能够和另一个图形重合,那么,我们就说这两个图形成中心对称,这个点叫做对称中心,这两个图形中的对应点,叫做关于中心的对称点.

想一想

线段、三角形、平行四边形、长方形、正方形、圆分别是中心对称图形吗? 如果是,那么对称中心又分别在哪里?

如图 10.4.2 所示,$\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 是成中心对称的两个三角形,点 A 是对称中心,点 B 的对称点为点________,点 C 的对称点为点________,点 A 的对称点为点________.

点 B 绕着点 A 旋转 180°到达点 D 处,因此,B、A、D 三点在同一条直线上,并且 $AB = AD$.

C、A、E 三点的位置关系怎样? 线段 AC、AE 的大小关系呢?

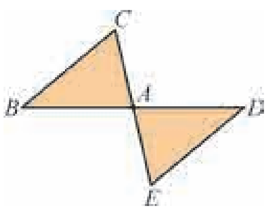


图 10.4.2

探索

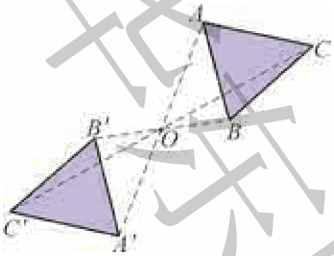


图 10.4.3

在图 10.4.3 中，$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$ 关于点 O 成中心对称，你能从图中找到哪些等量关系？

我们可以发现，点 A 绕中心点 O 旋转 180°后到点 A'，于是 A、O、A'三点在同一条直线上，并且 $OA = OA'$. 另外分别在同一条直线上的三点还有________和________；并且 $OB =$ ________，$OC =$ ________.

归纳

在成中心对称的两个图形中，连结对称点的线段都经过对称中心，并且被对称中心平分.

反过来，**如果两个图形的所有对应点连成的线段都经过某一点，并且都被该点平分，那么这两个图形关于这一点成中心对称.**

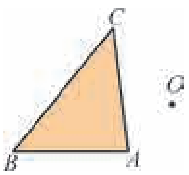


图 10.4.4

例 如图 10.4.4，已知$\triangle ABC$ 和点 O，画出$\triangle DEF$，使$\triangle DEF$ 和$\triangle ABC$ 关于点 O 成中心对称.

解 （1）连结 AO 并延长 AO 到点 D，使 $OD = OA$，于是得到点 A 关于点 O 的对称点 D；

（2）同样画出点 B 和点 C 关于点 O 的对称点 E 和 F；

（3）顺次连结 DE、EF、FD.

如图 10.4.5，$\triangle DEF$ 即为所求的三角形.

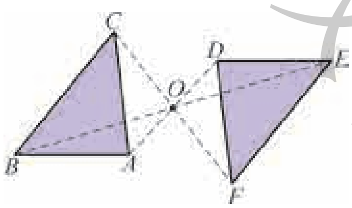


图 10.4.5

1. 仔细观察下图所列的26个英文字母,将相应的字母填入表中适当的空格内.

ABCDEFGHI

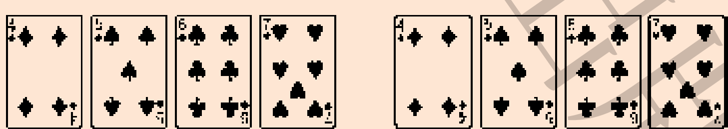
JKLMNOPQR

STUVWXYZ

(第1题)

对称形式	轴对称		旋转对称	中心对称
	只有一条对称轴	有两条对称轴		
英文字母				

2. 如图(1)所示,魔术师把4张扑克牌放在桌子上,然后蒙住眼睛,请一位观众上台,把某一张牌旋转180°. 魔术师解除蒙具后,看到4张扑克牌如图(2)所示,他很快确定了哪一张牌被旋转过. 你能吗?



(1)　　(2)

(第2题)

读一读

对弈策略

两个人轮流在一张桌面(长方形或正方形或圆形)上摆放同样大小的硬币,规则是:每人每次摆一个,硬币不能相互重叠,也不能有一部分在桌面边沿之外,摆好以后不准移动,这样经过多次摆放,直到谁最先摆不下硬币,谁就认输. 按照这个规则,你用什么办法才能取胜?

初看起来,只能碰运气,其实不然. 只要你先摆,并且采取中心对称策略,你就一定能取胜. 取胜的秘诀是:你先把一枚硬币放在桌面的对称中心上,以后根据对方所放硬币的位置,在它关于中心对称的位置上放下一枚硬币. 这样,由于对称性,只要对方能放下一枚硬币,你就能在其对称的位置上放下一枚硬币. 你不妨试一试.

试一试

如图 10.4.6 所示的两个图形成中心对称,你能找到它们的对称中心吗?

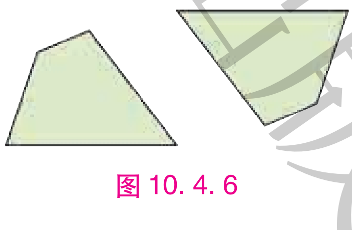


图 10.4.6

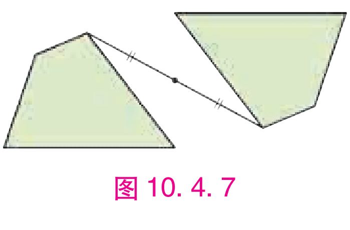


图 10.4.7

小明找到了如图 10.4.7 所示的方法,你呢? 你知道其中的理由吗? 你还能找到其他的方法吗?

