教育部审定
2012

首届全国教材建设奖
全国优秀教材二等奖

义务教育教科书

数学

SHUXUE

七年级　上册

华东师范大学出版社

义务教育教科书

数学

SHUXUE

七年级　上册

主　编　王建磐
副主编　王继延
唐复苏

华东师范大学出版社

义务教育教科书

数　学

七年级　上册

主　　编　王建磐
责任编辑　平　萍
责任校对　王丽平
装帧设计　卢晓红

出　　版　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电　　话　021－60821666　传真 021－60821766
客服电话　021－60821720　60821761

印 刷 者　福建省希望彩印有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　12.25
字　　数　224 千字
版　　次　2012 年 7 月第一版
印　　次　2017 年 7 月福建第十二次
书　　号　ISBN 978－7－5617－9569－9/G・5625
定　　价　11.40 元

出 版 人　王　焰

（如有印装质量问题，请与印刷厂调换或电话 0591－87911211 联系）

致亲爱的同学

亲爱的同学,祝贺你跨进了中学的校门,数学世界欢迎你的到来.

摆在你面前的这本数学书是依据《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》与国家《义务教育数学课程标准(2011 年版)》,为你们提供的初中阶段六册数学教科书中的第一本.

本书将从你所熟悉的情境入手,为你提供丰富有趣的数学知识,并设置一些让你思考和实践的小栏目.结合教材内容,书中还穿插了一些阅读材料,并设置了程度不一的习题供你挑选,还有应用性、探索性和开放性的问题及综合与实践等待着你,相信你的聪明才智会得到充分的发挥.

现在,请你打开这本书,与我们一起进入到奇妙的数学世界,领略一下数学的风采与它的魅力.

首先展现在你面前的是**“走进数学世界”**.你与你的小伙伴一起,将在轻松愉快的气氛中与数学交朋友.你会发现,数学并不神秘,它是那样的有用.

“有理数”将负数融入数的大家庭,建立了和谐的结构和美妙的关系,既保留了传统的优势,又有了新的发展,数的大家庭变得更加绚丽多彩,更加充满活力,这将使我们解决问题更加得心应手.

用字母表示数,从具体的数到一般的代数式,是数学发展的一次飞跃.**“整式的加减”**是这个飞跃的良好开端,它将为我们揭示规律、解决问题提供简捷的工具.进入这个领域,我们将会心旷神怡,阔步前进.

接着,你见到的是一个个直观美妙的图形,**“图形的初步认识”**令你看到大量形状各异的空间图形与平面图形.认识图形大家庭的各个成员,你可以感受到其中的奥秘.

最后,**“相交线与平行线”**让你学会数学说理,解决一些与图形有关的问题,用数学语言表述你的见解.

相信你会喜欢这本书,喜欢数学.

编者

目　录

第 4 章　图形的初步认识

第 1章　走进数学世界

宇宙之大

粒子之微

火箭之速　化工之巧

地球之变

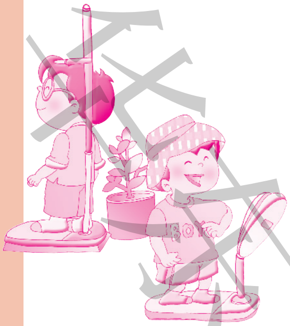
生物之谜

日用之繁

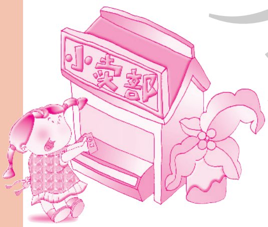
大千世界，天上人间，无处不有数学的贡献.

让我们走进数学世界，去领略一下数学的风采.

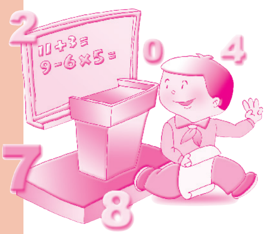
数学伴我们成长



在你呱呱落地降临人世的第一天，医生就要检测一下你的各项健康指标，为你量量身体的长度，称称你的体重，这些都与数和量有关. 人来到世界上的第一天就遇到数学，数学将伴随着你成长.



随着年龄的增长，你随时随地都在接触数学. 你开始在大人的指导下学习数数；学习画三角形、方块和圆；用剪刀剪出各种美丽的图案，或者用纸折出小鸟、小船等各种形状的玩具；到商店去购买你喜欢吃的各种食品……你会逐渐意识到这些都与数、数的运算、数的比较、图形的大小、图形的形状和图形的位置有关.



你进入学校，开始学习数学这门学科，懂得了初步的数学语言，知道了整数和分数，学会了加、减、乘、除；认识了三角形、长方形、正方形、圆、长方体、正方体、圆柱和球等图形；了解了简单的统计知识. 数学知识开阔了你的视野，改变了你的思维方式，使你变得更聪明了.

人类离不开数学

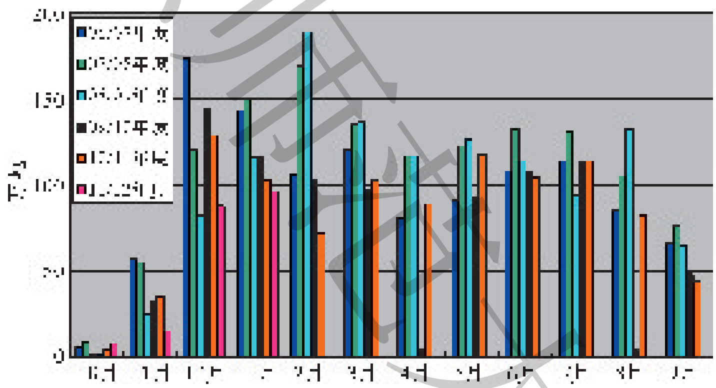
自然界中的数学不胜枚举，如蜜蜂营造的蜂房，它的表面就是由奇妙的数学图形——正六边形构成的. 你知道吗，这种蜂房消耗的材料最少. 这里面竟还有一个关于节约的数学道理呢！

蜜蜂营造的蜂房

人类从蛮荒时代的结绳计数，到如今用电子计算机指挥宇宙飞船航行，任何时候都受到数学的恩惠和影响. 高耸入云的建筑物、海洋石油钻井平台、人造地球卫星等等，都是人类数学智慧的结晶.

上海东方明珠电视塔

随着市场经济的发展，成本、利润、投入、产出、贷款、效益、股份、市场预测、风险评估等一系列经济词汇频繁使用，买卖与批发、存款与保险、股票与债券……几乎每天都会碰到，而这些经济活动无一能离开数学.



2006 年以来全国食糖销售按月统计图

在许多地方，我们常见到如图 1.1 那样图案的地面，它们分别是用同样大小的正方形和正六边形的地砖铺成的. 这样形状的地砖能铺成平整、无空隙的地面.

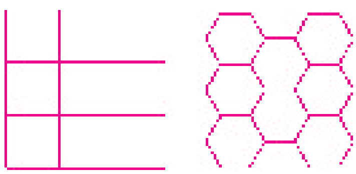


图 1.1

那么除了这两种形状的地砖外，还有哪些形状的地砖能够像图 1.1 那样铺满地面呢？你可以在自己或同学家里，也可以到建材商店观察一下还有哪些地砖（地板）的图案，看看其中图形的形状.

你会发现如图 1.2 所示的各种形状的地砖，它们都能够铺满地面.

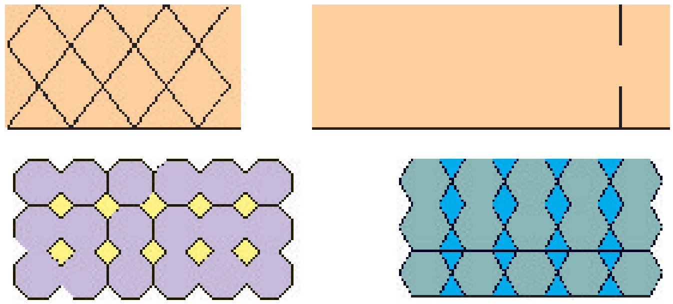


图 1.2

现在让我们走进商场,看看购物中的数学.

某商场平时实行九八折优惠,国庆期间取消九八折优惠,推出如下“有奖销售”活动:

一、有奖销售活动起讫日:2011 年 10 月 1 日起,奖券 10 000 张发完为止.

二、凡累计消费额满 400 元,发奖券壹张.

三、开奖日期:2011 年 10 月 15 日.

四、本活动由天山公证处公证,并请顾客代表参加当天的开奖仪式.

五、奖品设立:

特等奖 2 名,各 2000 元(奖品);

一等奖 10 名,各 800 元(奖品);

二等奖 20 名,各 200 元(奖品);

三等奖 50 名,各 100 元(奖品);

四等奖 200 名,各 50 元(奖品);

五等奖 1000 名,各 20 元(奖品).

中奖率高达 12.82%.

其中的奖品,特别是特等奖太诱人啦!

细心的小王仔细算了一下奖品的总金额:

$$\begin{aligned}&2000\times2+800\times10+200\times20+100\times50+\\&50\times200+20\times1000\\=&51\,000.\end{aligned}$$

它仅占 10 000 张奖券对应的最低销售总额 $400\times10\,000=4\,000\,000$ 的 1.275%,与平时的九八折(商场让利 2%)相差很远.

看来遇到这类“有奖销售”还得多动动脑子才行呢!

人人都能学会数学

数学并不神秘,不是只有天才才能学好数学,只要通过努力,人人都能学会数学.

阅读材料

华罗庚的故事

宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学.

——华罗庚

我国著名的数学家华罗庚说:“聪明在于学习,天才由于积累.”这句话正是他一生的真实写照.

华罗庚,1910 年出生于江苏省金坛县,1924 年毕业于该县公立初级中学. 以后,他又到上海中华职业学校读书,用不到一年半的时间,就读完了两年的课程. 15 岁的时候,华罗庚迫于家境困难而辍学. 返回家乡后,他一面帮助父亲在小杂货店里干活、记账,一面钻研数学.

父亲不愿意让他读书,而是让他干活. 就是在这种生活艰难、无人指导的困境下,在一间斗室里,他以昏暗的油灯为伴,孜孜不倦地坚持自学. 20 岁时,他的一篇论文《苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由》发表在上海《科学》杂志上,显示出了这位 20 岁青年的数学才华. 然而就在同一年,华罗庚患了严重的伤寒病和关节炎. 在与疾病的斗争中,他意志顽强,坚韧不拔,终于战胜了病魔,但他的左腿瘸了. 就是在此期间,他仍然努力钻研数学,接连取得了许多重大的科研成果. 一般人从初中到大学毕业要八年时间,而华罗庚完全依靠自学,只用了六年半的时间. 华罗庚正是凭着这种刻苦钻研的精神,终于成为举世公认的大数学家.

从上面介绍的华罗庚的故事,我们可以看到,学好数学要对数学有兴趣,要有刻苦钻研的精神,要善于发现和提出问题,要善于独立思考.

学好数学还要善于把数学应用于实际问题. 下面让我们试着来解决一个实际问题.

图 1.3 是 6 级台阶侧面的示意图,如果要在台阶上铺地毯,那么至少要买适合台阶宽度的地毯多少米?

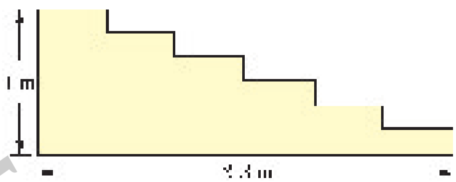


图 1.3

要在台阶上铺地毯,实际上并不需要测出每一级台阶的长度. 我们把图 1.3 想象为由一根绳子围成的图形,将它拉成为一个长和宽分别为 2.8 米和 1 米的长方形. 因此,台阶的总长就是

$$2.8+1=3.8\text{(米)},$$

也就是至少要买适合台阶宽度的地毯 3.8 米.

解题时,善于把所给图形转化成我们熟悉的图形,往往会给问题的解决带来方便.

你知道吗?

去掉一个最高分和一个最低分

在歌手电视大奖赛上,全部评委亮分之后,在计算平均分时,往往要先去掉一个最高分和一个最低分. 你知道这是为什么吗?

大奖赛上,去掉一个最高分和一个最低分的目的,是要略去评委评分中可能出现的异常值,使得一个或两个评委的个人意愿不致影响参赛歌手的总成绩.

我们不妨看一个极端的例子. 某大奖赛有 7 名评委, 他们给甲乙两选手打的分数分别是:

甲:9.55, 9.55, 9.55, 9.55, 9.55, 9.60, 9.90;
乙:9.50, 9.60, 9.60, 9.60, 9.60, 9.60, 9.70.

凭直觉,你认为哪个选手比较好一点?

我们用两种方式来计算一下.

(1) 直接算 7 个分数的平均数.

甲的平均分:$(9.55\times 5+9.60+9.90)\div 7=9.607$;
乙的平均分:$(9.50+9.60\times 5+9.70)\div 7=9.60$.

(2) 去掉一个最高分和一个最低分,计算剩下 5 个分数的平均数.

甲的平均分:$(9.55\times 4+9.60)\div 5=9.56$;
乙的平均分:$(9.60\times 5)\div 5=9.60$.

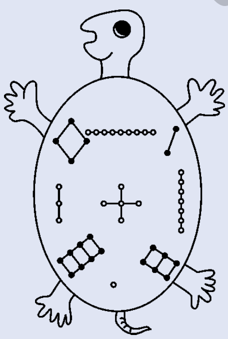
显然,用第二种方式比较符合直觉(乙比较好一些). 由于评委给甲打分时出现极端的最高分(9.90),所以直接计算 7 个分数的平均数会出现偏差,而采用“去掉一个最高分和一个最低分”就可避免这样的偏差,显得较为公平.

现在你对数学的印象如何? 你一定喜欢上它了,并希望它天天陪伴你! 那么继续学习第 2 章吧. 从第 2 章开始,你将在小学的基础上学到更多新的数学知识. 这些新的数学知识一定会给你插上智慧的翅膀,使你在数学世界里能更加自由地翱翔.

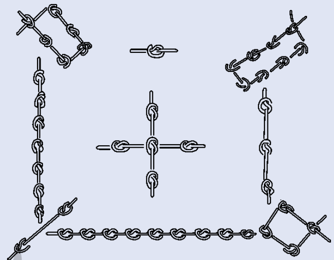
阅读材料

幻　方

传说在很久以前,夏禹治水来到洛水,洛水中浮起一只大乌龟,乌龟背上有一个奇怪的图,图上有许多圈和点. 这些神秘的圈和点表示什么意思呢? 有人好奇地数了一下龟背上的圈数和点数,再用数字表示出来,发现这里面有非常有趣的关系:把龟背上的数填入 3×3 的正方形方格中,不管是把横着的 3 个数相加,还是把竖着的 3 个数相加,或者把斜着的 3 个数相加,其和都等于 15.



4	9	2
3	5	7
8	1	6



洛　书

这就是我们所说的三阶幻方. 而有关幻方的最早记录,是约于公元前 2200 年在我国出现的“洛书”.

构造这样的幻方是一种古老的游戏. 据说在 15 世纪传入欧洲,人们把幻方与占星术的七星——太阳、月亮、金星、木星、水星、火星与土星结合在一起,有的还把幻方刻在银盘上当作避邪符.

对于幻方的研究吸引了众多的数学家与其他爱好者,成为一个广为热衷的课题. 下面的图反映了四阶幻方的构造过程.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$\longrightarrow$

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

第 2章　有理数

某天,沈阳的最低温度是 -2℃,表示零下 2℃,可以读作"负 2 摄氏度". 这里,出现了负数.

我们将会看到,除了表示温度以外,还有许多量需要用负数来表示. 引进了负数,数的家庭将变得更加绚丽多彩,更加便于应用.

本章将研究有理数及其大小比较和运算.

2.1 有理数

1. 正数和负数

你能再举出几对日常生活中具有相反意义的量吗?

某天,沈阳的最低温度是 -2℃,表示零下 2℃;最高温度是 13℃,表示零上 13℃. 零上 13℃ 和零下 2℃ 是具有相反意义的量,我们用正数和负数来表示.

在日常生活中,还有许多具有相反意义的量,都可以用正数或负数来表示. 我们看几个例子:

(1) 汽车向东行驶 3.5 千米或向西行驶 2.5 千米.

如果规定向东为正,那么向西为负. 向东行驶 3.5 千米记作 3.5 千米,向西行驶 2.5 千米记作 -2.5 千米.

先规定某一种意义为正,那么与它相反的意义为负. 负的量用负数表示.

(2) 收入 500 元或支出 237 元.

如果规定收入为正,那么支出为负. 收入 500 元记作 500 元,支出 237 元记作 -237 元.

(3) 水位升高 1.2 米或下降 0.7 米.

如果规定升高为正,那么下降为负. 升高 1.2 米记作 1.2 米,下降 0.7 米记作 -0.7 米.

概括

在以上讨论出现的数中,像 -2、-2.5、-237、-0.7 这样的数是**负数**(negative number),像 13、3.5、500、1.2 这样的数是**正数**(positive number). 正数前面有时也可放上一个“+”(读作“正”)号,如 7 可以写成 $+7$.

+7 和 7 是一样的.

注意

零既不是正数,也不是负数.

读一读

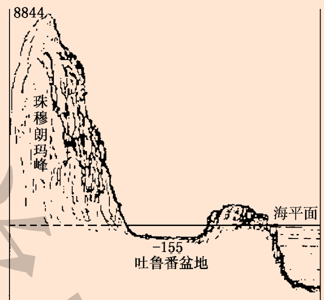
数的产生与发展

我们学过各种各样的数,那么,数是怎样产生并发展起来的呢?

我们知道,为了表示物体的个数或者顺序,产生了整数 1, 2, 3, …;为了表示“没有”,引入了数 0;有时分配、测量的结果不是整数,需要用分数(小数)表示;为了表示具有相反意义的量,我们又引进了负数……总之,数是为了满足生产和生活的需要而产生、发展起来的.

练 习

1. 举出几个具有相反意义的量,并用正数或负数来表示.
2. 在中国地形图上,珠穆朗玛峰和吐鲁番盆地处都标有表明它们高度的数(单位:米),如图所示. 这种数表示海拔高度,它是相对于海平面来说的. 请说出图中所示的数 8844 和 −155 表示的实际意义. 海平面的高度用什么数表示?



(第 2 题)

3. 下列各数中,哪些是正数? 哪些是负数?

   $+6,\ -21,\ 54,\ 0,\ \frac{22}{7},\ -3.14,\ 0.001,\ -999.$

4. “一个数,如果不是正数,必定就是负数.”这句话对不对? 为什么?

2. 有理数

到目前为止,我们所学过的数就可以分为以下几类:

正整数,如 1, 2, 3, …;

零,即 0;

负整数,如 −1, −2, −3, …;

正分数，如$\frac{1}{3}$，$\frac{22}{7}$，4.5（即$4\frac{1}{2}$），…；

负分数，如$-\frac{1}{2}$，$-2\frac{2}{7}$，-0.3（即$-\frac{3}{10}$），….

正整数、零和负整数统称**整数**（integer），正分数和负分数统称**分数**（fraction）.

整数和分数统称**有理数**（rational number）.

读一读

“有理数”的英文名 rational number 中的单词 rational 应看成 ratio（比、比率）的形容词形式. 因此，rational number 应该理解为“比率数”，即可以表示为两个整数之商（比率）的数. 在学习了有理数的除法（第2.10节）之后我们可以看到，这样的解释准确地描述了有理数的本质.

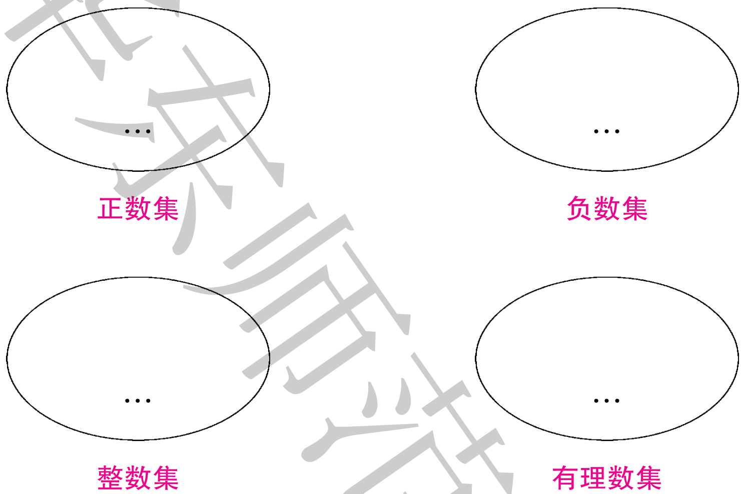
我们可以把已经学过的数作出如下分类：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

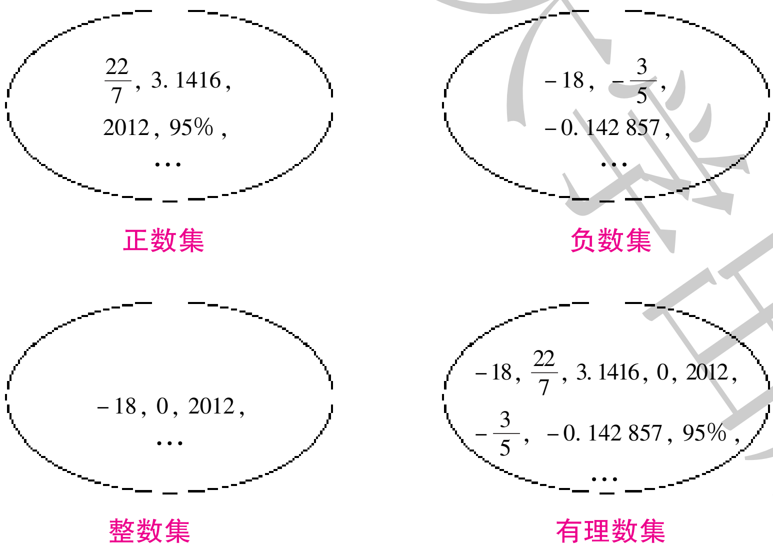
把一些数放在一起，就组成一个数的集合，简称**数集**（set of numbers）. 所有有理数组成的数集叫做有理数集. 类似地，所有整数组成的数集叫做整数集，所有负数组成的数集叫做负数集，所有正整数与零组成的数集叫做非负整数集（即自然数集），如此等等.

例 把下列各数填入表示它所在的数集的圈里：

-18, $\frac{22}{7}$, 3.1416, 0, 2012, $-\frac{3}{5}$, $-0.142\,857$, 95%.



解



练　习

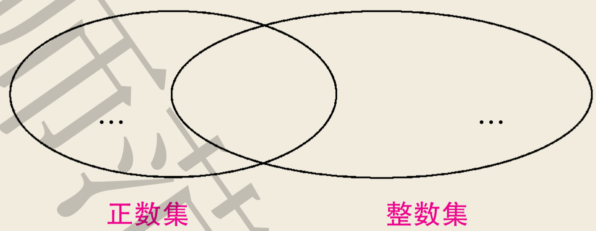
1. 请说出两个正整数，两个负整数，两个正分数，两个负分数. 它们都是有理数吗？
2. 有理数集中有没有这样的数，它既不是正数，也不是负数？若有，请说出这样的数.

习题 2.1

1. 下列各数中,哪些是整数?哪些是分数?哪些是正数?哪些是负数?

$$1,\ -0.10,\ \frac{5}{8},\ -789,\ 325,\ 0,\ -20,\ 10.10,\ 1000.1,\ -5\%.$$

2. 下面两个圈分别表示正数集和整数集,请找出 9 个数填入这两个圈中,使其中每个圈中正好有 6 个数. 你能说出这两个圈的重叠部分表示什么数的集合吗?



(第 2 题)

3. 下面的大括号表示一些数的集合,把第 1、2 两题中的各数填入相应的大括号里:

正整数集:{ …};

负整数集:{ …};

整数集:{ …};

有理数集:{ …};

正有理数集:{ …};

负有理数集:{ …};

自然数集:{ …}.

4. 分别观察下面各题中依次排列的一些数,猜测它们的排列各有什么规律?请按你猜测的规律,接着写出后面的 3 个数. 你能分别说出各题排列的数中第 10 个数、第 100 个数、第 200 个数、第 201 个数是什么吗?

(1) 1, −1, 1, −1, 1, −1, 1, −1, ____, ____, ____, …;

(2) 1, −2, 3, −4, 5, −6, 7, −8, ____, ____, ____, …;

(3) $-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{7},$ ____, ____, ____, ….

2.2 数　轴

1. 数轴

我们在小学学习数学时，就能用直线上依次排列的点来表示自然数，它帮助我们认识了自然数的大小关系.

如图 2.2.1，温度计上有刻度，我们可以方便地读出温度的度数，并且可以区分出是零上还是零下.

> 能不能用直线上的点表示有理数？从温度计上能否得到一点启发呢？

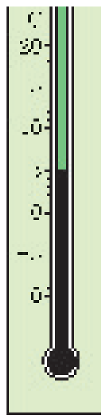


图 2.2.1

与温度计相仿，我们可以在一条直线上规定一个正方向，用这条直线上的点表示正数、零和负数. 具体做法如下：

画一条直线（通常画成水平位置），在这条直线上任取一点作为**原点**（origin），用这点表示数 0. 规定直线上从原点向右为正方向，画上箭头，则相反方向为负方向. 再选取适当的长度作为单位长度，从原点向右，每隔一个单位长度取一点，依次标上 1，2，3，…；从原点向左，每隔一个单位长度取一点，依次标上 −1，−2，−3，…. 如图 2.2.2 所示.

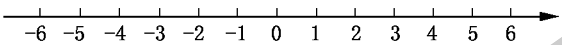


图 2.2.2

概括

像这样规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做**数轴**（number axis）.

在数轴上，除了数 0 用原点表示外，要表示任何一个不为零的有理数，可以先根据这个数的正负号确定它在数轴上原点的哪一边（正数在原点的右边，负数在原点的左边），再在相应的方向上确定它与原点相距几个单

位长度,然后画上相应的点. 例如,在数轴上表示 -4.5,即在原点的左边 4.5 个单位长度处画上相应的点.

例 1 画出数轴,并在数轴上画出表示下列各数的点:

$$4,\ -2,\ -4.5,\ 1\frac{1}{3},\ 0.$$

解 如图 2.2.3 所示.

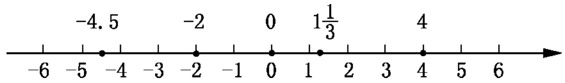
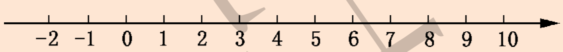
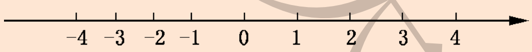


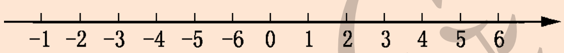
图 2.2.3

练　习

1. 下列各图表示的数轴是否正确? 为什么?

(1)


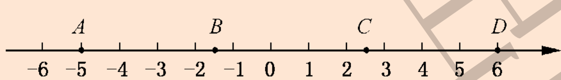
(2)


(3)


2. 在数轴上表示下列各数的点分别位于原点的哪边? 与原点距离多少个单位长度?

$$-3,\ 4.2,\ -1,\ \frac{1}{2}.$$

3. 指出数轴上的点 A、B、C、D 分别表示什么数.



(第 3 题)

4. 先画出数轴,再在数轴上画出表示下列各数的点,最后按数轴上从左到右的顺序,将这些数重新排列:

$$-1.8,\ 0,\ -3.5,\ \frac{10}{3},\ 6\frac{1}{2}.$$

2. 在数轴上比较数的大小

在小学里,我们已经学会比较两个正数的大小,那么,引进负数后,怎样比较两个有理数的大小呢? 例如,1 与 -2 哪个大? -1 与 0 哪个大? -3 与 -4 哪个大?

探索

(1) 任意写出两个正数,在数轴上画出表示它们的点,较大的数与较小的数的对应点的位置有什么关系?

(2) 1℃ 与 -2℃ 哪个温度高? -1℃ 与 0℃ 哪个温度高? -3℃ 与 -4℃ 哪个温度高? 这些关系在温度计上表现为怎样的情形?

把温度计横过来放,就像一条数轴. 从这个事实中,能得到怎样的启发?

概括

在数轴上表示的两个数,右边的数总比左边的数大.

由此容易得到如下大小比较法则:

正数都大于零,负数都小于零,正数都大于负数.

例 2 将下列各数按从小到大的顺序排列,并用"<"号连接起来:

$$3,\ 0,\ 1\frac{5}{6},\ -4.$$

解 容易知道 $1\frac{5}{6}<3$,再由上面的比较法则,得

$$-4<0<1\frac{5}{6}<3.$$

例 3 比较下列各数的大小:

$$-1.3,\ 0.3,\ -3,\ -5.$$

解 将这些数分别在数轴上表示出来,如图 2.2.4.

在数轴上画出表示这些数的点,再比较大小,结果怎样?

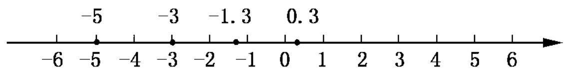


图 2.2.4

可以看出 $-5<-3<-1.3<0.3$.

练　习

1. 判断下列有理数的大小比较是否正确,并说明理由:

(1) $2.9>-3.1$;　　(2) $0<-14$;

(3) $-10>-9$;　　(4) $-5.4<-4.5$.

2. 用“$<$”号或“$>$”号填空:

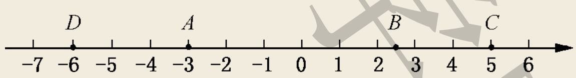
(1) 3.6 ________ 2.5;　　(2) -3 ________ 0;

(3) -16 ________ -1.6;　　(4) $+1$ ________ -10;

(5) -2.1 ________ $+2.1$;　　(6) -9 ________ -7.

习题 2.2

1. 指出数轴上 A、B、C、D 各点所表示的数.

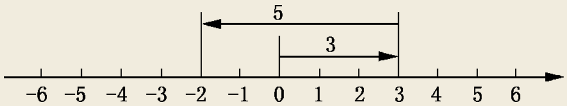


(第 1 题)

2. 画出数轴,并在数轴上画出表示下列各数的点:

(1) $-2.1,\ -3,\ 0.5,\ 4\dfrac{1}{2}$;　　(2) $-50,\ 250,\ 0,\ -400$.

3. 如图,一个点从数轴上的原点开始,先向右移动 3 个单位长度,再向左移动 5 个单位长度. 可以看出,终点表示的数是 -2.



(第 3 题)

已知 A、B 是数轴上的点,请参照上图,完成下列填空:

(1) 如果点 A 表示数 -3,将点 A 向右移动 7 个单位长度,那么终点表示的数是________;

(2) 如果点 A 表示数 3,将点 A 向左移动 7 个单位长度,再向右移动 5 个单位长度,那么终点表示的数是________;

(3) 如果将点 B 向右移动 3 个单位长度,再向左移动 5 个单位长度,终点表示的数是 0,那么点 B 表示的数是________.

4. 在数轴上分别画出表示下列每对数的点,并比较它们的大小:

(1) -8, -6; (2) -5, 0.1; (3) $-\frac{1}{4}$, 0;

(4) -4.2, -5.1; (5) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$; (6) $+\frac{1}{5}$, 0.

5. 画出数轴,把下列各组数分别在数轴上表示出来,并按从小到大的顺序排列,用"<"号连接起来:

(1) 1, -2, 3, -4; (2) $-\frac{1}{3}$, 0, -3, 0.2.

6. 下表是某年 1 月份我国几个城市的平均气温,请将各城市按平均气温从高到低的顺序排列.

北　京	上　海	沈　阳	广　州	济　南
-5.6℃	2.3℃	-16.8℃	16.6℃	-3.2℃

7. 下列各数是否存在? 如果存在,把它们找出来:

(1) 最小的正整数; (2) 最小的负整数;

(3) 最大的负整数; (4) 最小的整数.

2.3 相反数

做一做

在数轴上,画出表示以下两对数的点:

$$-6 \text{ 和 } 6,\ 1.5 \text{ 和 } -1.5.$$

这两对点有什么共同点?

如图 2.3.1,在数轴上,-6 和 6 所对应的点位于原点的两旁,且与原点的距离相等,也就是说,它们相对于原点的位置只有方向不同. 1.5 和 -1.5 所对应的点也是这样.

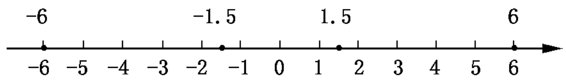


图 2.3.1

容易看出,每对数中的两个数,都只有正负号不同.

概括

像 6 和 -6、1.5 和 -1.5 那样,只有正负号不同的两个数称互为**相反数**(opposite number),也就是说,其中一个数是另一个数的相反数. 这里,6 和 -6 互为相反数,6 是 -6 的相反数,-6 是 6 的相反数.

除零外,数轴上还有没有表示别的数的点,它与原点的距离也等于 0?

在数轴上表示互为相反数的两个点分别位于原点的两旁,且与原点的距离相等.

我们规定:**零的相反数是零**.

例 1 分别写出下列各数的相反数:

$$+5,\ -7,\ -3\frac{1}{2},\ 11.2.$$

解 $+5$ 的相反数是 -5, -7 的相反数是 7, $-3\frac{1}{2}$ 的相反数是 $3\frac{1}{2}$, 11.2 的相反数是 -11.2.

我们通常在一个数的前面添上“$-$”号,表示这个数的相反数. 例如, -4、$+5.5$ 的相反数分别为:

$$-(-4)=4,\ -(+5.5)=-5.5.$$

在一个数的前面添上“$+$”号,仍表示这个数本身. 例如:

$$+(-4)=-4,\ +(+12)=12.$$

例2 化简：

(1) $-(+10)$；

(2) $+(-0.15)$；

(3) $+(+3)$；

(4) $-(-20)$.

解 (1) $-(+10)=-10$.

(2) $+(-0.15)=-0.15$.

(3) $+(+3)=+3=3$.

(4) $-(-20)=20$.

练 习

1. 填空：

(1) 2.5 的相反数是______；

(2) ______是 -100 的相反数；

(3) $-5\frac{1}{5}$是______的相反数；

(4) ______的相反数是 -1.1；

(5) 8.2 和______互为相反数.

2. 化简：

(1) $-(+0.78)$；

(2) $+\left(+9\frac{1}{5}\right)$；

(3) $-(-3.14)$；

(4) $+(-10.1)$.

3. 判断下列语句是否正确，并说明理由：

(1) 正负号相反的两个数叫做互为相反数；

(2) 相反数和我们以前学过的倒数是一样的；

(3) 一个数的相反数的相反数等于这个数.

习题 2.3

1. 分别写出下列各数的相反数：

$$-2.5,\ 1,\ 0,\ 3\frac{1}{2},\ -10.$$

2. 画出数轴，在数轴上表示下列各数及它们的相反数：

$$4\frac{1}{4},\ -2,\ 0,\ -3.75.$$

3. 化简：

(1) $-(-16)$；　(2) $-(+25)$；　(3) $+(-12)$；

(4) $+(+2.1)$；　(5) $-(+33)$；　(6) $-\left(-\frac{1}{10}\right)$.

4. 试回答下列问题：

(1) 什么数的相反数大于它本身？

(2) 什么数的相反数等于它本身？

(3) 什么数的相反数小于它本身？

2.4 绝对值

观察

在一些量的计算中，有时并不注重其方向. 例如，计算汽车行驶所耗的汽油，需要关注的是汽车行驶的路程，而无需关注其行驶的方向.

在讨论数轴上的点与原点的距离时，只需要观察它与原点之间相隔多少个单位长度，而与它位于原点哪一边无关.

我们把在数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做数 a 的**绝对值**(absolute value)，记作 $|a|$.

例如，在数轴上表示 $+5$ 的点与原点的距离是 5，所以 $+5$ 的绝对值是 5，记作 $|+5|=5$；在数轴上表示 -6 的点与原点的距离是 6，所以 -6 的绝对值是 6，记作 $|-6|=6$.

试一试

(1) $|+2|=$____，$\left|\dfrac{1}{5}\right|=$____，$|+8.2|=$____；

(2) $|0|=$____；

(3) $|-3|=$____，$|-0.2|=$____，$|-8.2|=$____.

怎样求一个数的绝对值？从这些结果中你能发现什么规律？

概括

由绝对值的意义，我们可以知道：

1. 一个正数的绝对值是它本身；

2. 零的绝对值是零；

3. 一个负数的绝对值是它的相反数.

绝对值等于它本身的数有哪些？

试一试

你能将上面的结论用数学式子表示吗？

1. 当 $a>0$ 时，$|a|=$________；

2. 当 $a=0$ 时，$|a|=$________；

3. 当 $a<0$ 时，$|a|=$________.

由此可以看出，任何一个有理数的绝对值总是正数或0（通常也称非负数）. 即对任意有理数 a，总有

$$|a|\geqslant 0.$$

例1 求下列各数的绝对值：

$$-\frac{15}{2},\ +\frac{1}{10},\ -4.75,\ 10.5.$$

解

$$\left|-\frac{15}{2}\right|=\frac{15}{2},$$

$$\left|+\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10},$$

$$|-4.75|=4.75,$$

$$|10.5|=10.5.$$

例2 化简：

(1) $\left|-\left(+\frac{1}{2}\right)\right|$；

(2) $-\left|-1\frac{1}{3}\right|$.

解 (1) $\left|-\left(+\frac{1}{2}\right)\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

(2) $-\left|-1\frac{1}{3}\right| = -1\frac{1}{3}$.

练　习

1. 求下列各数的绝对值：

$$-5,\ 4.5,\ -0.5,\ +1,\ 0.$$

2. 填空：

(1) -3 的正负号是______,绝对值是______；

(2) 10.5 的正负号是______,绝对值是______；

(3) 绝对值是 7 的正数是______；

(4) 绝对值是 5.1 的负数是______.

3. 回答下列问题：

(1) 绝对值是 12 的数有几个？是什么？

(2) 绝对值是 0 的数有几个？是什么？

(3) 有没有绝对值是 -3 的数？为什么？

习题 2.4

1. 在数轴上表示下列各数,并分别写出它们的绝对值：

$$-\frac{3}{2},\ 5,\ 0,\ -2,\ 4.2.$$

2. 化简：

(1) $-\left|-\frac{2}{3}\right|$；　　(2) $+|-14|$；

(3) $\left|-\left(+3\frac{1}{2}\right)\right|$；　　(4) $|-(-6.5)|$.

3. 计算：

(1) $|+6|+|-5|$；　　(2) $|-3.3|-|-2.1|$；

(3) $|-4.5|\times|+0.2|$；　　(4) $\left|\frac{3}{2}\right|\div\left|-\frac{2}{3}\right|$.

4. 下列说法是否正确？为什么？

(1) 有理数的绝对值一定是正数；

(2) 如果两个数的绝对值相等，那么这两个数相等；

(3) 如果一个数是正数，那么这个数的绝对值是它本身；

(4) 如果一个数的绝对值是它本身，那么这个数是正数.

2.5 有理数的大小比较

由 2.2 节我们知道：在数轴上表示的两个有理数，右边的数总比左边的数大；正数都大于零，负数都小于零，正数都大于负数.

那么，怎样直接比较两个负数的大小呢？

例如，-3 与 -5 哪个大？ -1.3 与 -3 哪个大？

再找几对负数，在数轴上比较一下.

探索

在 2.2 节的例 3 中，我们在图 2.2.4 所示的数轴上，画出了表示 -3、-5 与 -1.3 的点. 通过观察，得到 $-5<-3$，$-3<-1.3$.

从中你能概括出直接比较两个负数大小的法则吗？说说你的道理.

你能从“怎样比较零度以下两个温度的高低”来解释这个法则吗?

概括

在数轴上,表示两个负数的两个点中,与原点距离较远的那个点在左边,也就是绝对值大的点在左边.所以,**两个负数,绝对值大的反而小.**

例如,比较 $-\dfrac{3}{4}$ 和 $-\dfrac{3}{2}$ 的大小,我们可以分两步进行:

(1)先分别求出它们的绝对值,并比较其大小:

$$\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4},$$

$$\left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2},$$

$$\frac{3}{2}>\frac{3}{4};$$

(2)根据“两个负数,绝对值大的反而小”,得出结论:

$$-\frac{3}{4}>-\frac{3}{2}.$$

例 比较下列各对数的大小:

(1)-1 与 -0.01;　　(2)$-|-2|$ 与 0;

(3)$-\left(-\dfrac{1}{9}\right)$ 与 $-\left|-\dfrac{1}{10}\right|$;　　(4)$-\dfrac{3}{4}$ 与 $-\dfrac{2}{3}$.

解 (1)这是两个负数比较大小,因为

$$|-1|=1,\ |-0.01|=0.01,$$

且

$$1>0.01,$$

所以

$$-1<-0.01.$$

(2)化简 $-|-2|=-2.$

因为负数小于0,所以

$$-|-2|<0.$$

（3）分别化简两数，得

$$-\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9},$$

$$-\left|-\frac{1}{10}\right|=-\frac{1}{10}.$$

因为正数大于负数，所以

$$-\left(-\frac{1}{9}\right)>-\left|-\frac{1}{10}\right|.$$

（4）这是两个负分数比较大小，因为

$$\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}=\frac{9}{12},\quad \left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}=\frac{8}{12},$$

从而 $$\left|-\frac{3}{4}\right|>\left|-\frac{2}{3}\right|,$$

所以 $$-\frac{3}{4}<-\frac{2}{3}.$$

练　习

1. 用“<”号或“>”号填空：

（1）因为 $\left|-\frac{5}{3}\right|$ ________ $\left|-\frac{3}{5}\right|$，所以 $-\frac{5}{3}$ ________ $-\frac{3}{5}$；

（2）因为 $|-10|$ ________ $|-100|$，所以 -10 ________ -100.

2. 判断下列大小比较是否正确：

（1）$|-0.23|<|-0.32|$；

（2）$|-3|<|+3|$；

（3）$\left|+\frac{1}{7}\right|>\left|-\frac{1}{6}\right|$；

（4）$\left|-\frac{1}{2}\right|<\left|-\frac{1}{3}\right|$.

3. 比较下列各对数的大小：

（1）$-\frac{3}{4}$ 与 $-\frac{4}{5}$；

（2）$-\frac{5}{8}$ 与 -0.618.

4. 回答下列问题：

（1）大于 -4 的负整数有哪几个？

（2）小于 4 的正整数有哪几个？

（3）大于 -4 且小于 4 的整数有哪几个？

习题 2.5

1. 比较下列各对数的大小：

(1) -9.1 与 -9.099；　　(2) -8 与 $|-8|$；

(3) $-\frac{5}{6}$ 与 $-\frac{7}{8}$；　　(4) $-|-3.2|$ 与 $-(+3.2)$.

2. 将下列各数按从小到大的顺序排列，并用“$<$”号连接起来：

$$0,\ -3.14,\ -\frac{22}{7},\ 2.7,\ -4,\ 0.14.$$

3. 写出绝对值小于 5 的所有整数，并在数轴上表示出来.

4. 回答下列问题：

(1) 有没有最小的正数？有没有最大的负数？为什么？

(2) 有没有绝对值最小的有理数？若有，请把它写出来.

2.6 有理数的加法

1. 有理数的加法法则

问题

小明在一条东西向的跑道上，先走了 20 米，又走了 30 米，能否确定他现在位于原来位置的哪个方向，与原来位置相距多少米？

我们知道，求两次运动的总结果，可以用加法来解答. 可是上述问题不能得到确定的答案，因为小明最后的位置与行走方向有关.

试验

我们必须把这一问题说得明确些. 不妨规定向东为正,向西为负.

(1) 若两次都是向东走,很明显,一共向东走了 50 米. 写成算式是

$$(+20)+(+30)=+50,$$

即小明位于原来位置的东边 50 米处.

这一运算过程在数轴上可表示为图 2.6.1.

图 2.6.1

(2) 若两次都是向西走,则小明现在位于原来位置的西边 50 米处. 写成算式是

$$(-20)+(-30)=-50.$$

还有哪些可能情形? 你能把问题补充完整吗?