做一做

如图 10.4.8，先在纸上画 $\triangle ABC$、点 P，再画出 $\triangle ABC$ 关于点 P 成中心对称的 $\triangle A'B'C'$.

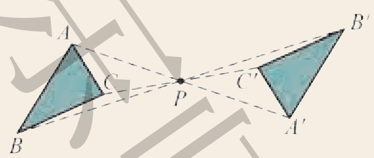


图 10.4.8

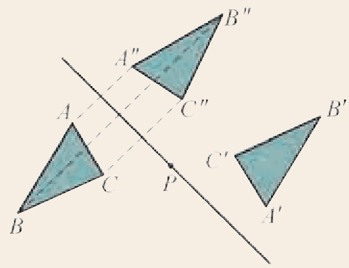


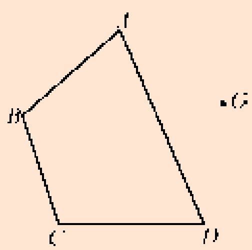
图 10.4.9

如图 10.4.9，在图 10.4.8 的基础上，过点 P 任意画一条直线，画出 $\triangle ABC$ 关于此直线对称的 $\triangle A''B''C''$.

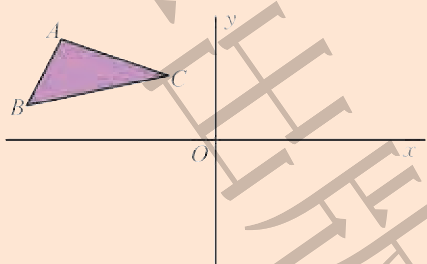
观察 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle A''B''C''$，你发现了什么？

练　习

1. 如图，已知四边形 $ABCD$ 和点 O，画四边形 $A'B'C'D'$，使四边形 $A'B'C'D'$ 和四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称.



（第 1 题）

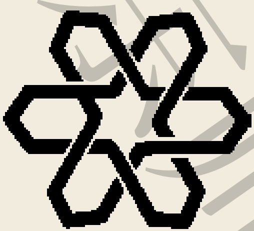


（第 2 题）

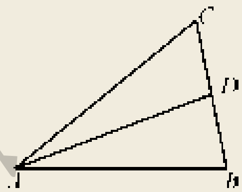
2. 如图，已知 $\triangle ABC$ 和过点 O 的两条互相垂直的直线 x、y，画出 $\triangle ABC$ 关于直线 x 对称的 $\triangle A'B'C'$，再画出 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 y 对称的 $\triangle A''B''C''$，$\triangle A''B''C''$ 与 $\triangle ABC$ 是否关于点 O 成中心对称？

习题 10.4

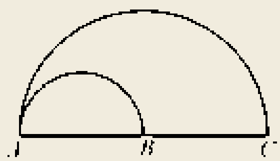
1. 关于某一点成中心对称的两个图形,连结所有对称点的线段经过________,被________平分,对应线段与对应角都________.
2. 如图所示的图形是不是轴对称图形?是不是中心对称图形?



(第 2 题)



(第 3 题)

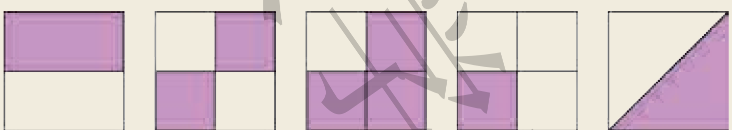


(第 4 题)

3. 如图,已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线,画出以点 D 为对称中心,与 $\triangle ABD$ 成中心对称的三角形.
4. 如图所示的图形是由两个半圆组成的图形,已知点 B 是 AC 的中点,画出此图形关于点 B 成中心对称的图形.
5. 对称拼图游戏

(1) 游戏准备

① 如图,有 5 种同样大小的画有阴影的小方块,每种各 5 块,共 25 块.



② 含有 25 个方格的大正方形板,每一方格与①中的小方块同样大小.

③ 有如下成绩表:

姓　名					
点　数					

(2) 游戏规则

将你所拿到的 25 个画有阴影的小方块一块块地放在大正方形板上,注意最后要使你所放的所有小方块(连同它的阴影)在大正方形板上出现一个对称图形,一直放到你无法放上为止,你的成绩点数就是你放上去的小方块数. 谁的点数高,谁就是最后的胜者.

怎么样?与你的小伙伴们比比看!

10.5 图形的全等

我们已经认识了图形的轴对称、平移和旋转，这是图形的三种基本变换，图形经过这样的变换，位置发生了改变，但变换前后两个图形的对应线段相等，对应角相等，图形的形状和大小并没有改变.

要想知道两个图形的形状和大小是否完全相同，可以通过轴对称、平移和旋转这些图形的变换，把两个图形叠合在一起，观察它们是否完全重合. 能够完全重合的两个图形叫做**全等图形**(congruent figures).