(3) 若第一次向东走 20 米,第二次向西走 30 米,在数轴上(图 2.6.2),我们可以看到,小明位于原来位置的西边 10 米处.

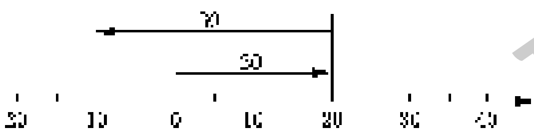


图 2.6.2

写成算式是

$$(+20)+(-30)=-10.$$

(4) 若第一次向西走 20 米,第二次向东走 30 米,则小明位于原来位置的(　　　　)边(　　　　)米处. 写成算式是

$$(-20)+(+30)=(\qquad).$$

试一试, 画出数轴, 在括号内填上答案.

后两种情形中两个加数的正负号不同(通常可称异号),让我们再试几次(下列算式中各个加数的正负号和绝对值仍分别表示运动的方向和路程):

$$(+4)+(-3)=(\qquad\qquad),$$
$$(+3)+(-10)=(\qquad\qquad),$$
$$(-5)+(+7)=(\qquad\qquad),$$
$$(-6)+2=(\qquad\qquad).$$

还有两种特殊情形:

(5) 第一次向西走了 30 米,第二次向东走了 30 米. 写成算式是

$$(-30)+(+30)=(\qquad\qquad).$$

(6) 第一次向西走了 30 米,第二次没走. 写成算式是

$$(-30)+0=(\qquad\qquad).$$

探索

从上述(1)~(6)所写出的算式中,你能总结出一些规律吗?

概括

综合以上情形,有如下**有理数加法法则**:

1. 同号两数相加,取与加数相同的正负号,并把绝对值相加;

2. 绝对值不相等的异号两数相加,取绝对值较大的加数的正负号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值;

3. 互为相反数的两个数相加得零;

4. 一个数与零相加,仍得这个数.

这里从运算角度反映了相反数的一个特性.

注意

一个有理数由正负号和绝对值两部分组成,进行加法运算时,应注意确定和的正负号及绝对值.

例 1 计算：

(1) $(+2)+(-11)$；　　(2) $(-12)+(+12)$；

(3) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{2}{3}\right)$；　　(4) $(-3.4)+4.3$.

解 (1) $(+2)+(-11)=-(11-2)=-9$.

(2) $(-12)+(+12)=0$.

(3) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\right)=-1\dfrac{1}{6}$.

(4) $(-3.4)+4.3=+(4.3-3.4)=0.9$.

试说出每一小题计算的依据.

练　习

1. 填表：

加　数	加　数	和的组成		和
		正负号	绝对值	
-12	3	$-$	$12-3$	-9
18	8			
-9	16			
-9	-5			

2. 计算：

(1) $10+(-4)$；　　(2) $(+9)+7$；

(3) $(-15)+(-32)$；　　(4) $(-9)+0$；

(5) $100+(-100)$；　　(6) $(-0.5)+4.4$；

(7) $(-1.5)+(1.25)$；　　(8) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{1}{6}\right)$.

3. 填空：

(1) $(\quad)+(-3)=-8$；　　(2) $(\quad)+(-3)=8$；

(3) $(-3)+(\quad)=-1$；　　(4) $(-3)+(\quad)=0$.

4. 回答下列问题：

(1) 两个正数相加，和是否一定大于每个加数？

(2) 两个有理数相加，和是否一定大于每个加数？

2. 有理数加法的运算律

在小学里我们知道,数的加法满足交换律,例如

$$5+3.5=3.5+5;$$

还满足结合律,例如

$$(5+3.5)+2.5=5+(3.5+2.5).$$

引进了负数以后,这些运算律是否还成立呢?也就是说,上面两个等式中,将 5、3.5 和 2.5 换成任意的有理数,是否仍然成立呢?

探索

(1) 任意选择两个有理数(至少有一个是负数),分别填入下列□和○内,并比较两个运算结果:

$$\square+\bigcirc \text{ 和 } \bigcirc+\square;$$

(2) 任意选择三个有理数(至少有一个是负数),分别填入下列□、○和◇内,并比较两个运算结果:

$$(\square+\bigcirc)+\Diamond \text{ 和 } \square+(\bigcirc+\Diamond).$$

你能发现什么?

概括

有理数的加法仍满足交换律和结合律.

加法交换律:两个数相加,交换加数的位置,和不变.

$$a+b=b+a.$$

加法结合律:三个数相加,先把前两个数相加,或者先把后两个数相加,和不变.

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

这样，多个有理数相加，可以任意交换加数的位置，也可以先把其中的几个数相加，使计算简化.

例2 计算：

(1) $(+26)+(-18)+5+(-16)$；

(2) $(-1.75)+1.5+(+7.3)+(-2.25)+(-8.5)$.

这样的"交换"、"结合"给计算带来了什么方便？

解 (1)
$$\begin{aligned}&(+26)+(-18)+5+(-16)\\=&(26+5)+[(-18)+(-16)]\\=&31+(-34)\\=&-(34-31)\\=&-3.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(-1.75)+1.5+(+7.3)+(-2.25)+(-8.5)\\=&[(-1.75)+(-2.25)]+[1.5+(-8.5)]+7.3\\=&(-4)+(-7)+7.3\\=&(-4)+[(-7)+7.3]\\=&(-4)+0.3\\=&-3.7.\end{aligned}$$

例3 10筐苹果，以每筐30千克为基准，超过的千克数记作正数，不足的千克数记作负数，记录如下：

$$2,\ -4,\ 2.5,\ 3,\ -0.5,\ 1.5,\ 3,\ -1,\ 0,\ -2.5.$$

问这10筐苹果总共重多少？

解
$$\begin{aligned}&2+(-4)+2.5+3+(-0.5)+1.5+3+\\&(-1)+0+(-2.5)\\=&(2+3+3)+(-4)+[2.5+(-2.5)]+\\&[(-0.5)+(-1)+1.5]\\=&8+(-4)=4.\end{aligned}$$

$30\times10+4=304$(千克).

答：这10筐苹果总共重304千克.

回顾例2、例3的解答，思考：将怎样的加数结合在一起，可使运算简便？

练　习

1. 计算：

(1) $(-7)+(+10)+(-11)+(-2)$；

(2) $2+(-3)+(+4)+(-5)+6$；

(3) $(-9.6)+1.5+(-0.4)+(-0.3)+8.5$.

2. 某天早晨的气温是 -3℃，到中午升高了 5℃，晚上又降低了 3℃，到午夜又降低了 4℃. 求午夜时的温度.（提示：降低了 3℃ 就是升高了 -3℃）

习题 2.6

1. 计算：

(1) $(-12)+(+3)$；

(2) $(+15)+(-4)$；

(3) $(-16)+(-8)$；

(4) $(+23)+(+24)$；

(5) $(-102)+(+102)$；

(6) $(-32)+(-11)$；

(7) $(-35)+0$；

(8) $78+(-85)$.

2. 计算：

(1) $(-0.9)+(+1.5)$；

(2) $(+6.5)+3.7$；

(3) $1.5+(-8.5)$；

(4) $(-4.1)+(-1.9)$；

(5) $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)$；

(6) $(-4.2)+4.25$.

3. 计算：

(1) $(+14)+(-4)+(-2)+(+26)+(-3)$；

(2) $(-83)+(+26)+(-41)+(+15)$；

(3) $(-1.8)+(+0.7)+(-0.9)+1.3+(-0.2)$；

(4) $\frac{1}{4}+\left(-3\frac{1}{3}\right)+\left(+4\frac{3}{4}\right)+\left(-6\frac{2}{3}\right)$.

4. 列式并计算：

(1) $+1.2$ 与 -3.1 的绝对值的和；

(2) $4\frac{2}{3}$ 与 $-\frac{1}{3}$ 的和的相反数.

5. 利用有理数加法解下列各题：

（1）仓库内原存某种原料 3500 千克，一周内存入和领出情况如下（存入为正，单位：千克）：

$$1500,\ -300,\ -650,\ 600,\ -1800,\ -250,\ -200.$$

问第七天末仓库内还存有这种原料多少千克？

（2）某公路养护小组乘车沿南北向公路巡视维护. 某天早晨从 A 地出发，晚上最后到达 B 地. 约定向北为正方向，当天的行驶记录如下（单位：千米）：

$$+18,\ -9,\ +7,\ -14,\ -6,\ +13,\ -6,\ -8.$$

试问 B 地在 A 地的哪个方向？它们相距多少千米？如果汽车行驶每千米耗油 a 升，那么该天共耗油多少升？

2.7 有理数的减法

做一做

珠穆朗玛峰和吐鲁番盆地的海拔高度分别是 8844 米和 −155 米，你知道珠穆朗玛峰比吐鲁番盆地高多少吗？

这一问题通常可列出算式

$$8844-(-155).$$

那么，怎样进行有理数的减法呢？我们不妨先看一个简单的问题：

计算：

$$(-8)-(-3).$$

根据减法的意义，这就是要求一个数“？”，使

$$(\ ?\ )+(-3)=-8.$$

这样做减法太繁了，能不能找出一个法则直接进行计算?

根据有理数的加法运算，有

$$(-5)+(-3)=-8,$$

所以 $$(-8)-(-3)=-5. \qquad ①$$

试一试

填空： $(-8)+(\quad)=-5.$

容易得到 $(-8)+(+3)=-5.$ ②

再举一组数试一试，你能发现什么规律?

比较①、②两式，我们发现：-8“减去 -3”与“加上 $+3$”的结果是相同的，即

$$(-8)-(-3)=(-8)+(+3).$$

概括

从上述结果我们可以发现：

减去一个数，等于加上这个数的相反数.

这就是**有理数减法法则**.

你能从本节开头“做一做”的问题，来解释这个法则吗?

例 计算：

(1) $(-32)-(+5)$； (2) $7.3-(-6.8)$；

(3) $(-2)-(-25)$； (4) $12-21$.

解

减号变加号

(1) $(-32)-(+5)=(-32)+(-5)=-37.$

减数变相反数

减号变加号

(2) $7.3-(-6.8)=7.3+6.8=14.1.$

减数变相反数

(3) $(-2)-(-25)=(-2)+25=23$.

(4) $12-21=12+(-21)=-9$.

注意：两处必须同时改变符号.

练　习

1. 在下列括号内填上适当的数:

(1) $(-2)-(-3)=(-2)+(\quad)$;

(2) $0-(-4)=0+(\quad)$;

(3) $(-6)-3=(-6)+(\quad)$;

(4) $1-(+39)=1+(\quad)$.

2. 计算:

(1) $(+3)-(-2)$;

(2) $(-1)-(+2)$;

(3) $0-(-3)$;

(4) $1-5$;

(5) $(-23.6)-(-12.4)$;

(6) $\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)$.

3. 填空:

(1) 温度 3℃ 比 -8℃ 高______℃;

(2) 温度 -9℃ 比 -1℃ 低______℃;

(3) 海拔 -20 m 比 -30 m 高______m;

(4) 从海拔 22 m 到 -10 m, 下降了______m.

习题 2.7

1. 计算:

(1) $(-14)-(+15)$;

(2) $(-14)-(-16)$;

(3) $(+12)-(-9)$;

(4) $12-(+17)$;

(5) $0-(+52)$;

(6) $108-(-11)$.

2. 计算:

(1) $4.8-(+2.3)$;

(2) $(-1.24)-(+4.76)$;

(3) $(-3.28)-1$;

(4) $2-\left(-3\frac{1}{2}\right)$.

3. 计算:

(1) $[(-4)-(+7)]-(-5)$;

(2) $3-[(-3)-12]$;

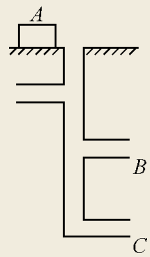
(3) $8-(9-10)$;

(4) $(3-5)-(6-10)$.

4. 下表是某地连续5天内每天的最高气温与最低气温记录，在这5天中，哪天的温差(最高气温与最低气温的差)最大？哪天的温差最小？

	一	二	三	四	五
最高气温(℃)	-1	5	6	8	11
最低气温(℃)	-7	-3	-4	-1	2

5. 如图为某一矿井的示意图：以地面为准，点 A 的高度是 $+4.2$ 米，B、C 两点的高度分别是 -15.6 米与 -30.5 米. 点 A 比点 B 高多少米？比点 C 呢？



(第5题)

6. 求出下列每对数在数轴上的对应点之间的距离：

(1) 3 与 -2.2；　　(2) 4.75 与 2.25；

(3) -4 与 -4.5；　　(4) $-3\frac{2}{3}$ 与 $2\frac{1}{3}$.

你能发现所得的距离与这两数的差有什么关系吗？

2.8 有理数的加减混合运算

1. 加减法统一成加法

算式 $(-8)-(-10)+(-6)-(+4)$，是有理数的加减混合运算，可以按照运算顺序，从左到右逐步计算. 也可以用有理数减法法则，把它改写成 $(-8)+(+10)+(-6)+(-4)$，统一为只有加法运算的和式.

在一个和式里，通常把各个加数的括号和它前面的加号省略不写. 如上式可写成省略加号的和的形式：

$$-8+10-6-4.$$

这个式子仍可看作和式，读作“负8、正10、负6、负4的和”. 从运算意义看，上式也可读作“负8加10减6减4”.

例1 把 $\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)-\left(+\frac{1}{5}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)-(+1)$ 写成省略加号的和的形式,并把它读出来.

解
$$\begin{aligned}&\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)-\left(+\frac{1}{5}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)-(+1)\\=&\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)+(-1)\\=&\frac{2}{3}-\frac{4}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-1.\end{aligned}$$

和式中第一个加数若是正数,正号也可以省略不写.

读作"$\frac{2}{3}$、$-\frac{4}{5}$、$-\frac{1}{5}$、$\frac{1}{3}$、-1 的和",也可读作"$\frac{2}{3}$减$\frac{4}{5}$减$\frac{1}{5}$加$\frac{1}{3}$减 1".

练 习

1. 把下列各式写成省略加号的和的形式,并说出它们的两种读法:

(1) $(-12)-(+8)+(-6)-(-5)$;

(2) $(+3.7)-(-2.1)-1.8+(-2.6)$.

2. 按运算顺序直接计算:

(1) $(-16)+(+20)-(+10)-(-11)$;

(2) $\left(+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(+\frac{1}{6}\right)$.

2. 加法运算律在加减混合运算中的应用

联想

因为有理数的加减法可以统一成加法,所以在进行有理数加减混合运算时,可以适当应用加法运算律,简化计算.

例2 计算:

(1) $-24+3.2-16-3.5+0.3$;

(2) $0-21\frac{2}{3}+\left(+3\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{1}{4}\right)$.

解 (1) 因为原式表示 -24、3.2、-16、-3.5、0.3 的和，所以可将加数适当交换位置，并作适当的结合进行计算，即

这样做有什么好处？你还有其他解法吗？

$$
\begin{aligned}
&-24+3.2-16-3.5+0.3\\
=&(-24-16)+(3.2+0.3)-3.5\\
=&-40+(3.5-3.5)\\
=&-40+0\\
=&-40.
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
&0-21\frac{2}{3}+\left(+3\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{1}{4}\right)\\
=&0-21\frac{2}{3}+\left(+3\frac{1}{4}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)\\
=&-21\frac{2}{3}+3\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\\
=&\left(-21\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(3\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\\
=&-21+3=-18.
\end{aligned}
$$

练　习

1. 下列变形是否正确？如果不正确，错在哪里？

(1) $1-4+5-4=1-4+4-5$;

(2) $1-2+3-4=2-1+4-3$;

(3) $4.5-1.7-2.5+1.8=4.5-2.5+1.8-1.7$;

(4) $-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$.

2. 计算：

(1) $0-1+2-3+4-5$;

(2) $-4.2+5.7-8.4+10.2$;

(3) $-30-11-(-10)+(-12)+18$;

(4) $3\frac{1}{2}-\left(-2\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}-\left(+\frac{1}{6}\right)$.

习题 2.8

1. 计算：

(1) $(-7)-(-10)+(-8)-(+2)$；

(2) $1+\left(-1\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{1}{4}\right)$；

(3) $\left(+\frac{1}{2}\right)-\left[(-2)+\left(+\frac{1}{2}\right)\right]$；

(4) $(-1.2)+[1-(-0.3)]$.

2. 将下列各式写成省略加号的和的形式，并按要求交换加数的位置：

(1) $(+16)+(-29)-(-7)-(+11)+(+9)$；

（使正负号相同的加数结合在一起）

(2) $(-3.1)-(-4.5)+(+4.4)-(+1.3)+(-2.5)$；

（使和为整数的加数结合在一起）

(3) $\left(+1\frac{1}{2}\right)-(+5)+\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(-5\frac{2}{3}\right)$；

（使分母相同或便于通分的加数结合在一起）

(4) $(-2.4)-(-4.7)-(+0.5)+(+3.4)+(-3.5)$.

（使计算简便）

3. 计算：

(1) $-3-4+19-11+2$；

(2) $10-24-15+26-42+18$；

(3) $-4.2+5.7-7.6+10.1-5.5$；

(4) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$；

(5) $(-52)+(-19)-(+37)-(-24)$；

(6) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-3\frac{1}{4}\right)+\left(+2\frac{3}{4}\right)-\left(+5\frac{1}{2}\right)$.

4. 计算：

(1) $13-[26-(-21)+(-18)]$；

(2) $[1.4-(-3.6+5.2)-4.3]-(-1.5)$；

(3) $\left|-2\frac{1}{4}\right|-\left(-\frac{3}{4}\right)+1-\left|1-\frac{1}{2}\right|$.

5. 列式并计算：

（1）什么数与 $-\frac{5}{12}$ 的和等于 -1？

（2）-1 减去 $-\frac{5}{6}$ 与 $\frac{1}{6}$ 的和，所得的差是多少？

（3）-4、5、-7 这三个数的和比这三个数的绝对值的和小多少？

（4）求 1，-2，3，-4，…，99，-100 这 100 个整数的和.

阅读材料

中国人最早使用负数

——《九章算术》和我国古代的“正负术”

《九章算术》是中国古代数学最重要的经典著作之一. 这部著作的成书年代，根据现在的考证，最迟在公元 1 世纪，但其中有些数学内容，可以追溯到周代（公元前 11 世纪至公元前 3 世纪）.《九章算术》采用问题集的形式，全书共有 246 个问题，分成方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股等九章，其中所包含的数学成就是十分丰富的.

引进和使用负数是《九章算术》的一项突出贡献. 在《九章算术》的“方程术”中，当用遍乘直除算法消元（即用加减消元法解一次方程组）时，可能出现减数大于被减数的情形，为此，就需要引进负数.《九章算术》在方程一章中提出了如下的“正负术”：

同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之.

其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之.

这实际上就是正负数和零的加减运算法则. “同名”、“异名”分别指同号、异号；“相益”、“相除”分别指两数的绝对值相加、相减.

前四句说的是正数、负数和零的减法法则，翻译成现在的语言，就是：同号两数相减，将绝对值相减（得到差的绝对值）；异号两数相减，将绝对值相加（得到差的绝对值）；零减去正数得到（与它相反的）负数，零减去负数得到（与它相反的）正数.

后四句说的就是正数、负数和零的加法法则. 你能把它翻译成现在的语言吗?

不难看出,这与我们所学的有理数加减法法则是完全一致的.

《九章算术》以后,魏晋时期的数学家刘徽对负数的出现作了很自然的解释:“两算得失相反,要令正负以名之”,并主张在筹算中用红筹代表正数,黑筹代表负数.

在国外,负数的出现和使用要比我国迟好几百年,直到 7 世纪时印度数学家才开始使用负数. 而在欧洲,直到 16 世纪,韦达(F. Viète, 1540－1603)的著作还拒绝使用负数.

2.9 有理数的乘法

1. 有理数的乘法法则

问题 1

一只小虫沿一条东西向的路线,以每分钟 3 米的速度向东爬行 2 分钟,那么它现在位于原来位置的哪个方向? 相距多少米?

我们知道,这个问题可以用乘法来解答:

$$3\times2=6,$$

即小虫位于原来位置的东边 6 米处.

能用数轴表示这一事实吗? 动手画一画.

注意:这里我们规定向东为正,向西为负.

如果上述问题变为:

问题 2

小虫向西以每分钟 3 米的速度爬行 2 分钟，那么结果有何变化？

> 再用数轴表示一下 $(-3)\times 2=-6.$

这时小虫位于原来位置的西边 6 米处. 写成算式就是：

$$(-3)\times 2=-6.$$

比较问题 1、问题 2 中的两个算式，你有什么发现？

当我们把“$3\times 2=6$”中的一个因数“3”换成它的相反数“-3”时，所得的积是原来的积“6”的相反数“-6”. 一般地，我们有：

两数相乘，若把一个因数换成它的相反数，则所得的积是原来的积的相反数.

试一试

$3\times(-2)=?$

与 $3\times 2=6$ 相比较，这里把一个因数“2”换成了它的相反数“-2”，所得的积应是原来的积“6”的相反数“-6”，即

$$3\times(-2)=-6.$$

> 把它与 $3\times(-2)=-6$ 对比，结果怎样？

再试一试：$(-3)\times(-2)=?$

把它与 $(-3)\times 2=-6$ 对比，这里把一个因数“2”换成了它的相反数“-2”，所得的积应是原来的积“-6”的相反数“6”，即

$$(-3)\times(-2)=6.$$

> 如何确定两数积的正负号和绝对值？从以上得出的几个算式中，你能发现什么规律？

此外，两数相乘时，如果有一个因数是 0，那么所得的积也是 0. 例如，$(-3)\times 0=0$，$0\times(-2)=0$.

概括

综合以上各种情况，有如下**有理数乘法法则**：

两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘；

任何数与零相乘，都得零.

例如：

$(-5)\times(-3)$ 同号两数相乘

$(-5)\times(-3)=+(\quad)$ 得正

$5\times3=15$ 把绝对值相乘

所以 $(-5)\times(-3)=15.$

再如：

$(-6)\times4$ 异号两数相乘

$(-6)\times4=-(\quad)$ 得负

$6\times4=24$ 把绝对值相乘

所以 $(-6)\times4=-24.$

例 1 计算：

(1) $(-5)\times(-6)$； (2) $\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{4}$.

解 (1) $(-5)\times(-6)=30.$

(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$.

练 习

1. 确定下列各积的正负号：

(1) $5\times(-3)$； (2) $(-3)\times3$；

(3) $(-2)\times(-7)$； (4) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$.

2. 计算：

(1) $3\times(-4)$； (2) $2\times(-6)$；

(3) $(-6)\times2$； (4) $6\times(-2)$；

(5) $(-6)\times 0$；　(6) $0\times(-6)$；

(7) $(-4)\times 0.25$；　(8) $(-0.5)\times(-8)$；

(9) $\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)$；　(10) $(-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$.

3. 计算：

(1) $3\times(-1)$；　(2) $(-5)\times(-1)$；

(3) $\frac{1}{4}\times(-1)$；　(4) $0\times(-1)$；

(5) $(-6)\times 1$；　(6) 2×1；

(7) 0×1；　(8) $1\times(-1)$.

想一想

做完第3题，你能发现什么规律？一个数与(-1)相乘，积是什么？一个数与1相乘呢？

2. 有理数乘法的运算律

在小学里我们知道，数的乘法满足交换律，例如

$$3\times 5=5\times 3;$$

还满足结合律，例如

$$(3\times 5)\times 2=3\times(5\times 2).$$

引进了负数以后，这些运算律是否还成立呢？也就是说，上面两个等式中，将3、5和2换成任意的有理数，是否仍然成立？

探索

(1) 任意选择两个有理数(至少有一个是负数)，分别填入下列□和○内，并比较两个运算结果：

□ × ○ 和 ○ × □；

(2) 任意选择三个有理数(至少有一个是负数)，分别填入下列□、○和◇内，并比较两个运算结果：

(□ × ○) × ◇ 和 □ × (○ × ◇).

你能发现什么？

概括

有理数的乘法仍满足交换律与结合律.

乘法交换律:两个数相乘,交换因数的位置,积不变.

$$ab=ba.$$

乘法结合律:三个数相乘,先把前两个数相乘,或者先把后两个数相乘,积不变.

$$(ab)c=a(bc).$$

根据乘法交换律和结合律,三个或三个以上的有理数相乘,可以任意交换因数的位置,也可以先把其中的几个数相乘.

计算$(-2)\times5\times(-3)$,有哪些不同的算法?哪种算法比较简便?

例2 计算:$(-10)\times\frac{1}{3}\times0.1\times6$.

解

$$\begin{aligned}&(-10)\times\frac{1}{3}\times0.1\times6\\=&[(-10)\times0.1]\times\left(\frac{1}{3}\times6\right)\\=&(-1)\times2=-2.\end{aligned}$$

从例2的解答过程中,你能得到什么启发?试直接写出下列各式的结果:

$(-10)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times0.1\times6=$ ________;

$(-10)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-0.1)\times6=$ ________;

$(-10)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-0.1)\times(-6)=$ ________.

观察以上各式,你能发现几个不等于零的有理数相乘时,积的正负号与各因数的正负号之间的关系吗?

一般地,我们有:

几个不等于零的数相乘,积的正负号由负因数的个数决定,当负因数的个数为奇数时,积为负;当负因数的个数为偶数时,积为正.

几个不等于零的数相乘，首先确定积的正负号，然后把绝对值相乘.

试一试

$(-5)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 3\times(-2)\times 2=$ ____;

$(-5)\times(-8.1)\times 3.14\times 0=$ ____.

几个数相乘，有一个因数为零，积就为零.

例3 计算：

(1) $8+\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-8)\times\frac{3}{4}$;

(2) $(-3)\times\frac{5}{6}\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right)$;

(3) $\left(-\frac{3}{4}\right)\times 5\times 0\times\frac{7}{8}$.

解 (1) $8+\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-8)\times\frac{3}{4}$

$=8+\frac{1}{2}\times 8\times\frac{3}{4}=8+3=11.$

(2) $(-3)\times\frac{5}{6}\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right)$

$=-3\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}.$

(3) $\left(-\frac{3}{4}\right)\times 5\times 0\times\frac{7}{8}=0.$

思考

三个数相乘，如果积为负，其中可能有几个因数为负数？四个数相乘，如果积为正，其中可能有几个因数为负数？

练　习

1. 计算：

(1) $(-4)\times(-7)\times(-25)$；　　(2) $\left(-\frac{3}{5}\right)\times 8\times\left(-\frac{4}{3}\right)$；

(3) $(-0.5)\times(-1)\times\frac{3}{4}\times(-8)$.

2. 计算：

(1) $(-5)-(-5)\times\frac{1}{5}\times(-4)$；

(2) $(-1)\times(-7)+6\times(-1)\times\frac{1}{2}$；

(3) $(-3)\times(-7)-3\times(-6)$；

(4) $1-(-1)\times(-1)-(-1)\times 0\times(-1)$.

小学里我们还学过乘法对加法的分配律，例如

$$6\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=6\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{3}.$$

引进了负数以后，分配律是否还成立呢？

探索

任意选取三个有理数（至少有一个是负数），分别填入下列□、○和◇内，并比较两个运算结果：

□ ×（ ○ ＋ ◇ ）和 □ × ○ ＋ □ × ◇.

你能发现什么？

概括

有理数的运算仍满足分配律.

分配律：一个数与两个数的和相乘，等于把这个数分别与这两个数相乘，再把积相加.

$$a(b+c)=ab+ac.$$

例4 计算：

(1) $30\times\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)$；

(2) $4.98\times(-5)$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&30\times\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)\\=&30\times\frac{1}{2}-30\times\frac{2}{3}+30\times\frac{2}{5}\\=&15-20+12=7.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&4.98\times(-5)\\=&(5-0.02)\times(-5)\\=&-25+0.1\\=&-24.9.\end{aligned}$$

例5 计算：

(1) $\frac{3}{4}\times\left(8-\frac{4}{3}-\frac{14}{15}\right)$；

(2) $8\times\left(-\frac{2}{5}\right)-(-4)\times\left(-\frac{2}{9}\right)+(-8)\times\frac{3}{5}$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&\frac{3}{4}\times\left(8-\frac{4}{3}-\frac{14}{15}\right)\\=&\frac{3}{4}\times8-\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\times\frac{14}{15}\\=&6-1-\frac{7}{10}\\=&4\frac{3}{10}.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&8\times\left(-\frac{2}{5}\right)-(-4)\times\left(-\frac{2}{9}\right)+(-8)\times\frac{3}{5}\\=&(-8)\times\frac{2}{5}+(-8)\times\frac{3}{5}-4\times\frac{2}{9}\\=&(-8)\times\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)-\frac{8}{9}\\=&-8-\frac{8}{9}\\=&-8\frac{8}{9}.\end{aligned}$$

你还有其他的解法吗？

由上面的例子可以看出，适当应用运算律，可使运算简便. 有时需要先把算式变形，才能应用分配律，如例4(2)；有时可以反向运用分配律，如例5(2).

练　习

1. 计算：

(1) $(-6)\times\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$；

(2) $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\times 12$；

(3) $(-1002)\times 17$.

2. 计算：

(1) $\left(\frac{7}{9}-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}\right)\times 36$；

(2) $9\frac{5}{6}\times 6$.

习题 2.9

1. 计算：

(1) $(-6)\times(-7)$；

(2) $(-5)\times 12$；

(3) $0.5\times(-0.4)$；

(4) $-4.5\times(-0.32)$.

2. 计算：

(1) $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{7}\right)$；

(2) $\left(-\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{3}{10}\right)$；

(3) $-\frac{4}{15}\times 5$；

(4) $(-0.3)\times\left(-\frac{10}{7}\right)$.

3. 计算：

(1) $-2\times(-3)\times(-4)$；

(2) $6\times(-7)\times(-5)$；

(3) $100\times(-1)\times(-0.1)$；

(4) $(-8)\times\frac{3}{16}\times(-1)\times\frac{1}{2}$；

(5) $21\times(-71)\times 0\times 43$；

(6) $-9\times(+11)-12\times(-8)$.

4. 计算：

(1) $\left(-\frac{1}{20}\right)\times\frac{5}{4}\times(-8)$；

(2) $\frac{5}{6}\times\left(-2\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{5}$；

(3) $\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{7}-\frac{2}{5}\right)\times 105$.

读一读

队列操练中的数学趣题

一次团体操排练活动中，某班 45 名学生面向老师站成一列横队. 老师每次让其中任意 6 名学生向后转(不论原来方向如何)，能否经过若干次后，全体学生都背向老师站立？如果能的话，请你设计一种方案；如果不能，请说明理由.

问题似乎与数学无关，却又难以入手. 注意到学生站立有两个方向，与具有相反意义的量有关，向后转又可想象为进行一次运算，或者说改变一次正负号. 我们能否设法联系有理数的知识进行讨论？

让我们再发挥一下想象力：假设每个学生胸前有一块号码布，上面写"$+1$"，背后有一块号码布，上面写"-1"，那么一开始全体学生面向老师，胸前 45 个 $+1$ 的"乘积"是 $+1$. 如果最后全部背向老师，则 45 个 -1 的"乘积"是 -1.

再来观察每次 6 名学生向后转进行的是什么"运算". 我们也设想老师不叫"向后转"，而称这 6 名学生对着老师的数字都"乘以 -1".

这样问题就解决了：每次"运算"乘上了 6 个 -1，即乘上了 $+1$，故 45 个数的乘积不变(数学上称不变量)，始终是 $+1$. 所以要乘积变为 -1 是不可能的.

一个难题，被有理数的简单运算别出心裁地解决了.

2.10 有理数的除法

回忆

小学里已学过数的除法. 回想一下,除法的意义是什么? 它与乘法有什么关系?

试一试

计算: $(-6) \div 2.$

根据除法的意义,这就是要求一个数"?",使

$$(\ ?\ ) \times 2 = (-6).$$

根据有理数的乘法运算,有

$$(-3) \times 2 = -6,$$

所以 $$(-6) \div 2 = -3.$$

另外,我们还知道:

$$(-6) \times \frac{1}{2} = -3.$$

比较以上两式,即有

$$(-6) \div 2 = (-6) \times \frac{1}{2}.$$

这表明除法可以转化为乘法来进行运算.

做一做

填空:

(1) $8 \div (-2) = 8 \times (\quad)$; (2) $6 \div (-3) = 6 \times (\quad)$;

(3) $(-6) \div (\quad) = (-6) \times \frac{1}{3}$; (4) $(-6) \div (\quad) = (-6) \times \frac{2}{3}$.

做完上述填空后,你有什么发现?

小学里我们学过倒数，对于有理数仍然有：
乘积是1的两个数互为**倒数**(reciprocal).

例如，-2 与 $-\frac{1}{2}$ 互为倒数，$-\frac{2}{3}$ 与 $-\frac{3}{2}$ 互为倒数.

这样，有理数的除法可以转化为乘法：

除以一个数等于乘以这个数的倒数.

注意：**零不能作除数.**

为什么零不能作除数？

例1 计算：

(1) $(-18)\div 6$；　　(2) $\left(-\frac{1}{5}\right)\div\left(-\frac{2}{5}\right)$；

(3) $\frac{6}{25}\div\left(-\frac{4}{5}\right)$.

解 (1) $(-18)\div 6=(-18)\times\frac{1}{6}=-3$.

(2) $\left(-\frac{1}{5}\right)\div\left(-\frac{2}{5}\right)=\left(-\frac{1}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

(3) $\frac{6}{25}\div\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{6}{25}\times\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{3}{10}$.

因为除法可以转化为乘法，所以与乘法类似，我们也有如下**有理数除法法则**：

两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除.

零除以任何一个不等于零的数，都得零.

这段文字及后面的例题揭示了有理数的本质.

知道了有理数除法法则以后，我们很容易看出，有理数就是可以表示成两个整数之商的数. 任何整数都是它除以1所得的商；任何正分数(带分数先化成假分数)都是它的分子除以分母所得的商；而负分数的负号可以搬到分子或分母上，从而把它看成两个整数(其中一个是负整数)的商.

例2 把下列有理数写成整数之商：

(1) $-3\frac{1}{7}$；　　(2) -2.4.

解 (1) $-3\frac{1}{7}=-\frac{22}{7}=\frac{-22}{7}=(-22)\div 7$.

(2) $-2.4=-\frac{12}{5}=\frac{12}{-5}=12\div(-5)$.

注意

本题的解答不是唯一的. 例如，$-3\frac{1}{7}=44\div(-14)$也是正确的解答.

分数可以理解为两个整数的商，解答也可以这样书写：
(1) $\frac{-12}{3}=-\frac{12}{3}=-4$;
(2) $\frac{-24}{-16}=\frac{24}{16}=1\frac{1}{2}$.

例 3 化简下列分数：

(1) $\frac{-12}{3}$;　　(2) $\frac{-24}{-16}$.

解 (1) $\frac{-12}{3}=(-12)\div3=-(12\div3)=-4$.

(2) $\frac{-24}{-16}=(-24)\div(-16)=24\div16=1\frac{1}{2}$.

例 4 计算：

(1) $\left(-\frac{3}{5}\right)\div\left(-\frac{3}{2}\right)$;

(2) $-\frac{1}{2}\div\frac{7}{8}\times\left(-\frac{3}{4}\right)$.

解 (1) $\left(-\frac{3}{5}\right)\div\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{5}\div\frac{3}{2}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$.

(2) $-\frac{1}{2}\div\frac{7}{8}\times\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{8}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{7}$.

先定正负号，再算绝对值.

练　习

1. 写出下列各数的倒数：

(1) $\frac{5}{6}$;　(2) $-\frac{3}{7}$;　(3) -5;　(4) 1;　(5) -1;　(6) 0.2.

2. 计算：

(1) $36\div(-3)$;　(2) $(-2)\div\frac{1}{2}$;　(3) $0\div(-5)$;

(4) $8\div(-0.2)$;　(5) $\left(-\frac{7}{8}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)$;　(6) $(-6)\div(-4)\div\left(-\frac{3}{5}\right)$.

3. 下列计算正确吗？为什么？

$$(-3)\div\frac{1}{4}\div\frac{1}{4}=(-3)\div\left(\frac{1}{4}\div\frac{1}{4}\right)=(-3)\div1=-3.$$

习题 2.10

1. 写出下列各数的倒数：

(1) -15；　(2) 0.25；　(3) $3\frac{1}{3}$；　(4) $-5\frac{2}{5}$.

2. 计算：

(1) $(-42)\div 12$；　(2) $(-56)\div(-14)$；　(3) $-18\div 0.6$；

(4) $\frac{3}{5}\div(-1)$；　(5) $-\frac{1}{4}\div\frac{3}{2}$；　(6) $-0.25\div\left(-\frac{3}{8}\right)$.

3. 化简下列分数：

(1) $\frac{-21}{7}$；　(2) $\frac{2}{-12}$；　(3) $\frac{-54}{-8}$.

4. 计算：

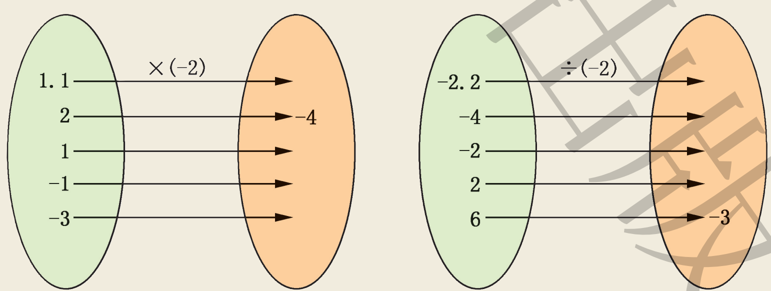
(1) $\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(-2\frac{1}{4}\right)$；

(2) $-6\div(-0.25)\times\frac{11}{24}$；

(3) $\left(-\frac{2}{3}\right)\div\frac{1}{3}\div\left(-\frac{1}{2}\right)$.

5. (1) 把图(1)中第一个圈里的每一个数，分别乘以(-2)，将结果写在第二个圈里对应的位置；

(2) 把图(2)中第一个圈里的每一个数，分别除以(-2)，将结果写在第二个圈里对应的位置.



(1)　　(2)

(第 5 题)

2.11 有理数的乘方

在小学里，我们已经学过：

$a \cdot a$ 记作 a^2，读作 a 的平方(或 a 的 2 次方)；

$a \cdot a \cdot a$ 记作 a^3，读作 a 的立方(或 a 的 3 次方).

一般地，n 个相同的因数 a 相乘：

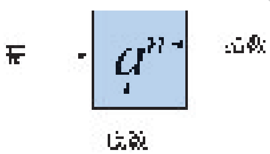
$$\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}},$$

记作 a^n.

例如 $$2 \times 2 \times 2 = 2^3,$$

$$(-2)(-2)(-2)(-2) = (-2)^4.$$

这种求几个相同因数的积的运算，叫做**乘方**(involution)，乘方的结果叫做**幂**(power). 在 a^n 中，a 叫做**底数**(base number)，n 叫做**指数**(exponent)，a^n 读作 a 的 n 次方，a^n 看作是 a 的 n 次方的结果时，也可读作 a 的 n 次幂.



例如，2^3 中，底数是 2，指数是 3. 2^3 读作 2 的 3 次方，或 2 的 3 次幂.

一个数可以看作这个数本身的一次方，例如 8 就是 8^1，指数 1 通常省略不写.

你能以正方形的面积和正方体的体积来解释平方、立方的意义吗？

2^3 与 3^2 一样吗？为什么？

例 计算：

(1) $(-2)^3$； (2) $(-2)^4$； (3) $(-2)^5$.

解 (1) $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$.

(2) $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$.

(3) $(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$.

$(-2)^3$ 与 -2^3 的意义是否相同？$(-2)^4$ 与 -2^4 呢？

根据有理数乘法法则，我们有：

正数的任何次幂都是正数；

负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数.

练　习

1. $(-4)^5$ 读作什么？其中底数是什么？指数是什么？$(-4)^5$ 是正数还是负数？
2. 计算：

(1) 10^3；　(2) 10^5；　(3) $(-1)^3$；

(4) $(-1)^{10}$；　(5) $(-0.1)^3$；　(6) $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$；

(7) $(-2)^3\times(-2)^2$；　(8) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^5$.

习题 2.11

1. 把下列各式写成乘方的形式：

(1) $6\times6\times6$；

(2) 2.1×2.1；

(3) $(-3)(-3)(-3)(-3)$；

(4) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$.

2. 把下列各式写成乘法的形式：

(1) 3^4；　(2) 4^3；

(3) $(-1)^2$；　(4) 1.1^3.

3. 3 的平方是什么？-3 的平方是什么？平方得 9 的数有几个？有没有平方得 -9 的有理数？
4. 计算：

(1) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^2$；　(2) $(-0.2)^3$；

(3) $-(-3)^4$；　(4) $-(-3)^5$.

阅读材料

2^{64}有多大

我们知道,$64^2=4096$,它并不是一个很大的数. 我们将底数和指数交换,得到2^{64},你能想象它有多大吗?

传说古印度人西塔发明了国际象棋而使国王非常高兴,国王决定要重赏西塔. 西塔说:“陛下,本人不要您的重赏,只需您在本人的棋盘上赏一些麦子就行了. 在棋盘的第1个格子里放1粒,在第2个格子里放2粒,在第3个格子里放4粒,在第4个格子里放8粒,依此类推,以后每一个格子里放的麦粒数都是前一个格子里放的麦粒数的2倍,直到放满64个格子就行了.”区区小数,几粒麦子,这有何难,“来人!”国王令人如数付给西塔. 计数麦粒的工作开始了,第1格内放1粒,第2格内放2粒,第3格内放4粒……还没有放到第20格,一袋麦子就空了. 一袋又一袋的麦子被扛到国王面前来. 但是,麦粒数一格接一格飞快增长着. 国王很快就看出,即使拿出全国的粮食,也兑现不了他对西塔的诺言. 原来,所需麦粒总数为

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}=2^{64}-1\text{(到高中后你自己就能推导出来)}$$
$$=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

这些麦子究竟有多少?若以每立方米仓库约可存放1 500万粒麦子计算,这些麦子的体积大约是12 000亿立方米. 假如造一个高4米、宽10米的仓库存放这些麦子,那么仓库的长度大约是0.3亿千米,大致是地球到太阳的距离的0.2倍(地球到太阳的平均距离约为1.496亿千米),或绕地球赤道转750圈(地球赤道的周长约为40 076千米),而要生产这么多麦子,全世界需要一千多年. 虽然国度十分富有,但要这么多的麦子,国王是怎么也拿不出来的.

可见,$2^{64}=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616$是一个很大的数.

2008年,科学家在一个名为“因特网梅森质数大搜索”的国际合作项目中发现

$$2^{43\ 112\ 609}-1$$

是一个质数,它的位数接近1 300万位,而2^{64}才20位呢!

2.12 科学记数法

利用 10 的幂,有时可以方便地表示日常生活中遇到的一些较大的数,如:

光的速度大约是 300 000 000 米/秒;

全世界人口数大约是 7 000 000 000.

这样的大数,读、写都不方便,考虑到 10 的幂有如下特点:

$10^2 = 100,\ 10^3 = 1000,\ 10^4 = 10\,000,\ \cdots$,即:

一般地,10 的 n 次幂,在 1 的后面有 n 个 0.

这样就可用 10 的幂表示一些大数,如:

$$7\,000\,000\,000 = 7 \times 1\,000\,000\,000 = 7 \times 10^9.$$

这样,一个大于 10 的数就记成 $a \times 10^n$ 的形式,其中 $1 \leqslant a < 10$, n 是正整数. 像这样的记数法叫做**科学记数法**.

例 用科学记数法表示下列各数:

(1) 696 000;　(2) 1 000 000;　(3) 58 000.

解 (1) $696\,000 = 6.96 \times 10^5$.

(2) $1\,000\,000 = 1 \times 10^6$.　(3) $58\,000 = 5.8 \times 10^4$.

思考

用科学记数法表示一个数时,10 的指数与原数的整数位数有什么关系?和同学讨论一下,再举出几个数验证你的猜想是否正确.