读一读

轴对称、平移与旋转都是实际生活中抽象得到的一些基本变换，它们保证了变换过程中，任意两点之间的距离不变，从而保证了图形的形状与大小都不发生变化，反映了图形之间的全等关系.

这种运用动态变换研究图形之间关系的方法，是一种重要而且有效的方法.

做一做

图 10.5.1 中给出了 8 个图形，你能发现哪两个图形是全等图形吗？动手试试看.

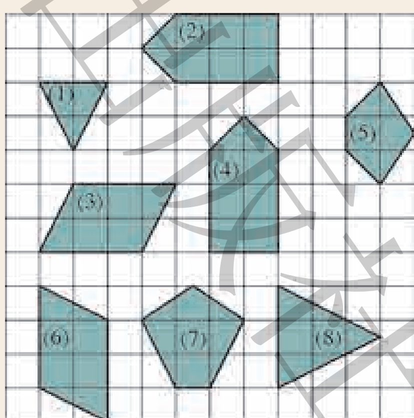


图 10.5.1

一个图形经过轴对称、平移和旋转等变换所得到的新图形一定与原图形全等；反过来，两个全等的图形经过上述变换后一定能够互相重合.

思考

观察图 10.5.2 中的两对多边形，每对中的其中一个可以经过怎样的变换和另一个图形重合？

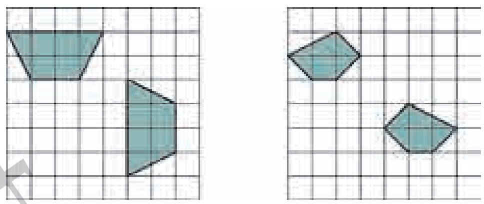


图 10.5.2

上面的两对多边形都是全等图形，也称为**全等多边形**. 两个全等的多边形，经过变换而重合，相互重合的顶点叫做**对应顶点**，相互重合的边叫做**对应边**，相互重合的角叫做**对应角**.

如图 10.5.3 中的两个五边形是全等的，记作五边形 $ABCDE \cong$ 五边形 $A'B'C'D'E'$（这里，符号"$\cong$"表示全等，读作"全等于"）. 点 A 与点 A'、点 B 与点 B'、点 C 与点 C'、点 D 与点 D'、点 E 与点 E' 分别是对应顶点.

图 10.5.3

试指出两个图形的对应角和对应边.

依据上面的分析，我们知道：

全等多边形的对应边相等，对应角相等.

这就是全等多边形的性质. 实际上，边、角分别对应相等这两个特征足以刻画多边形的全等了. 也就是说，在数学上我们可以给出全等多边形如下的定义：

这个定义是我们判断两个多边形是否全等的准确方法.

边、角分别对应相等的两个多边形称为全等多边形.

三角形是特殊的多边形，因此，

全等三角形的对应边、对应角分别相等.

同样，我们也可以得到全等三角形的定义，从而也得到了判断两个三角形是否全等的准确方法：

如果两个三角形的边、角分别对应相等，那么这两个三角形全等.

如图 10.5.4 所示，$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，且 $\angle A = \angle D$，$\angle B = \angle E$. 你能指出它们之间其他的对应顶点、对应角和对应边吗?

图 10.5.4

例 如图 10.5.5，$\triangle ABC$ 沿着 BC 的方向平移至 $\triangle DEF$，$\angle A = 80°$，$\angle B = 60°$，求 $\angle F$ 的度数.

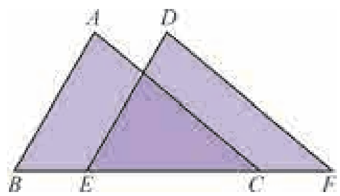


图 10.5.5

解 由图形平移的特征，可知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的形状与大小相同，即

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

$\therefore\ \angle D = \angle A = 80°$（全等三角形的对应角相等）.

同理 $\angle DEF = \angle B = 60°$.

又$\because\ \angle D + \angle DEF + \angle F = 180°$（三角形的内角和等于 180°），

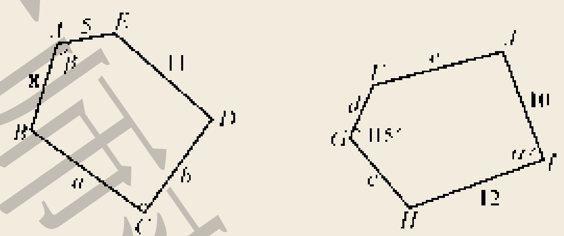
$$\therefore\ \angle F = 180° - \angle D - \angle DEF$$
$$= 180° - 80° - 60°$$
$$= 40°.$$

练　习

在日常生活中，处处可以看到全等的图形. 例如，同一张底片印出的同样尺寸的照片，我们使用的数学课本的封面，我们班的课桌面等等. 试尽可能多地举出生活中全等图形的例子，和同学比一比，看谁举出的例子多.