练　习

1. 用科学记数法表示下列各数:

(1) 80 000;　(2) 100 000;　(3) 12 300 000.

2. 下列用科学记数法表示的数,原来各是什么数?

(1) 2×10^5;　(2) 5.18×10^3;　(3) 7.04×10^6.

习题 2.12

1. 用科学记数法表示下列各数：

(1) 3210；　　(2) 50 600；

(3) 18 000 000.

2. 下列用科学记数法表示的数，原来各是什么数？

(1) 2×10^{6}；　　(2) 6.03×10^{5}；

(3) 5.002×10^{4}.

3. 填空：

(1) 地球离太阳约有 1 亿 5 千万千米，1 亿 5 千万用科学记数法表示为____________；

(2) 地球上煤的储量估计为 15 万亿吨以上，15 万亿用科学记数法表示为____________.

4. 一天有 8.64×10^{4} 秒，一年有 365 天，一年有多少秒？(用科学记数法表示)

5. 地球绕太阳每小时转动经过的路程约为 1.1×10^{5} 千米，声音在空气中每小时约传播 1.2×10^{3} 千米. 地球绕太阳转动的速度与声音传播的速度哪个快？

2.13 有理数的混合运算

观察

下面的算式中有哪几种运算？

$$3+50\div2^{2}\times\left(-\frac{1}{5}\right)-1.$$

这个算式中，含有有理数的加、减、乘、除、乘方等多种运算，它是有理数的混合运算.

加法和减法叫做第一级运算；乘法和除法叫做第二级运算；乘方和开方（今后将会学到）叫做第三级运算.

有理数的混合运算，应按以下顺序进行：

1. 先算乘方，再算乘除，最后算加减；

2. 同级运算，按照从左至右的顺序进行；

3. 如果有括号，就先算小括号里的，再算中括号里的，然后算大括号里的.

试一试

指出下列各算式的运算顺序：

(1) $6 \div (3 \times 2)$；

(2) $6 \div 3 \times 2$；

(3) $17 - 8 \div (-2) + 4 \times (-3)$；

(4) $3^2 - 50 \div 2^2 \times \frac{1}{10} - 1$；

(5) $-1\frac{2}{3} \times \left(0.5 - \frac{2}{3}\right) \div 1\frac{1}{9}$；

(6) $-1 - [1 - (1 - 0.5 \times 4^3)]$.

思考

(1) $2 \div \left(\frac{1}{2} - 2\right)$与$2 \div \frac{1}{2} - 2$有什么不同?

(2) $(-2) \div (2 \times 3)$与$(-2) \div 2 \times 3$有什么不同?

例 1 计算：$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \div 1\frac{1}{4} \div \frac{1}{10}$.

解

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \div 1\frac{1}{4} \div \frac{1}{10}$$

$$= \left(-\frac{1}{6}\right) \times \frac{4}{5} \times 10 = -\frac{4}{3}.$$

注意

进行分数的乘除运算时，一般要把带分数化为假分数，把除法转化为乘法.

试一试

计算：$2\frac{1}{4}\times\left(-\frac{6}{7}\right)\div\left(\frac{1}{2}-2\right)$.

练　习

1. 计算：$2\times(-3)^3-4\times(-3)+15$.
2. 计算：$-1\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\div\frac{1}{9}$.
3. 计算：$[12-4\times(3-10)]\div4$.

有理数的混合运算涉及多种运算，确定合理的运算顺序是正确解题的关键，能用简便方法的尽量用简便方法. 下面再看几个例子.

例 2 计算：$3+50\div2^2\times\left(-\frac{1}{5}\right)-1$.

解

$3+50\div2^2\times\left(-\frac{1}{5}\right)-1$

$=3+50\div4\times\left(-\frac{1}{5}\right)-1$　　先算乘方

$=3+50\times\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{5}\right)-1$　　化除为乘

$=3-50\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}-1$　　确定积的符号

$=3-\frac{5}{2}-1$　　再做乘法

$=-\frac{1}{2}$.　　最后做加减法

例 3 计算：$\left[1-\left(1-0.5\times\frac{1}{3}\right)\right]\times[2-(-3)^2]$.

解

$$\begin{aligned}
&\left[1-\left(1-0.5\times\frac{1}{3}\right)\right]\times[2-(-3)^2]\\
=&\left[1-\left(1-\frac{1}{6}\right)\right]\times(2-9)\\
=&\left(1-\frac{5}{6}\right)\times(-7)\\
=&\frac{1}{6}\times(-7)\\
=&-\frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

例 4 计算：

$$\left(\frac{7}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12}\right)\div\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{8}{3}\right).$$

解

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{7}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12}\right)\div\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{8}{3}\right)\\
=&\left(\frac{42}{24}-\frac{21}{24}-\frac{14}{24}\right)\div\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{8}{3}\right)\\
=&\frac{7}{24}\times\left(-\frac{8}{7}\right)+\left(-\frac{8}{3}\right)\\
=&-\frac{1}{3}-\frac{8}{3}=-3.
\end{aligned}$$

比较这两种算法，哪一种更简便？

也可以这样来算：

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{7}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12}\right)\div\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{8}{3}\right)\\
=&\left(\frac{7}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12}\right)\times\left(-\frac{8}{7}\right)+\left(-\frac{8}{3}\right)\\
=&\frac{7}{4}\times\left(-\frac{8}{7}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right)\times\left(-\frac{8}{7}\right)+\\
&\left(-\frac{7}{12}\right)\times\left(-\frac{8}{7}\right)+\left(-\frac{8}{3}\right)\\
=&-2+1+\frac{2}{3}-\frac{8}{3}\\
=&-3.
\end{aligned}$$

练　习

1. 计算：

(1) $-2+2\times(-4)^2$；

(2) $-2^2+(-7)\div\left(-\frac{7}{4}\right)$；

(3) $\left(-1\frac{1}{4}\right)\times\frac{2}{5}\times 8-9\div\left(-\frac{3}{2}\right)^2$.

2. 下列计算是否正确？若不正确，试说明错在哪里，并予以改正：

(1) $74-2^2\div 70=70\div 70=1$；

(2) $2\times 3^2=(2\times 3)^2=6^2=36$；

(3) $6\div(2\times 3)=6\div 2\times 3=3\times 3=9$；

(4) $\frac{2^2}{3}-(-2)\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{9}-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{4}{9}+\frac{1}{2}=\frac{17}{18}$.

习题 2.13

1. 计算：

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$；

(2) $1\frac{5}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$；

(3) $-8+4\div(-2)$；

(4) $3\times(-4)+(-28)\div 7$；

(5) $(-7)\times(-5)-90\div(-15)$；

(6) $42\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)\div\left(-\frac{1}{4}\right)$.

2. 计算：

(1) $4-5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3$；

(2) $-8-3\times(-1)^3-(-1)^4$；

(3) $-2^3\div\frac{4}{9}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2$；

(4) $-1^4-\frac{1}{6}\times[2-(-3)^2]$.

3. 计算：

(1) $-\frac{5}{2}+\frac{28}{5}\div(-2)\times\left(-\frac{5}{14}\right)$；

(2) $4\times(-3)^2-5\times(-3)+6$；

(3) $-2+\left(1-0.2\div\frac{3}{5}\right)\times(-3)$；

(4) $1\div(-1)+0\div 4-(-4)\times(-1)$.

2.14 近似数

做一做

（1）统计班上喜欢看球赛的同学的人数.

（2）量一量本册数学课本的宽度.

如果统计得到班上喜欢看球赛的同学的人数是35，则35这个数是与实际完全符合的准确数，一个也不多，一个也不少. 如果量得课本的宽为18.4 cm，由于所用尺的刻度有精确度限制，而且用眼观察不可能非常细致，因此与实际宽度常会有一点偏差. 这里的18.4是一个与实际宽度非常接近的数，称为**近似数**（approximate number）.

你还能举出一些日常生活中遇到的近似数吗？

在实际生活中，我们常会遇到或用到近似数，例如，我国的陆地面积约为960万平方千米，小李家的写字台长120厘米，这里的960、120都是近似数.

使用近似数就有一个近似程度的问题，也就是精确度的问题.

我们都知道：

$$\pi = 3.141\ 59\cdots.$$

计算中我们需对 π 取近似数：

如果结果只取整数，那么按四舍五入的法则应为3，就叫做精确到个位；

如果结果取1位小数，那么应为3.1，就叫做精确到十分位（或精确到0.1）；

如果结果取2位小数，那么应为3.14，就叫做精确到百分位（或精确到0.01）；

……

概括

一般地，一个近似数四舍五入到某一位，就说这个近似数精确到那一位.

例如，小明的身高为 1.70 米，1.70 这个近似数精确到百分位.

例 1 下列由四舍五入法得到的近似数，各精确到哪一位？

(1) 132.4； (2) 0.0572.

解 (1) 132.4 精确到十分位（即精确到 0.1）.

(2) 0.0572 精确到万分位（即精确到 0.0001）.

例 2 用四舍五入法，按括号中的要求对下列各数取近似数：

(1) 0.340 82（精确到千分位）；

(2) 64.8（精确到个位）；

(3) 1.5046（精确到 0.01）；

(4) 130 542（精确到千位）.

解 (1) $0.340\ 82 \approx 0.341$.

(2) $64.8 \approx 65$.

(3) $1.5046 \approx 1.50$.

(4) $130\ 542 \approx 1.31 \times 10^5$.

这里的近似数 1.50 末位的 0 能否去掉？近似数 1.50 与 1.5 相同吗？

注意

(1) 例 2 的小题(4)中，如果把结果写成 131 000，会误认为是精确到个位得到的近似数，这里用科学记数法，把结果写成 1.31×10^5，就确切地表示精确到千位.

(2) 有一些量，我们或者很难测出它们的准确值，或者没有必要算得它们的准确值，这时通过粗略的估算就能得到所要的近似数，有时近似数也并不总是按“四舍五入”法得到的.

例如，某地遭遇水灾，约有10万人的生活受到影响. 政府拟从外地调运一批粮食救灾，需估计每天要调运的粮食数. 如果按一个人平均一天需要0.5千克粮食计算，那么可以估计出每天要调运5万千克粮食.

又如某校初一年级共有112名同学，想租用45座的客车外出秋游. 为估计需租用客车的辆数，计算得 $112 \div 45 = 2.488\cdots$，就不能用四舍五入法，而要用“进一法”，即应租用3辆客车.

练 习

1. 请你举出几个准确数和近似数的实际例子.

2. 圆周率 $\pi = 3.141\,592\,653\cdots$，如果取近似数3.142，它精确到哪一位？如果取近似数3.1416呢？

3. 下列由四舍五入法得到的近似数，各精确到哪一位？

   (1) 127.32；　(2) 0.0407；　(3) 20.053；

   (4) 230.0；　(5) 4.002；　(6) 5.08×10^3.

4. 用四舍五入法，对下列各数按括号中的要求取近似数：

   (1) 0.6328(精确到0.01)；

   (2) 7.9122(精确到个位)；

   (3) 130.06(精确到十分位)；

   (4) 46 021(精确到百位).

5. 一桶玉米大约重45.2千克. 如图，场上有一堆玉米，大约相当于12桶. 估计这堆玉米大约重多少千克？(精确到1千克)

(第5题)

6. 王平与李明测量同一根铜管的长，按四舍五入法记录测得的结果，王平测量的记录是0.80米，李明测量的记录是0.8米. 这两个结果是否相同？为什么？

习题 2.14

1. 下列各个数据中,哪些数是准确数?哪些数是近似数?
   (1) 小琳称得体重为 38 千克;
   (2) 现在的气温是 -2℃;
   (3) 1 m 等于 100 cm;
   (4) 东风汽车厂 2011 年生产汽车 14 500 辆.
2. 下列由四舍五入法得到的近似数各精确到哪一位?
   (1) 5.67;　　(2) 0.003 010;
   (3) 1.11×10^6;　　(4) 1.200.
3. 用四舍五入法,对下列各数按括号中的要求取近似数:
   (1) 1102.5 亿(精确到亿位);　　(2) 0.0792(精确到 0.001);
   (3) 0.002 91(精确到万分位);　　(4) 475 301(精确到万位).
4. 量出本册数学课本封面的长度和宽度. (精确到1 mm)

2.15 用计算器进行计算

问题

已知一个圆柱的底面半径为 2.32 cm,高为 7.06 cm,求这个圆柱的体积.

我们知道,圆柱的体积 = 底面积 × 高. 因此,计算这个圆柱的体积就要做这样的计算:

$$\pi\times2.32^2\times7.06.$$

碰到复杂的计算,我们可以利用电子计算器(简称计算器)来完成.

下面我们尝试运用计算器解题.

例 1 用计算器求 $345+21.3$.

解 用计算器求 $345+21.3$ 的过程为:

键入 $\boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{3}$,屏幕显示运算式子 $345+21.3$, 再按 $\boxed{=}$,显示运算结果$\frac{3663}{10}$. 若需得到小数形式的结果,可继续按 $\boxed{S\Leftrightarrow D}$,显示 366.3,即

$$345+21.3=\frac{3663}{10}=366.3.$$

在键入数据后,也可直接按 $\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{=}$,得到小数形式的结果.

做一做

按例 1 的方法,用计算器求 $105.3-243$ 的值.

例 2 用计算器求 $31.2\div(-0.4)$.

解 用计算器求 $31.2\div(-0.4)$ 的按键顺序是:

$$\boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{(-)}\ \boxed{0}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{4}\ \boxed{=}.$$

显示结果为 -78,所以

$$31.2\div(-0.4)=-78.$$

注意

(1) 输入 0.4 时,也可以省去小数点前的 0,按 $\boxed{\cdot}\ \boxed{4}$ 即可.

（2）不同型号的计算器可能会有不同的按键顺序. 如输入负数 -5，有的计算器是 $\boxed{(-)}$ $\boxed{5}$ 或 $\boxed{-}$ $\boxed{5}$，有的则为 $\boxed{5}$ $\boxed{+/-}$.

做一做

按例 2 的方法，用计算器求 $8.2\times(-4.3)\div2.5$ 的值.

例 3 用计算器求 $62.2+4\times7.8$.

这是加法和乘法的混合运算. 对于加、减、乘、除和乘方的混合运算，只要按算式的书写顺序输入，计算器会按要求算出结果. 因此，本题的按键顺序是：

$\boxed{6}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{8}$ $\boxed{=}$ $\boxed{S\Leftrightarrow D}$.

显示结果为 93.4，所以

$$62.2+4\times7.8=93.4.$$

做一做

按例 3 的方法，用计算器求 $(-29.4)\times2\div4.2\div(-7)$ 的值.

例 4 用计算器求 2.7^3.

解 用计算器求 2.7^3，可以使用求立方的专用键 $\boxed{x^3}$，按键顺序是：

$\boxed{2}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{7}$ $\boxed{x^3}$ $\boxed{=}$

显示结果为 19.683，所以

$$2.7^3=19.683.$$

也可以使用乘方的专用键 $\boxed{x^{\blacksquare}}$ (按 $\boxed{2}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{7}\ \boxed{x^{\blacksquare}}$ 后，屏幕上出现 $2.7^{\square}$)，按键顺序是：

$$\boxed{2}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{7}\ \boxed{x^{\blacksquare}}\ \boxed{3}\ \boxed{=}.$$

注意

用计算器求一个数的正整数次幂，不同的计算器可能会有不同的按键方式.

当求一个数的平方或立方时，不少计算器都有专用键.

做一做

(1) 按例 4 的方法，求 6.3^5.

(2) 用计算器求出本节开头所提问题中圆柱的体积(结果精确到 1 cm^3).

练　习

1. 用计算器计算：

(1) $27+308$；　(2) $0.75+32.04$；

(3) $3.65-72.7$；　(4) $-97.9+34.8$；

(5) $-43-(-28)$；　(6) 0.147×63；

(7) 36×125；　(8) $84\div(-24)$；

(9) $76\div(-0.19)$；　(10) $(-0.125)\times(-18)$；

(11) $83+139-328+512$；　(12) $-3.14+5.76-7.19$；

(13) $2.5\times76\div(-0.19)$；　(14) $-125\times0.42\div(-7)$.

2. 用计算器计算：

(1) $23\times15+4$；　(2) $50\div2-20\times3$；

(3) $25\times3\times2+(-127)$；　(4) $0.84\div4+0.79\times2$；

(5) $-24\times2+15\div0.75$；　(6) 1.8^3；

(7) -0.12^4;　　(8) 9.3^2;

(9) 5^6;　　(10) $(-3)^7$.

3. 用计算器计算：

(1) $2.6\times3-(-3)^4$;　　(2) $4.5^2\times3-(-24)\div8$;

(3) $4+2^2\times7-(-3)\times6$.

习题 2.15

1. 用计算器计算：

(1) $83+189-328+512$;

(2) $-4.21-(-22.5)+(-7.24)-29.2$;

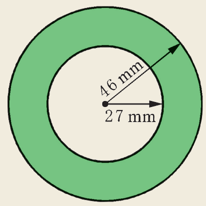
(3) $43\times97\times985$;

(4) 8^4;

(5) $3.24\times10^3+1.2\times10^5$;

(6) $3.12\times10^6\div(-2.4\times10^2)$.

2. 如图，已知圆环的外圆半径为 46 mm，内圆半径为27 mm，圆环的面积是多少 mm^2？（结果精确到百位）



（第 2 题）

阅读材料

从结绳记数到计算器

伴随着人类的诞生，数数和记数就同时出现在人们的各项活动中，成为人类文明史的一个重要组成部分. 我国古代早有“结绳记数”的记载，即用绳子打结作为记录和记数的工具. 之后石块、算筹等都被用于劳动与生活. 随着人们数学知识的增加和技术的发展，我国在元代发明了算盘及相应的珠算算法. 17 世纪，英国人发明了计算尺. 与此同时，法国人和德国人发明了手摇计算器，进行数的四则运算.

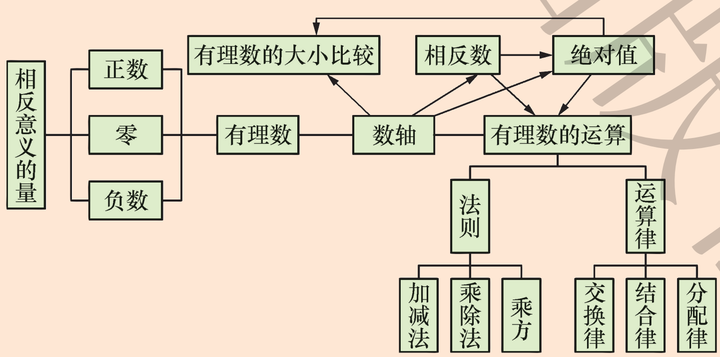
如今，计算器已经成为人们工作与生活不可或缺的工具. 一个计算器，看起来体积很小，但作用却极大，具有许多功能. 它既可以帮助我们进行各种复杂的数学计算，解答现实生活中的各种数学问题，又可以帮助我们理解数学概念. 有的计算器可以编制各种程序，有的还可以绘制各种图形，有的甚至可以进行式的运算，真是功能强大.

由于计算器的型号各不相同，因此使用方法也未必一样. 根据输入方法，计算器大致可分为两类，一类是按数学的书写顺序输入的，另一类是不按数学的书写顺序输入的. 例如要输入分数$\frac{2}{3}$，前一类计算器带有分数专用键，可分别输入分子与分母，屏幕显示$\frac{2}{3}$；后一类计算器按相应的分数键，输入后显示2⌟3. 根据计算器的显示屏幕，计算器又可分为一行显示、两行显示以及多行显示. 不少计算器可按数学的书写顺序输入，两行显示，可翻阅前面曾经进行的运算式子，也可修改已输入的计算式子，许多数学表达式均与教科书通常采用的自然书写形式一致.

我们的航船已经浩浩荡荡地驶入了奇妙的数学世界，千万别忘了带上你的计算器，一起遨游知识的海洋.

小结

一、知识结构



二、要点

1. 本章将数集扩充到有理数,并将数的大小比较和运算推广到有理数,建立它们新的意义和法则. 这是一个从实际经验到数学抽象的过程. 例如,从零上和零下温度的表示抽象出负数,从比较温度高低认识有理数的大小比较,从温度计表示温度的启发引出数轴的概念,并概括出大小比较的法则等.

2. 用数轴上的点表示有理数,有利于直观地理解相反数和绝对值的概念,也可以帮助我们认识有理数的大小比较和运算,使数和形很好地结合起来.

3. 在研究有理数时,一般要考虑两个方面:一是数的符号,即是正数、负数还是零;二是数的绝对值. 除了考虑符号外,有理数的运算(或大小比较)往往都归结为绝对值的运算(或大小比较),注意到绝对值是非负数,所以也就归结为我们熟知的非负数来实现. 这样的"化归"思想在数学研究中是屡见不鲜的.

4. 有理数的本质是可以写成整数之商(之比)的数. 认识到这个本质对理解相关的问题和将来进一步扩充数集都是至关重要的. 例如,在以后的数学学习中,我们将会看到,实践中还存在着不能表示成两个整数之商的数,于是就需要进一步扩充数集.

5. 数集的扩充带来了新的变化. 例如减法,在引进负数之前,被减数不能小于减数. 而在有理数集中,任意两个有理数总能进行减法运算,而且减法可以转化为加法. 但是,新的数集保持了原有数集的一些重要性质,特别是数的运算律仍然成立. 这一通性在数学的进一步研究中将起着关键作用,在下一章的学习中马上可以看到.