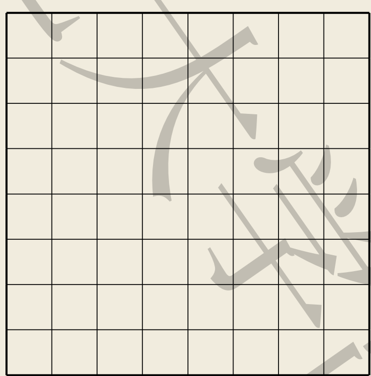
习题 10.5

1. 图中所示的是两个全等的五边形，$AB=8$，$AE=5$，$DE=11$，$HI=12$，$IJ=10$，$\angle C=90^{\circ}$，$\angle G=115^{\circ}$，点 B 与点 H、点 D 与点 J 分别是对应顶点，指出它们之间其他的对应顶点、对应边与对应角，并说出图中标的 a、b、c、d、e、α、β 各字母所表示的值.



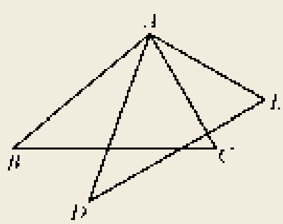
（第 1 题）

2. 在如图所示的方格纸中画出两个全等的四边形.



（第 2 题）

3. 如图，$\triangle ABC$ 绕顶点 A 逆时针旋转 30° 至 $\triangle ADE$，$\angle B=40^{\circ}$，$\angle DAC=50^{\circ}$. 求 $\angle E$ 的度数.



（第 3 题）

小结

一、知识结构

- 图形之间的变换关系
  - 轴对称 — 连结对应点的线段被对称轴垂直平分
  - 平　移 — 连结对应点的线段平行（或在同一条直线上）且相等；对应线段平行（或在同一条直线上）且相等
  - 旋　转 — 对应点与旋转中心的距离相等；每一点都绕旋转中心按同一方向旋转了同样大小的角度
    - 旋转对称 — 中心对称
  - 在轴对称、平移、旋转这些图形变换下，线段的长度不变，角的大小不变，变换前后的两个图形是全等图形
    - 全等多边形 — 全等多边形的对应边、对应角分别相等；边、角分别对应相等的两个多边形全等

二、要点

1. 本章从日常生活中常见的一些图形的位置关系，得出图形的轴对称、平移与旋转以及旋转对称、中心对称的概念. 通过动手操作，探索图形在轴对称、平移、旋转的过程中有关点、线段、角的变化情况.

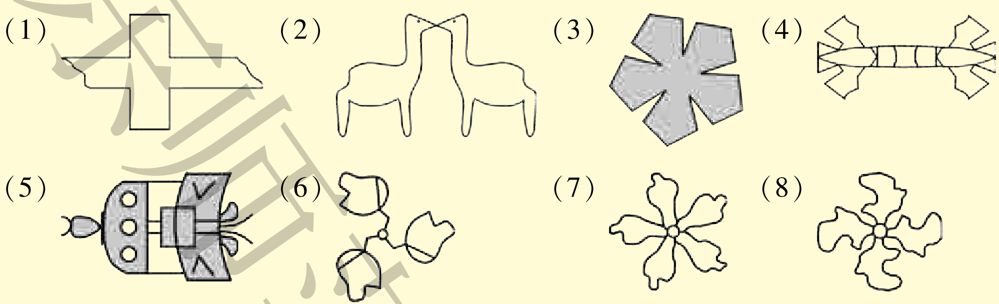
2. 轴对称、平移与旋转都是由现实世界广泛存在的某些现象而抽象得到的基本变换，反映了图形与图形之间的变化关系. 在这样的变换下，任意两点之间的距离不变，从而导致线段的长度、角的大小乃至整个图形的形状与大小不发生变化. 我们把可以通过轴对称、平移与旋转这些基本变换以后互相完全重合的两个图形称为全等图形，其根本原因也正在于此.

3. 今后我们还将继续运用动态变换的方法，研究其他的几何图形，得到各种有用的结论与关系.

复习题

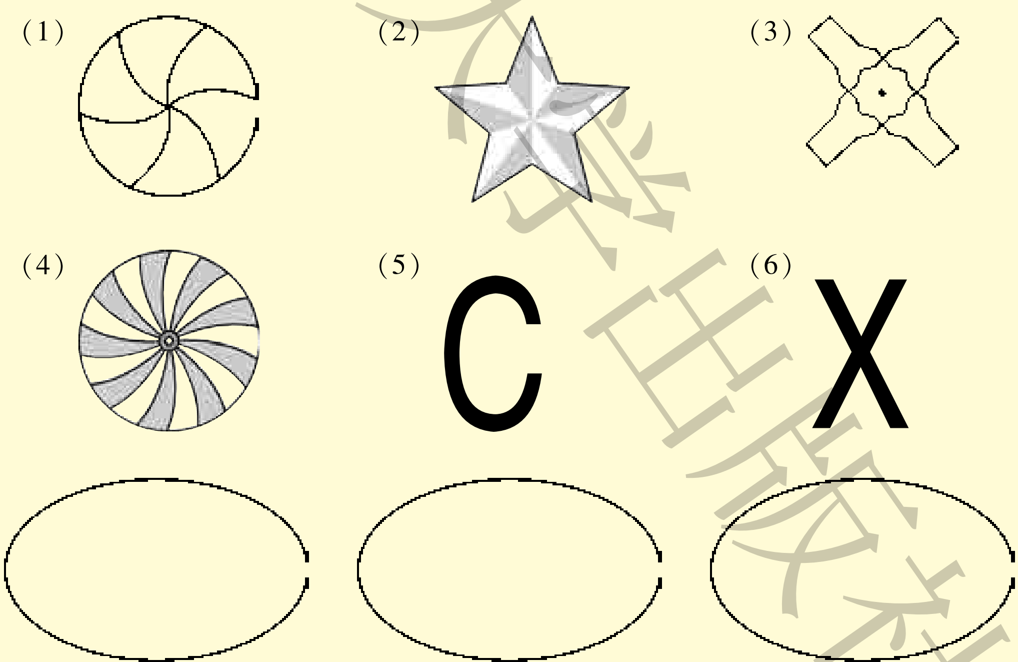
A 组

1. 指出下列图形中的轴对称图形，画出它们的对称轴.



（第 1 题）

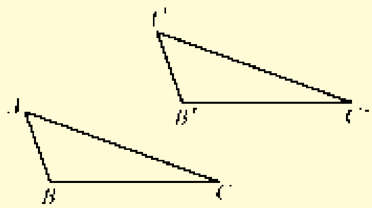
2. 观察下列图形，将其中的轴对称图形、旋转对称图形和中心对称图形所对应的编号填入相应的圈内.



轴对称图形　　旋转对称图形　　中心对称图形

（第 2 题）

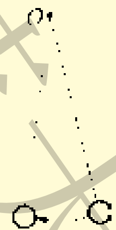
3. 如图，$\triangle ABC$ 经过平移后成为 $\triangle A'B'C'$，画出平移的方向，量出平移的距离.（精确到 1 mm）



（第 3 题）

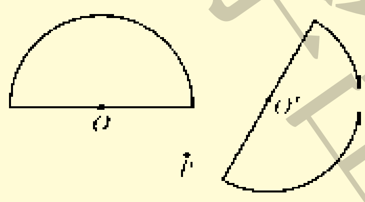
4. 画一个边长为 1 厘米的正方形，然后分别画出将该正方形向北偏东 30°方向平移 2 厘米，以及将该正方形向正东方向平移 2 厘米后的图形.

5. 如图，钟摆的摆动是旋转，图中的旋转中心是哪一点？试用量角器测量旋转角度的大小.（精确到 1°）



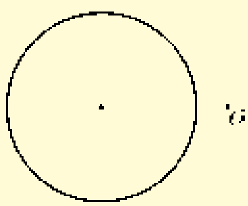
（第 5 题）

6. 如图，半圆 O 绕着点 P 顺时针旋转后成为半圆 O'，试量出旋转角度的大小.（精确到 1°）



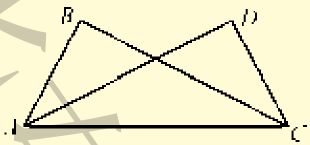
（第 6 题）

7. 如图，已知一个圆和点 O，画一个圆，使它与已知圆关于点 O 成中心对称.

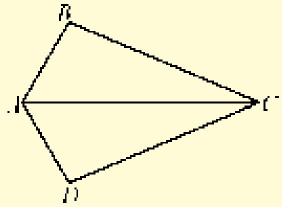


（第 7 题）

8. 如图,已知$\triangle ABC \cong \triangle CDA$,指出它们的对应顶点、对应边和对应角.



(第 8 题)

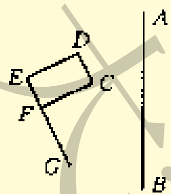


(第 9 题)

9. 如图,已知$\triangle ABC \cong \triangle ADC$,$\angle BAC=60^\circ$,$\angle ACD=23^\circ$,那么$\angle D=$________°.

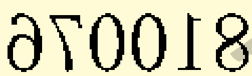
B 组

10. 以 AB 为对称轴,画出图形的对称图形.



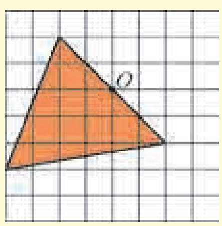
(第 10 题)

11. 从镜中看到的一串数字如图所示,这串数字应为多少?



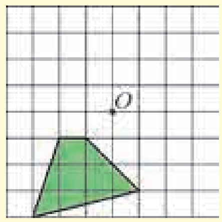
(第 11 题)

12. 画出三角形绕点 O 逆时针旋转 90°后的三角形.



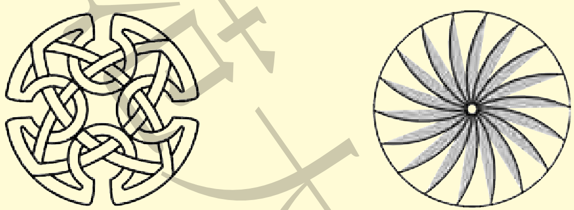
(第 12 题)

13. 如图,不用量角器,将方格纸中的四边形绕着点 O 逆时针方向旋转 $90°$,画出旋转后的四边形.