复习题

A组

1. 有理数 2.5、-8、-0.7、$\frac{3}{2}$、$-\frac{1}{7}$、0.05 和 0 中，哪些是正数？哪些是负数？

2. 根据下表每行中的已知数，填写该行中其他的数：

原　数	原数的相反数	原数的绝对值	原数的倒数
-2			
	-7.5		
		0	
			$\frac{10}{7}$

3. 把表示下列各数的点画在数轴上，再按从小到大的顺序，用"<"号把这些数连接起来：

$$2.5,\ -3,\ 5\frac{1}{2},\ -2\frac{1}{2},\ 0,\ -1.6.$$

4. 按照从大到小的顺序，用">"号把下列各数连接起来：

$$-3.2,\ \frac{1}{2},\ 0.6,\ -0.6,\ 5,\ -3.3.$$

5. 在数轴上画出所有表示大于 -5，并且小于 4 的整数的点．其中最大的一个数是多少？

6. 比较下列各对数的大小：

(1) $-\frac{6}{7}$ 与 $-\frac{7}{6}$；　　(2) -1.17 与 -1.2；

(3) $-5\frac{4}{5}$ 与 0；　　(4) $\frac{1}{10}$ 与 -2；

(5) 0.001 与 0.009．

7. 计算：

(1) $-100+157$；

(2) $-18+(-32)$；

(3) $-9-27$；

(4) $-29-(-12)$;

(5) $-8\times(-15)$;

(6) $(-4)\div\left(-\frac{1}{4}\right)$;

(7) $-56\div(-8)$;

(8) $72\div\left(-\frac{1}{3}\right)$;

(9) $(-0.03)\times(-100)$;

(10) $\left(-\frac{3}{4}\right)\div\left(-5\frac{5}{8}\right)$.

8. 计算:

(1) $8+\left(-\frac{1}{4}\right)-5-(-0.25)$;

(2) $-82+72\div36$;

(3) $(3-4-5)\div\left(-1\frac{1}{5}\right)$;

(4) $2\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\div(-9+19)$;

(5) $(-1)\div\left(-1\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}$;

(6) $\left(-\frac{1}{6}+\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right)\times(-48)$;

(7) $25\times\frac{3}{4}-(-25)\times\frac{1}{2}+25\times\left(-\frac{1}{4}\right)$;

(8) $(-81)\div2\frac{1}{4}+\frac{4}{9}\div(-16)$.

9. (1) 平方等于$\frac{4}{9}$的有理数有哪几个?有没有平方等于$-\frac{4}{9}$的有理数?

(2) 立方等于27的有理数有几个?有没有立方等于-27的有理数?

10. (1) 互为相反数的两数和是什么?

(2) 如果两个互为相反数的数都不为0,那么它们的商是多少?

11. 用四舍五入法对下列各数按括号中的要求取近似数:

(1) 2.768(精确到百分位);

(2) 0.009 493(精确到千分位);

(3) 8.965(精确到0.1);

(4) 17 289(精确到千位).

12. 用计算器计算:(结果精确到十分位)

(1) $56.2 + 7.41 \times (-2.12)$;

(2) $2.91^4 - 1.68$;

(3) $(3.91 - 1.45)^2 \div (-5.62) + 49.34$.

B组

13. 根据下列语句列式并计算:

(1) -3 与 0.3 的和乘以 2 的倒数;

(2) 45 加上 15 与 -3 的积;

(3) 34 与 6 的商减去 $-\frac{1}{3}$;

(4) $-\frac{1}{2}$与 -5 的差的平方.

14. (1) 0 和 1 之间的数的平方比原数大还是小? 立方呢? 倒数呢? 分别举例说明;

(2) -1 和 0 之间的数的平方比原数大还是小? 立方呢? 倒数呢? 分别举例说明.

15. 选择题

(1) 下列每对数中,不相等的一对是(　　).

A. $(-2)^3$ 与 -2^3

B. $(-2)^2$ 与 2^2

C. $(-2)^4$ 与 -2^4

D. $|-2^3|$与$|2|^3$

(2) 计算 $(-2)^{100} + (-2)^{101}$ 所得的结果是(　　).

A. 2^{100}　　B. -1

C. -2　　D. -2^{100}

(3) 下面各组大小关系中,正确的是(　　).

A. $0 > |-10|$

B. $\left|-\frac{3}{101}\right| > \left|-\frac{4}{102}\right|$

C. $|-2| + 35.6 > |-2 + 35.6|$

D. $(-2)^3 > (-2)^2$

16. 计算：

(1) $2-2\div\frac{1}{3}\times 3$；

(2) $-\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2^2-(-5)$；

(3) $-1^3-(1+0.5)\times\frac{1}{3}\div(-4)$；

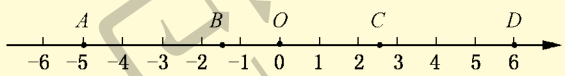
(4) $-3-\left(-1-0.2\times\frac{3}{5}\right)\times(-2)$.

17. 下列说法是否正确？为什么？

(1) 两个正数中，较大数的倒数反而小；

(2) 两个有理数中，较大数的倒数反而小.

18. 如图，数轴上的点 A、B、O、C、D 分别表示 -5、$-1\frac{1}{2}$、0、2.5、6，回答下列问题：



（第 18 题）

(1) C、B 两点间的距离是多少？

(2) B、D 两点间的距离是多少？

(3) A、B 两点间的距离是多少？

19. 某检修小组乘一辆汽车沿一条东西向公路检修线路，约定向东走为正，某天从 A 地出发到收工时，行走记录为（长度单位：千米）：

$+15$，-2，$+5$，-3，$+8$，-3，-1，$+11$，$+4$，-5，-2，$+7$，-3，$+5$.

收工时，检修小组在 A 地的哪一边？距离 A 地多远？

20. 在 1∶50 000 000 的地图上量得两地间的距离是 1.3 cm，试用科学记数法表示这两地间的实际距离.（单位：m）

21. 试求高为 0.820 m，底面半径为 0.470 m 的圆柱的体积.（结果精确到 0.01 m^3）

22. 加工一根轴，图纸上注明它的直径是 $\phi 30\,^{+0.03}_{-0.02}$. 其中，$\phi 30$ 表示直径是 30 mm，$+0.03$ 表示合格品的直径最大只能比规定的直径大 0.03 mm，-0.02 表示合格品的直径最小只能比规定的直径小 0.02 mm. 那么合格品的直径最大可为多少？最小可为多少？

C组

23. 字母 a 取怎样的有理数时，下列关系式成立？

(1) $|a| = a$； (2) $|a| > a$；

(3) $|a| = -a$； (4) $a > -a$.

24. 回答下列问题：

(1) 由 $|m| = |n|$，一定能得到 $m = n$ 吗？请说明理由；

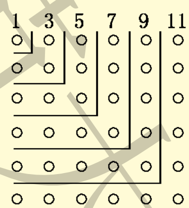
(2) 由 $|m| = |n|$，一定能得到 $m^2 = n^2$ 吗？请说明理由.

25. 如图，你能由此得出计算规律吗？

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = (\quad)^2.$$

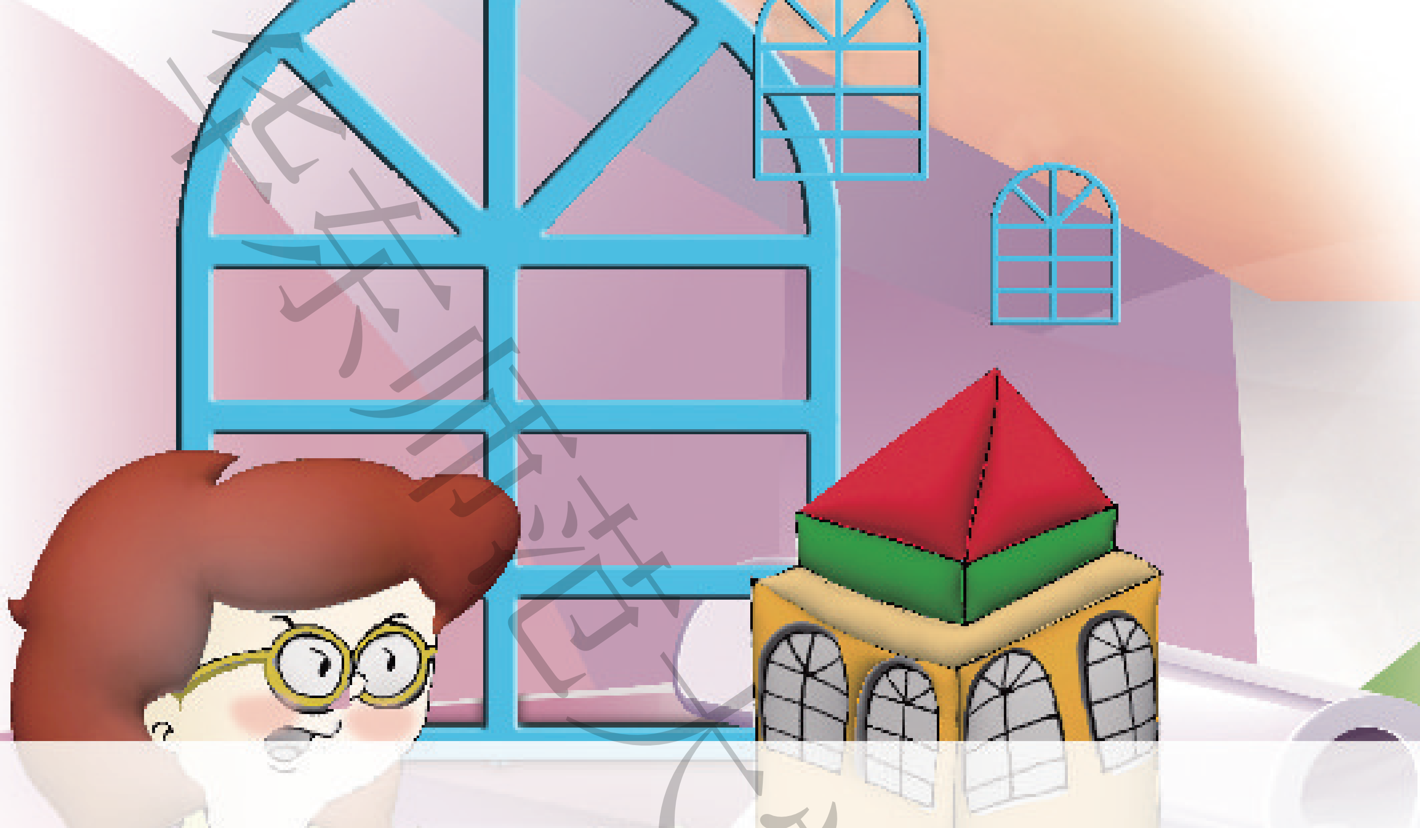
由此猜测：从 1 开始的 n 个连续奇数之和等于多少？

选择 n 的一些值，用计算器计算，验证你的猜想.



（第 25 题）

第 3 章　整式的加减



如图所示的窗框,上半部分为半圆,下半部分为 6 个大小一样的长方形,长方形的长与宽的比为 3∶2. 如果长方形的长分别为 0.4 米、0.5 米、0.6 米等,我们容易计算出所需材料的长度.

本章将学习代数式,主要研究整式及其加减法.

3.1 列代数式

1. 用字母表示数

你能从表中发现弹起高度与下落高度之间有什么数量关系吗?

为了测试一种皮球的弹起高度与下落高度之间的关系,通过试验,得到下面一组数据(单位:厘米):

下落高度	40	50	80	100	150
弹起高度	20	25	40	50	75

如果我们用字母 b 表示下落高度的厘米数,那么对应的弹起高度为________(厘米).

这里,我们用字母 b 表示下落高度以后,得出表示弹起高度的式子$\frac{1}{2}b$, 反映了这种皮球的弹起高度和下落高度之间的数量关系.

你能用字母表示有理数的其他几个运算律吗?

让我们再看几个用字母表示数的例子:

(1) 如果用 a、b 表示任意两个有理数,那么加法交换律可以表示为:

$$a+b=b+a.$$

乘法交换律可以表示为:

$$ab=ba.$$

(2) 某种大米每千克的售价是 4.8 元,购买这种大米 2 千克、2.5 千克、5 千克、10 千克各需付款多少元?

购买这种大米 2 千克需付款 $4.8\times2=9.6$(元);

购买这种大米 2.5 千克需付款 $4.8\times2.5=12$(元);

购买这种大米 5 千克需付款________(元);

购买这种大米 10 千克需付款________(元);

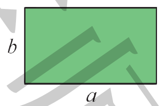
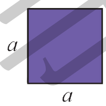
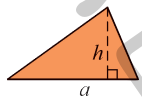
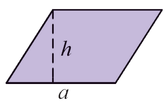
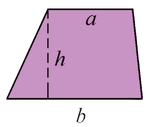
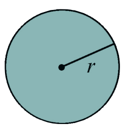
用这个式子,可由购买大米的千克数(n),算出所需的付款数.

如果用字母 n 表示购买这种大米的千克数,那么需付款 $4.8n$(元).

（3）我们知道，长方形的面积等于长与宽的积. 如果用 a、b 分别表示长方形的长和宽，用 S 表示长方形的面积，则有长方形的面积公式：

$$S = ab.$$

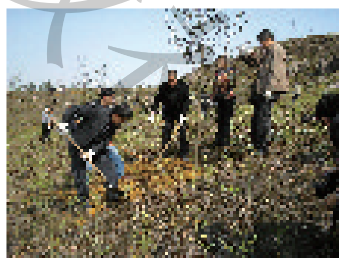
我们可以用公式表示一些常见图形的面积，请填写下表：

图形名称	示意图	面 积 公 式
长方形		$S = ab$
正方形		
三角形		
平行四边形		
梯形		
圆		

从这些例子，我们可以体会到，用字母表示数之后，有些数量之间的关系用含有字母的式子表示，看上去更加简明，更具有普遍意义了.

例 1 填空：

（1）某地为了治理河山，改造环境，计划在第十二个五年计划期间植树绿化荒山，如果每年植树绿化 n 公顷，那么这五年内可以植树绿化荒山________公顷；



（2）每本练习本 m 元，甲买了 5 本，乙买了 2 本，两人一共花了________元，甲比乙多花了________元；

（3）1500 米跑步测试，如果某同学跑完全程的成绩是 t 秒，那么他跑步的平均速度是________米/秒.

解 （1）$5n$.

（2）$(5m+2m)$，$(5m-2m)$.

（3）$\dfrac{1500}{t}$.

注意

（1）式子中出现的乘号，通常写作“ · ”或省略不写，如这里 $5\times n$ 常写作 $5\cdot n$ 或 $5n$；

（2）数字与字母相乘时，数字通常写在字母前面，如 $5n$ 一般不写成 $n5$；

（3）除法运算写成分数形式，如 $1500\div t$ 通常写作 $\dfrac{1500}{t}\ (t\neq 0)$.

这里标明 $t\neq 0$ 是什么意思？

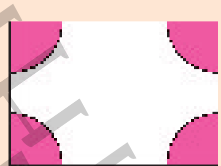
练　习

1. 填空：

（1）一打铅笔有 12 支，n 打铅笔有________支；

（2）三角形的三边长分别为 $3a$、$4a$、$5a$，其周长为________；

（3）如图，某广场四角铺上了四分之一圆形的草地，若圆形的半径为 r 米，则共有草地________平方米.



（第 1（3）题）

2. 我们知道：

$23=2\times 10+3$；

$865=8\times 10^2+6\times 10+5$；

类似地，$5984=$____$\times 10^3+$____$\times 10^2+$____$\times 10+$____.

一个三位数的个位数字为 a，十位数字为 b，百位数字为 c，这个三位数可表示为________________________.

2. 代数式

做一做

填空：

(1) 某种瓜子的单价为 16 元/千克，购买 n 千克需________元；

(2) 小刚上学的步行速度为 5 千米/时，从小刚家到学校的路程为 s 千米，他上学需走________小时；

(3) 钢笔每支 a 元，铅笔每支 b 元，买 2 支钢笔和 3 支铅笔共需______________元.

你还能举出一些用字母表示数的例子吗？

概括

在前面的研究中，出现了 b、$\frac{1}{2}b$、$a+b$、ab、9.6、$4.8n$、$\frac{1}{2}(a+b)h$、$5m-2m$、$\frac{1500}{t}$等，它们都是由数和字母用运算符号连接所成的式子，称为**代数式**(algebraic expression). 单独一个数或一个字母也是代数式.

例 2 用代数式表示下列问题中的量：

(1) 长为 a cm、宽为 b cm 的长方形的周长；

(2) 开学时爸爸给小强 a 元，小强买文具用去了 b 元($a>b$)，还剩多少元？

(3) 某机关原有工作人员 m 人，抽调 20% 下基层工作后，留在该机关工作的还有多少人？

(4) 甲每小时走 a 千米，乙每小时走 b 千米，两人同时同地出发反向行走，t 小时后，他们之间的距离是多少？

解 （1）长方形的周长是它的4条边长之和，所以它的周长是$2(a+b)$cm.

（2）还剩$(a-b)$元.

（3）下基层工作的人数是机关原有工作人员的20%，其人数为$20\%\cdot m$，即$\frac{1}{5}m$，所以留在机关工作的还有$\left(m-\frac{1}{5}m\right)$人.

我们也可以这样考虑：该机关工作人员抽调20%下基层，那么留在原机关工作的人数应是总人数的$(1-20\%)$，所以留在机关工作的还有$(1-20\%)m$人，即$\frac{4}{5}m$人.

两个答案都表示留在机关工作的人数，它们应该是相等的. 以后我们能从数学运算的角度认识这个事实.

（4）t小时后，他们之间的距离是$(at+bt)$千米.

练　习

1. 填空：

（1）a千克含盐为10%的盐水中含盐________千克；

（2）某同学军训期间打靶成绩为10环、8环、8环、7环、a环，则他的平均成绩为________环；

（3）甲以a千米/时、乙以b千米/时（$a>b$）的速度同时同地出发，在一条笔直的公路上同向前进，t小时后他们之间的距离是________千米.

（4）一枚古币的正面是一个半径为r厘米的圆形，中间有一个边长为a厘米的正方形孔，则这枚古币正面的面积为________.

2. （1）某种电视机每台定价为m元，商店在节日搞促销活动，降价20%，促销期间每台实际售价多少元？

（2）将（1）的结果与例2中小题（3）的解答比较一下，你有什么发现？有什么想法？

（3）试自己编一道与（1）的结果类似的题目，与同伴交流.

3. 列代数式

做一做

某地区夏季高山上的温度从山脚处开始每升高 100 米降低 0.7℃. 如果山脚温度是 28℃,那么比山脚高 300 米处的温度为________;一般地,比山脚高 x 米处的温度为________.

根据题意可知,比山脚高 300 米处的温度为 $(28-0.7\times3)$℃,即为 25.9℃;一般地,比山脚高 x 米处的温度为 $\left(28-\frac{0.7}{100}x\right)$℃.

在解决实际问题时,常常先把问题中有关的数量用代数式表示出来,即列出代数式,使问题变得简洁,更具一般性.

例 3 设某数为 x,用代数式表示:

(1) 比该数的 3 倍大 1 的数;

(2) 该数与它的 $\frac{1}{3}$ 的和;

(3) 该数与 $\frac{2}{5}$ 的和的 3 倍;

(4) 该数的倒数与 5 的差.

解 (1) $3x+1$. (2) $x+\frac{1}{3}x$.

(3) $3\left(x+\frac{2}{5}\right)$. (4) $\frac{1}{x}-5\ (x\neq0)$.

例 4 用代数式表示:

(1) a、b 两数的平方和;

(2) a、b 两数和的平方;

(3) a、b 两数的和与它们的差的乘积;

(4) 偶数,奇数.

解 (1) a^2+b^2.

(2) $(a+b)^2$.

(3) $(a+b)(a-b)$.

(4) 偶数是 2 的整数倍，奇数是 2 的整数倍加 1. 所以，偶数和奇数可分别表示为：$2n$，$2n+1$（n 为整数）.

练　习

1. 用代数式表示：

(1) a 与 b 的差的 2 倍；

(2) a 与 b 的 2 倍的差；

(3) a 与 b、c 两数和的差；

(4) a、b 两数的差与 c 的和.

2. 填空：

(1) 三个连续整数，中间一个是 n，则第一个和第三个整数分别是________、________；

(2) 三个连续偶数，中间一个是 $2n$，则它前一个和后一个偶数分别是________、________.

习题 3.1

1. 设 a、b、c 均为有理数，根据相应的运算律填空：

(1) $(a+b)+c=$ ____________（加法结合律）；

(2) $(ab)c=$ ____________（乘法结合律）；

(3) $a(b+c)=$ ____________（分配律）.

2. 有一根弹簧原长 10 厘米，挂重物后，它的长度会伸长，请根据下面表格中的一些数据填空：

所挂重物质量（克）	1	2	3	…	n
弹簧伸长量（厘米）	0.5	1	1.5	…	
弹簧总长度（厘米）	10.5	11	11.5	…	

3. 试引进字母,用适当的代数式表示:

(1) 能被 3 整除的整数;

(2) 除以 3 余数是 2 的整数.

4. 用代数式填空:

(1) 七年级全体同学参加某项国防教育活动,一共分成 n 个排,每排 3 个班,每班 10 人,则七年级一共有________名同学;

(2) 某班有少先队员 m 名,分成两个小队,第一小队有 12 名,则第二小队有________名;

(3) 在一次募捐活动中,某班 35 名同学共捐款 n 元,则平均每个同学捐款________元;

(4) 某班学生总数为 x,其中男生人数占总数的$\frac{2}{5}$,则男生人数为________,女生人数为________;

(5) 一批零件共 m 个,乙先加工 n 个零件后($m>n$),余下的任务由甲再做 5 天完成,则甲平均每天加工的零件数是________;

(6) 巧克力糖每千克 a 元,奶油糖每千克 b 元,用 6 千克巧克力糖和 4 千克奶油糖混合成 10 千克混合糖,则这样得到的混合糖每千克的平均价格为________元;

(7) 某种商品 n 千克的售价为 m 元,则这种商品 8 千克的售价为________元;

(8) 某车间有 m 个工人,计划 n 天做 s 个零件,则平均每个工人一天要做________个零件.

5. 用代数式表示:

(1) a 的 3 倍与 b 的一半之和;

(2) a 与 b 的差的倒数($a\neq b$);

(3) a 与 b 两数的平方和加上它们积的两倍;

(4) a 与 b 两数和的平方减去它们差的平方.

6. 用代数式表示:

(1) 底面半径为 r,高为 h 的圆锥的体积;

(2) 长、宽、高分别为 a、b、c 的长方体的表面积和体积;

(3) 底面是边长为 a 厘米的正方形,体积为 v 立方厘米的长方体的高.