(第 13 题)

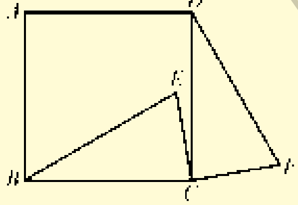
14. 如图所示的两个图形是不是轴对称图形? 如果是,请分别画出对称轴. 这两个图形能不能经过旋转与自身重合? 如果能,分别需要旋转多少度?



(1) (2)

(第 14 题)

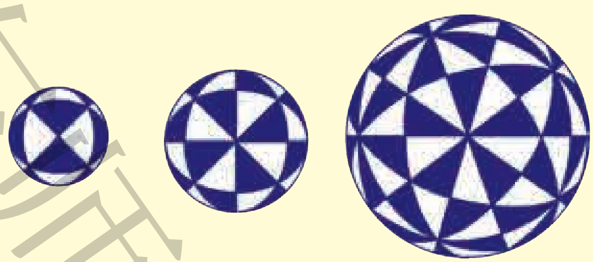
15. 如图,点 E 是正方形 $ABCD$ 内的一点,将 $\triangle BEC$ 绕点 C 顺时针旋转 $90°$ 至 $\triangle DFC$,指出图中的全等图形以及它们的对应顶点、对应边和对应角. 若已知 $\angle EBC = 30°$, $\angle BCE = 80°$,求 $\angle F$ 的度数.



(第 15 题)

C 组

16. 如图是在万花筒里所能看到的一些镜像，观察一下，这都是些什么样的对称图形，你能不能再想象出一两个同样对称和谐的图形？



万花筒里的镜像

（第 16 题）

17. 用硬纸板剪出两个全等的$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，按照下列两种情况将$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$放在桌面上.

（1）

（2）

（第 17 题）

动手试一试，如何通过轴对称、平移与旋转等变换将$\triangle ABC$运动到$\triangle A'B'C'$上，使两者互相重合？与你的伙伴们交流一下，看看谁的方法多.

你还可以随意放置这两个全等的三角形硬纸板，比比看，看谁能较快地通过轴对称、平移与旋转等变换将两者互相重合.

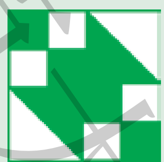
综合与实践

图 案 设 计

我们已经认识了图形的三种基本变换：轴对称、平移和旋转. 利用图形的这三种基本变换，可以设计出各种各样的漂亮图案.

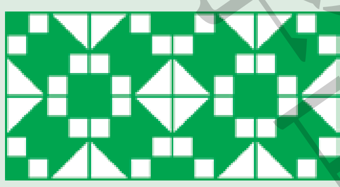
现有如图所示的6 种瓷砖：

1. 请用其中的 4 块瓷砖（允许有相同的），设计出美丽的图案. 例如：

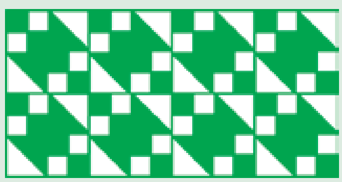


2. 利用你设计的图案，通过轴对称、平移或旋转，设计出更大更美丽的图案. 例如：

（1）通过轴对称得

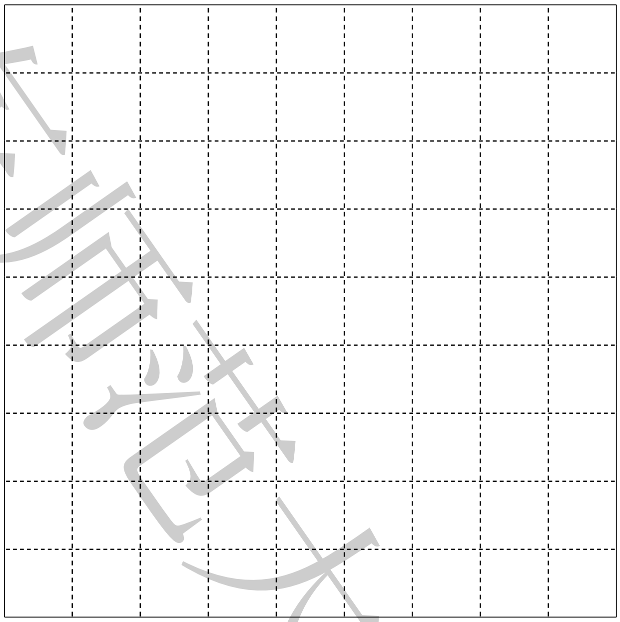


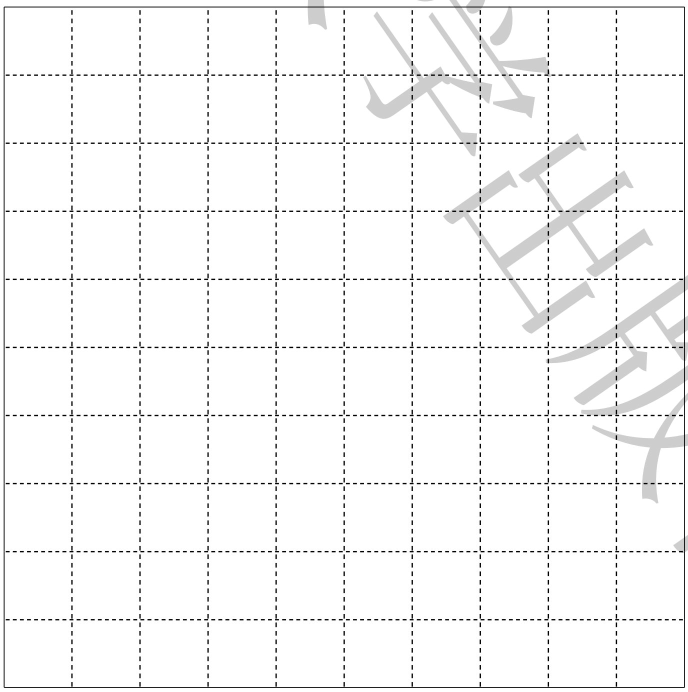
（2）通过平移得



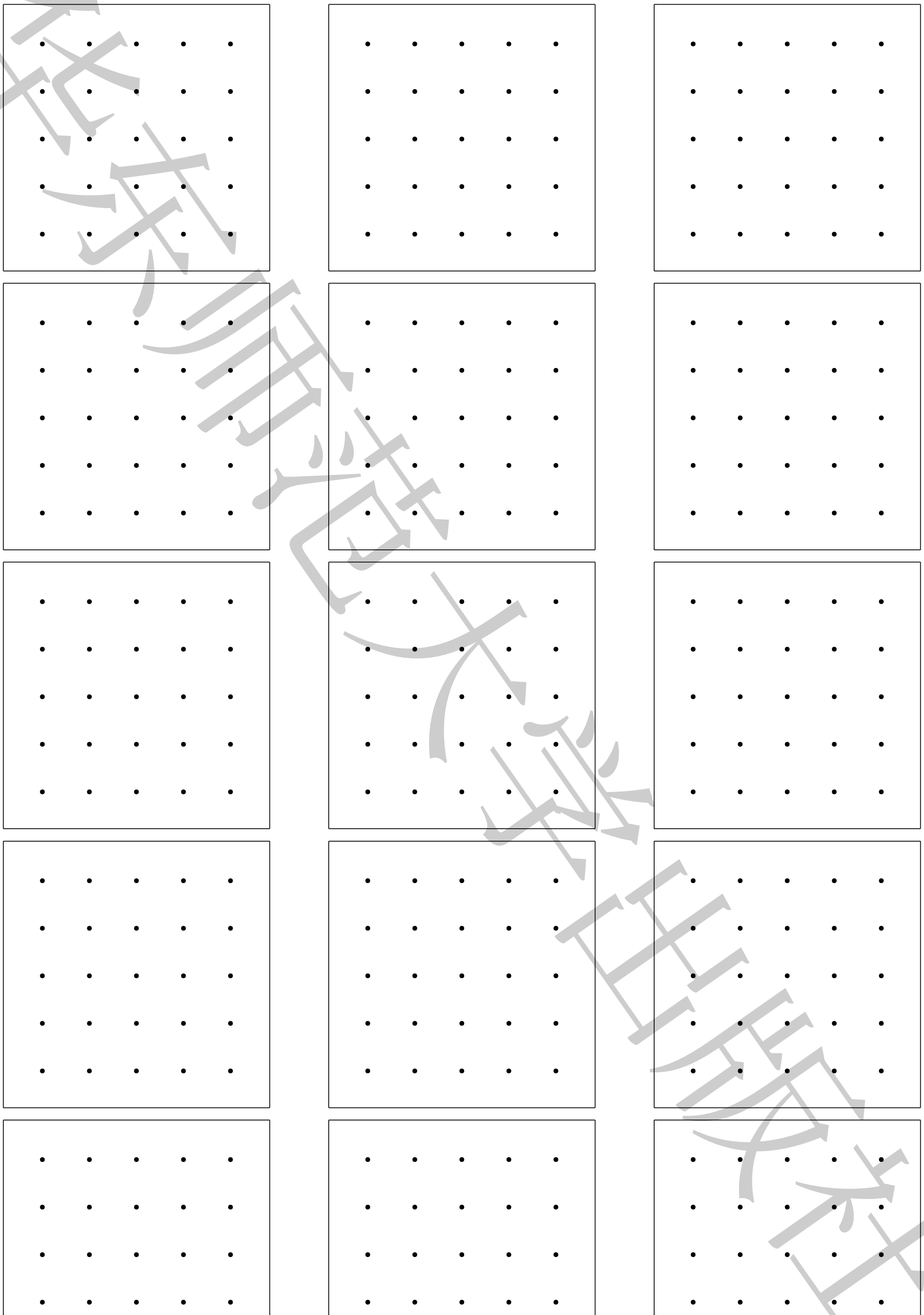
数学实验附图

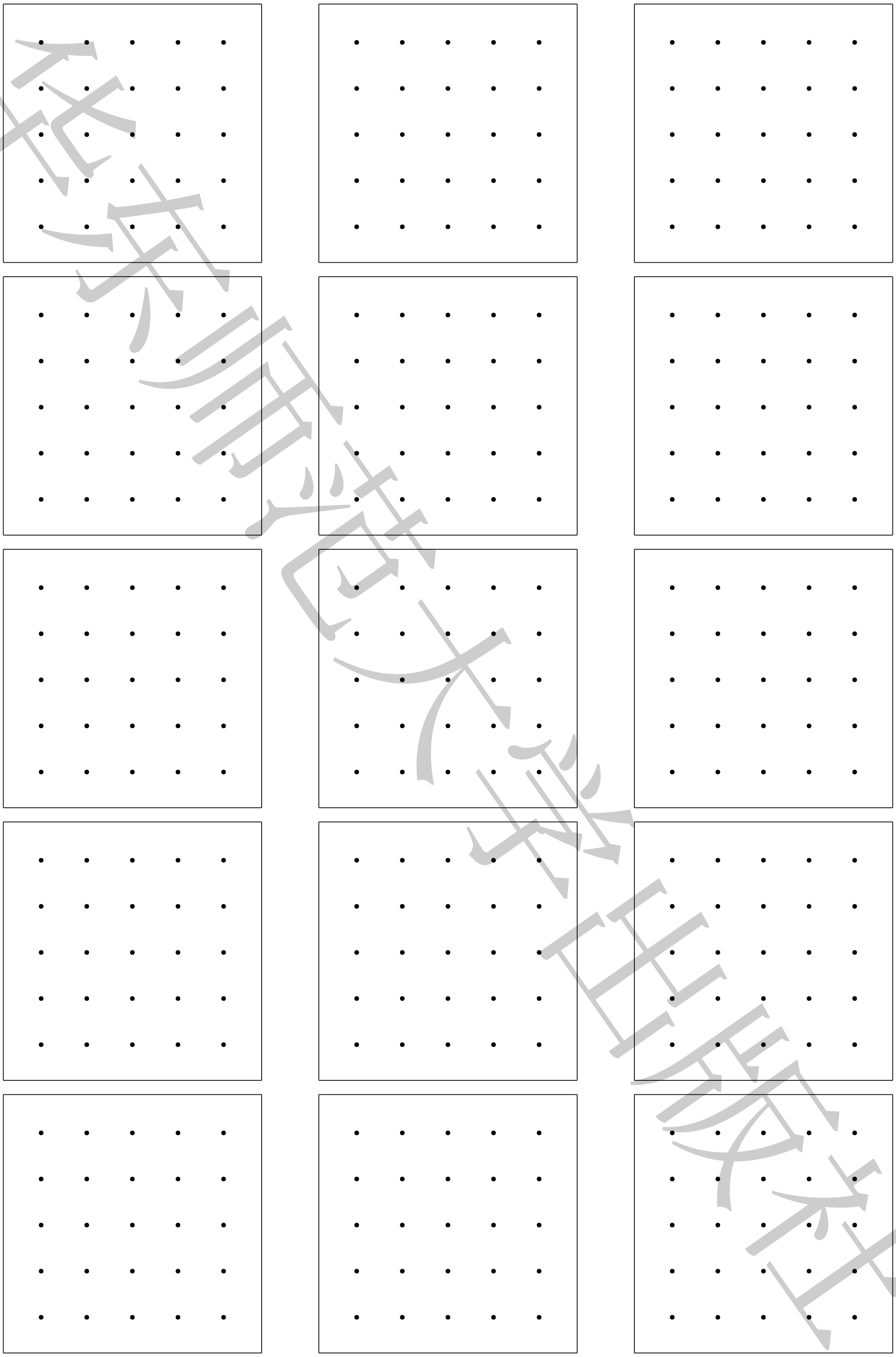
方格图





格点图





后　　记

华东师大版初中数学教材是最早通过教育部审查的新课标初中数学教材之一. 自2001年秋季在7个国家级实验区投入实验以来,已有分布在26个省、市、自治区的地市选用过或正在选用本套教材. 