3.2 代数式的值

问题

某礼堂第 1 排有 18 个座位，往后每排比前一排多 2 个座位. 问：

(1) 第 n 排有多少个座位？(用含 n 的代数式表示)

(2) 第 10 排、第 15 排、第 23 排各有多少个座位？

先考察特例：计算第 2 排、第 3 排、第 4 排的座位数，发现规律，再求出第 n 排的座位数.

解 (1) 第 2 排比第 1 排多 2 个座位，它的座位数应为 $18+2=20$；

第 3 排比第 2 排多 2 个座位，它的座位数应为

$$20+2=22.$$

也可以这样考虑：第 3 排是第 1 排的后 2 排，它的座位数应比第 1 排多 2×2 个，即为 $18+2\times2=22$；

类似地，第 4 排是第 1 排的后 3 排，它的座位数应比第 1 排多 2×3 个，即为 $18+2\times3=24$；

……

一般地，第 n 排是第 1 排的后 $(n-1)$ 排，它的座位数应比第 1 排多 $2(n-1)$ 个，即为 $18+2(n-1)$.

(2) 当 $n=10$ 时，$18+2(n-1)=18+2\times 9=36$；

当 $n=15$ 时，$18+2(n-1)=18+2\times 14=46$；

当 $n=23$ 时，$18+2(n-1)=18+2\times 22=62$.

因此，第 10 排、第 15 排、第 23 排分别有 36 个、46 个、62 个座位.

由一般到特殊，将 n 的特定值代入求得的代数式，计算出特定各排的座位数.

概括

我们看到，当 n 取不同数值时，代数式 $18+2(n-1)$ 的计算结果也不同. 以上结果可以说：当 $n=10$ 时，代数式 $18+2(n-1)$ 的值是 36；当 $n=15$ 时，代数式 $18+2(n-1)$ 的值是 46；等等.

一般地，用数值代替代数式里的字母，按照代数式中的运算关系计算得出的结果，叫做**代数式的值**(value of algebraic expression).

例 1 当 $a=2$, $b=-1$, $c=-3$ 时，求下列各代数式的值：

(1) b^2-4ac；　　(2) $(a+b+c)^2$.

解 (1) 当 $a=2$, $b=-1$, $c=-3$ 时，

$$\begin{aligned}&b^2-4ac\\=&(-1)^2-4\times 2\times(-3)\\=&1+24\\=&25.\end{aligned}$$

(2) 当 $a=2$, $b=-1$, $c=-3$ 时，

$$\begin{aligned}&(a+b+c)^2\\=&(2-1-3)^2\\=&(-2)^2\\=&4.\end{aligned}$$

例 2 某企业去年的年产值为 a 亿元，今年比去年增长了 10%. 如果明年还能按这个速度增长，请你预测一下，该企业明年的年产值将能达到多少亿元？如果去年的年产值是 2 亿元，那么预计明年的年产值是多少亿元？

解 由题意可得,今年的年产值为 $a\cdot(1+10\%)$ 亿元,于是明年的年产值为

$$\begin{aligned}&a\cdot(1+10\%)\cdot(1+10\%)\\=\ &1.21a(\text{亿元}).\end{aligned}$$

若去年的年产值为 2 亿元,即 $a=2$. 当 $a=2$ 时,

$$1.21a=1.21\times2=2.42.$$

答:该企业明年的年产值将能达到 $1.21a$ 亿元. 由去年的年产值是 2 亿元,可以预计明年的年产值是 2.42 亿元.

练　习

1. 填表:

x	2	-2	$\frac{1}{2}$		
$2x$				6	
$\frac{1}{x}$					$\frac{1}{4}$
x^2					

2. 根据下列各组 x、y 的值,分别求出代数式 $x^2+2xy+y^2$ 与 $x^2-2xy+y^2$ 的值:

(1) $x=2$, $y=3$;

(2) $x=-2$, $y=-4$.

3. 已知梯形的上底 $a=2$ cm,下底 $b=4$ cm,高 $h=3$ cm,利用梯形面积公式求这个梯形的面积.

习题 3.2

1. 华氏温度(°F)与摄氏温度(℃)之间的转换关系为：

$$\text{华氏度数}=\text{摄氏度数}\times\frac{9}{5}+32.$$

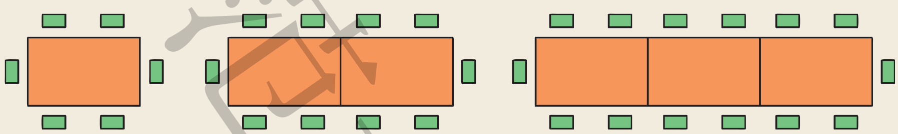
(1) 当摄氏度数为 x 时，华氏度数为____________________；

(2) 当摄氏度数为 20 时，华氏度数为____________________.

2. 当 $a=\frac{1}{2}$，$b=2$ 时，求下列代数式的值：

(1) $(a+b)^2-(a-b)^2$；　　(2) $a^2+2ab+b^2$.

3. 按图示的方式摆放餐桌和椅子：



(第 3 题)

(1) n 张餐桌可以放多少把椅子？

(2) 8 张餐桌可以放多少把椅子？10 张呢？15 张呢？

阅读材料

有趣的“3x+1问题”

现有两个代数式：

$$3x+1, \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}x. \qquad ②$$

如果随意给出一个正整数，记为 x，那么利用这个正整数，我们都可以根据代数式①或②求出一个对应值.

我们约定一个规则:若正整数 x 为奇数,我们就根据①式求对应值;若正整数 x 为偶数,我们就根据②式求对应值. 例如,取正整数 x 为 18,它是偶数,则应由②式求得对应值为 9;而 9 是奇数,应由①式求得对应值为 28;同样,28 是偶数,对应 14……我们感兴趣的是,从某一个正整数出发,不断地这样对应下去,会是一个什么样的结果呢? 也许这是一个非常吸引人的数学游戏.

下面我们以正整数 18 为例,不断地做下去,如图 1 所示,最后竟出现了一个循环:4, 2, 1, 4, 2, 1, ….

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
18 & \to & 9 & \to & 28 & \to & 14 & \to & 7 & \to & 22 & \to & 11 \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow \\
20 & \leftarrow & 40 & \leftarrow & 13 & \leftarrow & 26 & \leftarrow & 52 & \leftarrow & 17 & \leftarrow & 34 \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & \\
10 & \to & 5 & \to & 16 & \to & 8 & \to & 4 & \to & 2 & & \\
 & & & & & & & & \nwarrow & 1 & \swarrow & &
\end{array}$$

图 1

再取一个正整数试试看. 比如取 x 为 21,如图 2 所示,最后结果仍是一个同样的循环.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
21 & \to & 64 & \to & 32 & \to & 16 & \to & 8 & \to & 4 & \to & 2 \\
 & & & & & & & & & & \nwarrow & 1 & \swarrow
\end{array}$$

图 2

大家可以再随意取一些正整数试一试,结果一定同样奇妙——最后总是落入 4、2、1 的“黑洞”. 是不是从所有的正整数出发,都落入 4、2、1 的黑洞而无一例外呢? 这就是“$3x+1$ 问题”,在日本和中国常称之为“角谷问题”,关于其成立的猜想叫做“角谷猜想”,因为日本数学家角谷静夫(Shizuo Kakutani)对此做过研究. 西方把这个猜想叫做科拉兹猜想(Collatz Conjecture).

“$3x+1$ 问题”或角谷猜想通俗易懂,所以引起很多人(包括许多非数学家)的兴趣并参与其中. 有人动用计算机,试遍了从 1 到 7×10^{11} 的所有整数,结果都成立. 近年来一些网络计算机平台也把“$3x+1$ 问题”的验证列为自由参与的研究项目,例如美国加州贝克利的开放式平台 BOINC 就曾有一个项目“3x+1@home”. 此项目于 2008 年停止后,又有平台开放了“Collatz Conjecture”项目. 大量的验证都没有找到反例.

验证不可能把所有的正整数穷尽,角谷猜想成立需要一个数学证明! 事实上,国内外都有人宣称证明了角谷猜想,但他们的证明都还没有获得数学界的确认. 看来,“$3x+1$ 问题”的解决似乎还有一段不短的路要走.

3.3 整　式

1. 单项式

回忆

列代数式：

（1）若正方形的边长为 a，则正方形的面积是________；

（2）若三角形的一边长为 a，这边上的高为 h，则这个三角形的面积为________；

（3）若 m 表示一个有理数，则它的相反数是________；

（4）小馨每月从零花钱中拿出 x 元钱捐给希望工程，一年下来小馨共捐款________元.

你所列出的这些代数式有什么共同特点?

概括

上面列出的代数式都是由数与字母的乘积组成的，这样的代数式叫做**单项式**（monomial）. 例如，a^2、$\frac{1}{2}ah$、$-m$ 等都是单项式. 单独一个数或一个字母也是单项式.

单项式中的数字因数叫做这个单项式的**系数**(coefficient). 例如，$\frac{1}{2}ah$ 的系数是 $\frac{1}{2}$，a^2 的系数是 1，$-m$ 的系数是 -1.

一个单项式中，所有字母的指数的和叫做这个单项式的**次数**(degree). 例如，$\frac{1}{2}ah$ 的次数是 2，$\frac{5}{4}x^2yz$ 的次数是 4，$-m$ 的次数是 1.

注意

(1) 当一个单项式的系数是 1 或 -1 时，"1"通常省略不写，例如 ab^2 和 $-abc$ 的系数分别是 1、-1；

(2) 单项式的系数是带分数时，通常写成假分数，如 $\frac{5}{4}x^2y$ 不要写成 $1\frac{1}{4}x^2y$.

例 1 判断下列各代数式是不是单项式，如果不是，请说明理由；如果是，请指出它的系数与次数：

(1) $x+1$；　　(2) $-\frac{3}{2}a^2b$.

解 (1) $x+1$ 不是单项式，因为代数式中出现了加法运算.

(2) $-\frac{3}{2}a^2b$ 是单项式，它的系数是 $-\frac{3}{2}$，次数是 3.

练　习

1. 判断下列代数式是不是单项式：

(1) a；　(2) $-\frac{1}{2}$；　(3) $x+\frac{1}{2}$；　(4) $\frac{x}{3}$；　(5) xy.

2. 说出下列单项式的系数与次数：

(1) $5a^2$；　(2) mn；　(3) $-\frac{7}{2}ab^2c$；　(4) $-\frac{2x^2y}{3}$.

3. 判断下列说法是否正确，如果不正确，请说明理由：

(1) 单项式 m 既没有系数，也没有次数；

(2) 单项式 5×10^5t 的系数是5.

2. 多项式

回忆

列代数式：

(1) 若三角形的三条边长分别为 a、b、c，则三角形的周长是________；

(2) 某班有男生 x 人，女生 21 人，这个班的学生一共有________人；

(3) 图 3.3.1 中阴影部分的面积为________.

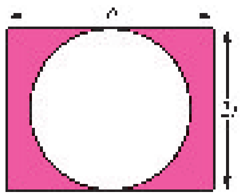


图 3.3.1

> 列出的这些代数式有什么共同特点？它们与单项式有什么区别？

概括

上面列出的代数式都是由几个单项式相加而成的. 几个单项式的和叫做**多项式**(polynomial). 其中，每个单项式叫做多项式的**项**(term)，不含字母的项叫做**常数项**(constant term). 例如，多项式 $3x^2-2x+5$ 有三项，它们是 $3x^2$、$-2x$、5，其中 5 是常数项.

一个多项式含有几项，就叫做几项式. 多项式里，次数最高项的次数，就是这个多项式的次数. 例如，多项式 $3x^2-2x+5$ 是一个二次三项式.

例 2 指出下列多项式的项与次数：

(1) $a^3-a^2b+ab^2-b^3$；

(2) $3n^4-2n^2+1$.

解 (1) 多项式 $a^3-a^2b+ab^2-b^3$ 的项有 a^3、$-a^2b$、ab^2、$-b^3$，次数是 3.

(2) 多项式 $3n^4-2n^2+1$ 的项有 $3n^4$、$-2n^2$、1，次数是 4.

注意：多项式的每一项都包括它的正负号.

例 3 指出下列多项式是几次几项式：

(1) x^3-x+1；

(2) $x^3-2x^2y^2+3y^2$.

解 (1) x^3-x+1 是三次三项式.

(2) $x^3-2x^2y^2+3y^2$ 是四次三项式.

单项式与多项式统称**整式**(integral expression).

练习

指出下列多项式是几次几项式：

1. $2x+1+3x^2$.

2. $4x^4+1$.

3. $2x^2-3xy+y^2$.

4. $4x^3+2x-3y^2$.

3. 升幂排列与降幂排列

试一试

运用加法交换律，任意交换多项式 x^2+x+1 中各项的位置，可以得到哪些不同的排列方式？在众多的排列方式中，你认为哪几种比较有规律？

概括

在众多的排列方式中,像 x^2+x+1 与 $1+x+x^2$ 这样的排列比较有规律.

这两种排列有一个共同特点,那就是 x 的指数是逐项变小(或变大)的. 其实,这样整齐的写法除了美观之外,还会为计算带来方便. 因而我们常常把一个多项式各项的位置按照其中某一字母指数的大小顺序来排列. 例如,把多项式 $5x^2+3x-2x^3-1$ 按 x 的指数从大到小的顺序排列,则写成

$$-2x^3+5x^2+3x-1.$$

这叫做这个多项式按字母 x 的**降幂排列**.

若按 x 的指数从小到大的顺序排列,则写成

$$-1+3x+5x^2-2x^3.$$

这叫做这个多项式按字母 x 的**升幂排列**.

x^2+x+1 是按 x 的降幂排列,$1+x+x^2$ 是按 x 的升幂排列.

这两种排列方式有什么特点?

例 4 把多项式 $2r-1+\frac{4}{3}r^3-r^2$ 按 r 的升幂排列.

解 按 r 的升幂排列为:

$$-1+2r-r^2+\frac{4}{3}r^3.$$

例 5 把多项式 $a^3+b^2-3a^2b-3ab^3$ 重新排列:

(1) 按 a 的升幂排列;

(2) 按 a 的降幂排列.

解 (1) 按 a 的升幂排列为:

$$b^2-3ab^3-3a^2b+a^3.$$

(2) 按 a 的降幂排列为:

$$a^3-3a^2b-3ab^3+b^2.$$

试试看,你能将这个多项式按 b 的升(或降)幂排列吗?

注意

（1）重新排列多项式时，每一项一定要连同它的正负号一起移动；

（2）含有两个或两个以上字母的多项式，常常按照其中某一字母的升幂排列或降幂排列.

练　习

1. 把多项式 $2x^2+\frac{2}{5}x^3+x-5x^4-\frac{1}{3}$ 重新排列：

（1）按 x 的升幂排列；　　（2）按 x 的降幂排列.

2. 把多项式 $x^4-y^4+3x^3y-2xy^2-5x^2y^3$ 重新排列：

（1）按 x 的降幂排列；　　（2）按 y 的降幂排列.

习题 3.3

1. 填表：

单项式	a	$-x$	$\frac{1}{2}abc$	$-\frac{a^2b^3}{3}$
系　数				
次　数				

2. 指出下列多项式是几次几项式：

（1）$4a^2+3a-1$；　　（2）$3a-2ab+4b$.

3. 指出下列多项式的项与次数：

（1）$\frac{2}{3}xy-\frac{1}{4}$；　　（2）$a^2+2a^2b+ab^2-b^2$；

（3）$2m^3n^3-3m^2n^2+\frac{5}{3}mn$.

4. 把多项式 $\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{3}-3x+\frac{1}{2}x^3$ 按 x 的升幂排列.

5. 把多项式 $2x^3y-4y^2+5x^2$ 重新排列：

(1) 按 x 的降幂排列；

(2) 按 y 的升幂排列.

3.4 整式的加减

1. 同类项

回忆

前面我们学过多项式的项. 例如，多项式 $3x^2y-4xy^2-3+5x^2y+2xy^2+5$ 有 6 项，它们分别是

$$3x^2y,\ -4xy^2,\ -3,\ 5x^2y,\ 2xy^2,\ 5.$$

我们常常把具有相同特征的事物归为一类. 在多项式的各个项中，也可以把具有相同特征的项归为一类. 在上述多项式的 6 项中，通常可以把 $3x^2y$ 与 $5x^2y$ 归为一类，$-4xy^2$ 与 $2xy^2$ 归为一类，-3 与 5 归为一类.

这些被归为同一类的项有什么相同特征？

概括

$3x^2y$ 与 $5x^2y$ 所含的字母相同（都是 x、y），并且 x 的指数都是 2，y 的指数都是 1；同样地，$-4xy^2$ 与 $2xy^2$ 所含的字母也相同，并且 x 的指数都是 1，y 的指数都是 2.

像这样，所含字母相同，并且相同字母的指数也相等的项叫做**同类项**（similar terms）.

所有的常数项都是同类项. 例如，前面提到的 -3 与 5 也是同类项.

例 1 指出下列多项式中的同类项：

(1) $3x-2y+1+3y-2x-5$；

(2) $3x^2y-2xy^2+\frac{1}{3}xy^2-\frac{3}{2}x^2y$.

解 (1) $3x$ 与 $-2x$ 是同类项，$-2y$ 与 $3y$ 是同类项，1 与 -5 是同类项.

(2) $3x^2y$ 与 $-\frac{3}{2}x^2y$ 是同类项，$-2xy^2$ 与 $\frac{1}{3}xy^2$ 是同类项.

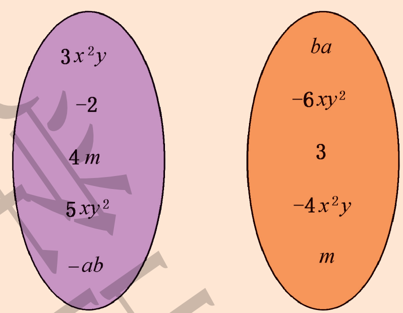
例 2 k 取何值时，$3x^ky$ 与 $-x^2y$ 是同类项？

解 要使 $3x^ky$ 与 $-x^2y$ 是同类项，这两项中 x 的指数就必须相等，即 $k=2$.

所以当 $k=2$ 时，$3x^ky$ 与 $-x^2y$ 是同类项.

练 习

1. 将如图所示的两个圈中的同类项用线连起来.
2. 写出 $3ab^2c^3$ 的一个同类项. 你能写出多少个？
3. k 取何值时，$-3x^2y^{3k}$ 与 $4x^2y^6$ 是同类项？



（第 1 题）

2. 合并同类项

观察

如果一个多项式中含有同类项，那么我们可以把同类项合并起来，使结果得以简化.

例如，可将同类项 $3x^2y$ 与 $5x^2y$ 合并成：

$$3x^2y+5x^2y=(3+5)x^2y=8x^2y.$$

对多项式 $3x^2y-4xy^2-3+5x^2y+2xy^2+5$，我们可以先运用加法交换律与结合律将同类项结合在一起，再将它们合并起来，化简整个多项式：

用记号标出各同类项，便于合并.

$$3x^2y-4xy^2-3+5x^2y+2xy^2+5$$

$$\begin{aligned}
&=3x^2y+5x^2y-4xy^2+2xy^2-3+5\\
&=(3x^2y+5x^2y)+(-4xy^2+2xy^2)+(-3+5)\\
&=(3+5)x^2y+(-4+2)xy^2+(-3+5)\\
&=8x^2y-2xy^2+2.
\end{aligned}$$

你能归纳出合并同类项的一般法则吗？

概括

合并同类项的法则：

把同类项的系数相加，所得的结果作为系数，字母和字母的指数保持不变.

例 3 合并下列多项式中的同类项：

(1) $2a^2b-3a^2b+\frac{1}{2}a^2b$；

(2) $a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$.

解 (1) $2a^2b-3a^2b+\frac{1}{2}a^2b$

$$=\left(2-3+\frac{1}{2}\right)a^2b$$

$$=-\frac{1}{2}a^2b.$$

(2) $a^3\underline{-a^2b}\,\underline{\underline{+ab^2}}\,\underline{+a^2b}\,\underline{\underline{-ab^2}}+b^3$

$$\begin{aligned}
&=a^3+(-a^2b+a^2b)+(ab^2-ab^2)+b^3\\
&=a^3+(-1+1)a^2b+(1-1)ab^2+b^3\\
&=a^3+b^3.
\end{aligned}$$

例 4 求多项式 $3x^2+4x-2x^2-x+x^2-3x-1$ 的值,其中 $x=-3$.

先合并同类项,再求值,比较简便.

解 $3x^2+4x-2x^2-x+x^2-3x-1$

$=(3-2+1)x^2+(4-1-3)x-1$

$=2x^2-1$.

当 $x=-3$ 时,原式 $=2\times(-3)^2-1=17$.

试一试

如果 $x=0$,如何求值比较简便?

把 $x=-3$ 直接代入例 4 中的多项式,求出它的值.与上面的解法比较一下,哪个解法更简便?

我们回到本章导图中提出的问题:

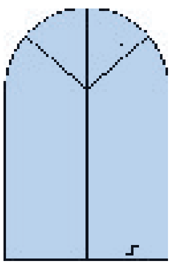


图 3.4.1

例 5 如图 3.4.1 所示的窗框,上半部分为半圆,下半部分为 6 个大小一样的长方形,长方形的长和宽的比为 3∶2.

(1) 设长方形的长为 x 米,用 x 表示所需材料的长度(重合部分忽略不计);

(2) 分别求出当长方形的长为 0.4 米、0.5 米、0.6 米时,所需材料的长度(精确到 0.1 米,取 $\pi\approx3.14$).

解 (1) 设长方形的长为 x 米,则它的宽为 $\frac{2}{3}x$ 米.由图 3.4.1 不难知道,做这个窗框所需材料的长度为

$$11x+9\cdot\frac{2}{3}x+\pi x$$

$$=(11+6+\pi)x$$

$$=(17+\pi)x(米).$$

(2) 当 $x=0.4$ 时,

$$(17+\pi)x$$

$$\approx(17+3.14)\times0.4$$

$$=20.14\times0.4$$

$$=8.056\approx8.1.$$

所以,当长方形的长为0.4米时,所需材料的长度约为8.1米.