10多年来,实验区的广大师生对本套教材寄予了厚爱,为它的不断完善提出了许多宝贵意见. 根据这些意见,在实验期间,我们对教材进行了多次修改. 在此,我们对多年来给予本套教材关心的各级领导、广大实验区师生和各位同仁表示衷心感谢.

根据教育部的统一部署,在2012年前要完成义务教育阶段所有新课标教材的修订工作. 为了确保本套教材修订工作的顺利进行,在2011年4月至7月间,我们就本套教材的修订广泛征求了第一线教师的意见. 2011年9月在南京召开了“华东师大版初中数学教材修订研讨会”,来自实验区的120多名教研员和骨干教师以及全体编写人员参加了会议. 会议期间就本套教材修订的整体框架达成了广泛共识. 本套教材的修订稿完成后,我们又特邀有关专家和来自第一线的教师进行了审稿. 参与本册教材审稿的有冯国卫、郭奕津等专家和教师.

尽管我们对修订工作倾注了心血,但是现在呈现在广大师生面前的修订教材肯定还存在有待进一步完善的地方. 我们真诚希望广大师生继续关心我们的教材,对我们的教材不断提出新的宝贵意见.

本册教材修订的撰稿人如下(以姓氏笔画为序):

王继延、李文革、吴中才、忻重义、沈加、胡耀华、唐复苏.

编　者