请同学们自己计算:当长方形的长分别为0.5米、0.6米时,所需材料的长度.

练　习

1. 如果两个同类项的系数互为相反数,那么合并同类项后,结果是________.
2. 先标出下列各多项式中的同类项,再合并同类项:
   (1) $3x-2x^2+5+3x^2-2x-5$;
   (2) $a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$;
   (3) $6a^2-5b^2+2ab+5b^2-6a^2$.
3. 求下列多项式的值:
   (1) $7x^2-3x^2-2x-2x^2+5+6x$,其中 $x=-2$;
   (2) $5a-2b+3b-4a-1$,其中 $a=-1$, $b=2$;
   (3) $2x^2-3xy+y^2-2xy-2x^2+5xy-2y+1$,其中 $x=\frac{22}{7}$, $y=-1$.

3. 去括号与添括号

回忆

第2章我们学过有理数的加法结合律,即有:

$$a+(b+c)=a+b+c. \quad ①$$

对于等式①,我们可以结合下面的实例来理解:

周三下午,校图书馆内起初有 a 位同学. 后来某年级组织同学阅读,第一批来了 b 位同学,第二批又来了 c 位同学,则图书馆内共有________位同学. 我们还可以这样理解:后来两批一共来了________位同学,因而图书馆内共有________位同学. 由于________和________均表示同一个量,于是,我们便可以得到等式①.

做一做

若图书馆内原有 a 位同学. 后来有些同学因上课要离开,第一批走了 b 位同学,第二批又走了 c 位同学. 试用两种方式写出图书馆内还剩下的同学数,你能从中发现什么关系?

从上面"做一做"所得到的结果,我们发现:

$$a-(b+c)=a-b-c. \qquad ②$$

观察

观察①、②两个等式中括号和各项正负号的变化,你能发现什么规律?

去括号后,括号内各项的正负号有什么变化?

括号没了,正负号没变

(1) $a+(b+c)=a+b+c.$

括号没了,正负号却变了

(2) $a-(b+c)=a-b-c.$

概括

通过观察与分析,可以得到去括号法则:

括号前面是"+"号,把括号和它前面的"+"号去掉,括号里各项都不改变正负号;

括号前面是"−"号,把括号和它前面的"−"号去掉,括号里各项都改变正负号.

例 6 去括号:

(1) $a+(b-c)$; (2) $a-(b-c)$;

(3) $a+(-b+c)$; (4) $a-(-b-c)$.

解 (1) $a+(b-c)=a+b-c.$

(2) $a-(b-c)=a-b+c.$

(3) $a+(-b+c)=a-b+c.$

(4) $a-(-b-c)=a+b+c.$

例 7 先去括号,再合并同类项:

(1) $(x+y-z)+(x-y+z)-(x-y-z)$;

(2) $(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$;

(3) $3(2x^2-y^2)-2(3y^2-2x^2)$.

解 (1) $(x+y-z)+(x-y+z)-(x-y-z)$

$=x+y-z+x-y+z-x+y+z$

$=x+y+z.$

(2) $(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$

$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$

$=4ab.$

(3) $3(2x^2-y^2)-2(3y^2-2x^2)$

$=6x^2-3y^2-6y^2+4x^2$

$=10x^2-9y^2.$

练　习

1. 去括号:

(1) $(a-b)+(-c-d)$;

(2) $(a-b)-(-c-d)$;

(3) $-(a-b)+(-c-d)$;

(4) $-(a-b)-(-c-d)$.

2. 判断下列去括号是否正确,如果不正确,请说明错在哪里,并加以改正:

(1) $a-(b-c)=a-b-c$;

(2) $-(a-b+c)=-a+b-c$;

(3) $c+2(a-b)=c+2a-b$.

3. 化简:

(1) $a^2-2(ab-b^2)-b^2$;

(2) $(x^2-y^2)-3(2x^2-3y^2)$;

(3) $7a^2b-(-4a^2b+5ab^2)-2(2a^2b-3ab^2)$.

观察

随着括号的添加，括号内各项的正负号有什么变化？

分别把前面去括号的①、②两个等式中等号的两边对调，并观察对调后两个等式中括号和各项正负号的变化，你能得出什么结论？

正负号均不变

$$a+b+c=a+(b+c).$$

正负号均改变

$$a-b-c=a-(b+c).$$

概括

通过观察与分析，可以得到添括号法则：

所添括号前面是“+”号，括到括号里的各项都不改变正负号；

所添括号前面是“−”号，括到括号里的各项都改变正负号.

做一做

在括号内填入适当的项：

(1) $x^2-x+1=x^2-(\qquad\qquad)$；

(2) $2x^2-3x-1=2x^2+(\qquad\qquad)$；

(3) $(a-b)-(c-d)=a-(\qquad\qquad)$.

适当添加括号，可使计算简便.

例 8 计算：

(1) $214a+47a+53a$；　　(2) $214a-39a-61a$.

解 (1)

$$\begin{aligned}&214a+47a+53a\\=&214a+(47a+53a)\\=&214a+100a\\=&314a.\end{aligned}$$

(2) $214a-39a-61a$

$=214a-(39a+61a)$

$=214a-100a$

$=114a.$

注意

添括号与去括号的过程正好相反，添括号是否正确，不妨用去括号检验一下.

练 习

1. 计算：

(1) $117x+138x-38x$;　　(2) $125x-64x-36x$;

(3) $136x-87x+57x$.

2. 在下列各式的括号内填上恰当的项：

(1) $3x^2-2xy^2+2y^2=3x^2-(\qquad)$;

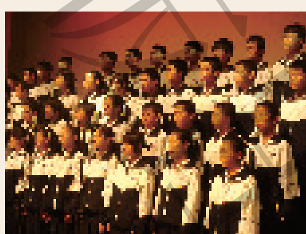
(2) $3x^2y^2-2x^3+y^3=3x^2y^2-(\qquad)$;

(3) $-a^3+2a^2-a+1=-(\qquad)-(\qquad)$.

4. 整式的加减

做一做

某中学合唱团出场时第一排站了 n 名同学，从第二排起每一排都比前一排多 1 人，一共站了四排，则该合唱团一共有________名同学参加演唱.



怎样进行整式的加减运算呢?

容易知道,第二、三、四排的人数分别为 $n+1$、$n+2$、$n+3$. 因而该合唱团参加演唱的总人数为

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3).$$

要把这个式子进一步化简,实际上是要进行整式的加减运算.

思考

在解本节的例 7 时,我们所做的实质上就是整式的加减运算. 结合已有的知识和经验,你能总结出整式加减运算的一般步骤吗?

概括

去括号和合并同类项是整式加减的基础. 整式加减运算的一般步骤是:

先去括号,再合并同类项.

例 9 求整式 x^2-7x-2 与 $-2x^2+4x-1$ 的差.

解

$$\begin{aligned}&(x^2-7x-2)-(-2x^2+4x-1)\\=\ &x^2-7x-2+2x^2-4x+1\\=\ &3x^2-11x-1.\end{aligned}$$

例 10 计算:$-2y^3+(3xy^2-x^2y)-2(xy^2-y^3)$.

解

$$\begin{aligned}&-2y^3+(3xy^2-x^2y)-2(xy^2-y^3)\\=\ &-2y^3+3xy^2-x^2y-2xy^2+2y^3\\=\ &xy^2-x^2y.\end{aligned}$$

例 11 先化简,再求值:$2x^2y-3xy^2+4x^2y-5xy^2$,其中 $x=1$, $y=-1$.

解

$$\begin{aligned}&2x^2y-3xy^2+4x^2y-5xy^2\\=\ &(2x^2y+4x^2y)-(3xy^2+5xy^2)\\=\ &6x^2y-8xy^2.\end{aligned}$$

当 $x=1$，$y=-1$ 时，

原式 $=6\times1^2\times(-1)-8\times1\times(-1)^2$

$=-14.$

练　习

1. 填空：

(1) $3x-(-2x)=$ ________；

(2) $-2x^2-3x^2=$ ________；

(3) $-4xy-(-2xy)=$ ________.

2. 计算：

(1) $2x^2y^3+(-4x^2y^3)-(-3x^2y^3)$；

(2) $(3x^2+x-5)-(4-x+7x^2)$；

(3) $(8xy-3y^2)-5xy-2(3xy-2x^2)$.

3. 先化简，再求值：

(1) $2a^2-b^2+(2b^2-a^2)-(a^2+2b^2)$，其中 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=3$；

(2) $5(3x^2y-xy^2)-(xy^2+3x^2y)$，其中 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=-1$.

习题 3.4

1. 判断下列各题中的两项是不是同类项：

(1) 4 与 $-\dfrac{1}{2}$；　　(2) 3^2 与 a^2；

(3) $2x$ 与 $\dfrac{2}{x}$；　　(4) $3mn$ 与 $3mnp$；

(5) $2\pi x$ 与 $-3x$；　　(6) $3a^2b$ 与 $3ab^2$.

2. m 和 n 分别取何值时，$2x^my^3$ 与 $-3xy^{3n}$ 是同类项？

3. 指出多项式 $3x^2-2xy+y^2-x^2+2xy$ 中的同类项.

4. 下列合并同类项是否正确？若不正确，请改正：

(1) $2x+4x=8x^2$；　　(2) $3x+2y=5xy$；

(3) $7x^2-3x^2=4$；　　(4) $9a^2b-9ba^2=0$.

5. 合并同类项：

(1) $-3a+5a-6a$；

(2) $2ax^2-3ax^2-7ax^2$；

(3) $2x^2+1-3x+7-3x^2+5x$；

(4) $7xy-x^2+2x^2-5xy-3x^2$.

6. 先合并同类项，再求各多项式的值：

(1) $4a^2-4a+1-4+12a-9a^2$，其中 $a=-1$；

(2) $9a^2-12ab+4b^2-4a^2-12ab-9b^2$，其中 $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$.

7. 先去括号，再合并同类项：

(1) $(x-1)-(2x+1)$；

(2) $3(x-2)+2(1-2x)$；

(3) $2(2b-3a)+3(2a-3b)$；

(4) $(3x^2-xy-2y^2)-2(x^2+xy-2y^2)$.

8. 先化简，再求值：

(1) $3x^2+(2x^2-3x)-(-x+5x^2)$，其中 $x=314$；

(2) $(5xy-8x^2)-(-12x^2+4xy)$，其中 $x=-\frac{1}{2}$，$y=2$.

9. 在下列各式的括号内填上恰当的项：

(1) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=x^3+(\qquad\qquad)$；

(2) $2-x^2+2xy-y^2=2-(\qquad\qquad)$.

10. 把多项式 $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3+1$ 写成两个整式的和，使其中一个不含字母 x.

11. 计算：

(1) $\frac{3}{2}x^2-\left(-\frac{1}{2}x^2\right)+(-2x^2)$；

(2) $(9x^2-3+2x)+(-x-5+2x^2)$；

(3) $(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)$；

(4) $2(x-3x^2+1)-3(2x^2-x-2)$.

12. 已知 $M=3x^2-2xy+y^2$，$N=2x^2+xy-3y^2$，求：

(1) $M-N$；　　　　(2) $M+N$.

13. 先化简，再求值：

(1) $5x^2-[3x-2(2x-3)+7x^2]$，其中 $x=\frac{1}{2}$；

(2) $\frac{1}{2}x-\left(2x-\frac{2}{3}y^2\right)+\left(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y^2\right)$，其中 $x=-\frac{1}{4}$，$y=-\frac{1}{2}$.

阅读材料

用分离系数法进行整式的加减运算

我们已经学过整式的加减，知道整式的加减可以归结为合并同类项. 而合并同类项实际上就是合并各同类项的系数. 因此，进行整式的加减，关键就是把各同类项的系数进行加减.

如果把两个整式的各同类项对齐，我们就可以像小学时列竖式进行加减法一样，来进行整式的加减运算了.

怎样把各同类项对齐呢？其实，只要将参加运算的整式按同一字母进行降幂排列，凡缺项则留出空位或添零，然后让常数项对齐（即右对齐）即可. 例如，计算

$$(x^3-2x^2-5)+(x-2x^2-1)$$

及

$$(x^3-2x^2-5)-(x-2x^2-1)$$

时，我们可以分别用下列竖式计算：

$$\begin{array}{rrrrr} & x^3 & -2x^2 & & -5 \\ +) & & -2x^2 & +x & -1 \\ \hline & x^3 & -4x^2 & +x & -6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & x^3 & -2x^2 & & -5 \\ -) & & -2x^2 & +x & -1 \\ \hline & x^3 & & -x & -4 \end{array}$$

我们发现，参与加减运算的整式都按同一字母的降幂排列后，各项排列的位置完全表示它们所含该字母的幂的次数. 基于这个事实，我们可以不再写出字母及其指数，只需写出系数，计算出结果后，再把字母和相应的指数补充上去，从而使演算过程简化. 这种方法叫做**分离系数法**.

按分离系数法，上面第一个例题的演算过程可以简化为：

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & -2 & +0 & -5 \\ +) & & -2 & +1 & -1 \\ \hline & 1 & -4 & +1 & -6 \end{array}$$

所以 $\quad (x^3-2x^2-5)+(x-2x^2-1)=x^3-4x^2+x-6.$

第二个例题也可如此简化.

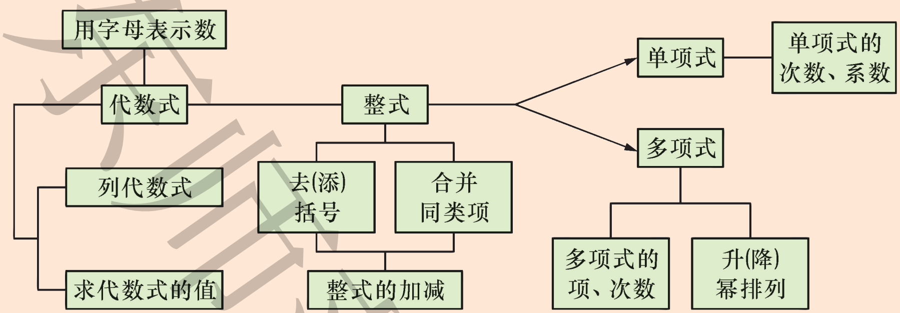
试一试

用分离系数法计算：

（1）$(2x^2-x-3)+(5-4x+x^2)$；（2）$(3y^3-5y^2-6)-(y-2+3y^2)$.

小结

一、知识结构



二、要点

1. 用字母表示数,从数的研究过渡到代数式的研究,是数学发展的一次飞跃. 代数式及其运算,是进一步学习数学(方程、不等式、函数等)的基础,也是解决实际问题的工具. 学习时要注意联系实际,体会从具体到抽象、从特殊到一般的思想方法.

2. 整式包括单项式和多项式. 多项式可以看作几个单项式的和,其中的每一个单项式是多项式的项. 多项式的项(单项式)的系数包括正负号,在进行整式运算时不容忽视.

3. 整式的加减运算是本章学习的又一个重点. 去括号和合并同类项是整式加减的基础.

4. 去(添)括号时,要特别注意括号前面是“－”号的情形:去括号时,括号里各项都改变正负号;添括号时,括到括号里的各项都改变正负号.

复习题

A组

1. 填空：

(1) 如果 a 表示一个有理数，那么它的相反数是________；

(2) 如果 n 表示一个自然数，那么它的后一个自然数是________；

(3) 一个正方形的边长是 a cm，把这个正方形的边长增加 1 cm 后所得到的正方形的面积是________；

(4) 某商品原价是 x 元，提价 10% 后的价格是________；

(5) 如果一个两位数的十位数字是 a，个位数字是 b，那么这个两位数可表示为________；

(6) 如果甲、乙两人分别从相距 s 千米的 A、B 两地同时出发相向而行，他们的速度分别为 a 千米/时与 b 千米/时，那么他们从出发到相遇所需要的时间为________.

2. 用代数式表示：

(1) a 的 3 倍与 b 的平方的差；

(2) x 与 y 平方的和；

(3) x、y 两数的平方和减去它们积的 2 倍；

(4) x 的相反数与 y 的倒数的和.

3. 填表：

x	-2	-1	0	1	2
$-2x+1$					
x^2-1					

4. 若某班同学在体育达标检测中，达标率为 p，达标人数为 n，则总人数为________. 若 $p=88\%$，$n=44$，则这个班有________人.

5. 填表：

单项式	x	$-x^2y$	$-\dfrac{x^2y^3}{3}$	$\dfrac{3}{2}ax^2$
系　数				
次　数				

6. 填表：

多项式	x^2-1	x^2-2x+3	x^2-xyz
次　数			
项　数			
项			

7. 将下列多项式按 x 的降幂排列：

(1) $3-2x^2+x$；　　(2) $-2xy+x^2+y^2$；

(3) $2x-1-x^3$；　　(4) $2x^2y-3xy^2-x^3+2y^3$.

8. 合并同类项：

(1) $2ax+3by-4ax+3by-2ax$；　　(2) $-2x^2+x-3+x^2-3x$；

(3) $3x^2y-xy^2-2x^2y+3xy^2$.

9. 填空(去括号或添括号)：

(1) $2a+3(b-c)=$ ________；　　(2) $2a-3(b-c)=$ ________；

(3) $x^2-xy+y^2=x^2-($ ________ $)$；　　(4) $x^2-xy+y^2=x^2+($ ________ $)$.

10. 化简：

(1) $3x+2x^2-2-15x^2+1-5x$；

(2) $3x^2+2xy-4y^2-3xy+4y^2-3x^2$；

(3) $-7x^2+(6x^2-5xy)-(3y^2+xy-x^2)$；

(4) $(2x^2-5x)-(3x+5-2x^2)$.

11. 先化简，再求值：

(1) $3x^3-[x^3+(6x^2-7x)]-2(x^3-3x^2-4x)$，其中 $x=-1$；

(2) $\frac{1}{3}x^2-\left(3x^2+3xy-\frac{3}{5}y^2\right)+\left(\frac{8}{3}x^2+3xy+\frac{2}{5}y^2\right)$，其中 $x=-\frac{1}{2}$，$y=2$.

B组

12. 已知多项式 $A=4x^2-4xy+y^2$，$B=x^2+xy-5y^2$，求：

(1) $A-3B$；　　(2) $3A+B$.

13. 把 $(x-y)$ 看作一个整体，化简：

(1) $5(x-y)+2(x-y)-4(x-y)$；

(2) $3(x-y)^2-4(x-y)+7(x-y)-6(x-y)^2$.

14. 有这样一道题:“求 $(2x^3-3x^2y-2xy^2)-(x^3-2xy^2+y^3)+(-x^3+3x^2y-y^3)$ 的值,其中 $x=\frac{1}{2}$, $y=-1$.” 甲同学把“$x=\frac{1}{2}$”错抄成“$x=-\frac{1}{2}$”, 但他计算的结果却是正确的. 这是怎么回事呢?

15. 一个两位数,它的十位数字为 a,个位数字为 b. 若把它的十位数字与个位数字对调,将得到一个新的两位数.

(1) 计算新数与原数的和,这个和能被 11 整除吗? 为什么?

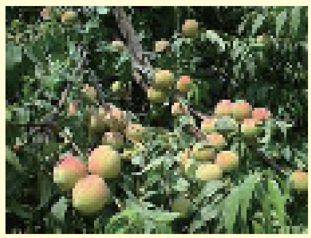
(2) 计算新数与原数的差,这个差有什么性质?

C组

16. x 表示一个两位数,y 表示一个三位数,把 x 放在 y 的右边组成一个五位数,则这个五位数可以表示为________.

17. 代数式 x^2+x+3 的值为 7,则代数式 $2x^2+2x-3$ 的值为________.

18. 一棵桃树结了 m 个桃子,有三只猴子先后来摘桃. 第一只猴子摘走$\frac{1}{5}$,再从树上摘一个吃掉;第二只猴子摘走剩下的$\frac{1}{5}$,再从树上摘一个吃掉;第三只猴子再摘走剩下的$\frac{1}{5}$,再从树上摘一个吃掉. 用代数式表示树上最后剩下的桃子数.



(第 18 题)

19. 某移动电话公司给用户提供了各种手机资费套餐,其中两个如下表所列:

套餐使用费(单位:元/月)	套餐内包含国内主叫通话时长(单位:分钟)	套餐外国内主叫通话单价(单位:元/分钟)	国内被叫	套餐内包含国内数据流量(单位:兆)	套餐外国内数据流量单价(单位:元/兆)
58	150	0.25	免费	30	0.50
88	350	0.19	免费	30	0.50

(1) 如果某用户某月国内主叫通话总时长为 x 分钟,使用国内数据流量为 y 兆(字节),请分别写出两种套餐收费方式下该用户应该支付的费用(假定 $150\leqslant x\leqslant 350$, $y\geqslant 30$).

(2) 如果某用户某月国内主叫通话总时长为 250 分钟,使用国内数据流量为 90 兆(字节),上述两种套餐中他选哪一种较为合算?

综合与实践

身份证号码与学籍号

为了把众多的对象区分开来，人们需要使用一些方法. 如每个家庭都有一本户口簿，这样就把一个个家庭区分开来. 我们国家为了更仔细地区分每一个人，1987 年实行了身份证制度，每一个公民都有一个身份证号码. 2004 年《中华人民共和国居民身份证法》正式施行，并开始换发第二代身份证. 现在请你参加下面的调查和设计活动.

(1) 尽可能多地收集一些人（如亲属、朋友等）的身份证号码.

(2) 仔细观察各个身份证号码的相同之处与不同之处，看看身份证号码是如何反映每一个人的各种信息的.

(3) 帮助你们学校教务处的老师，为每一个学生设计一个学籍号码，反映出入学年份、班级、性别等信息，使得每一个同学都有自己相应的学籍号码.

(4) 检查一下，你设计的学籍号码是否合理. 再与其他同学相互比比看，谁的设计更为简洁有效.

第 4 章　图形的初步认识

观察我们周围的环境，就会发现建筑物的形状千姿百态.

这些千姿百态的建筑物美化了我们生活的空间，同时也带给我们许多遐想：建筑师是怎样设计创造的呢？这其中蕴涵着许多有关图形的知识.

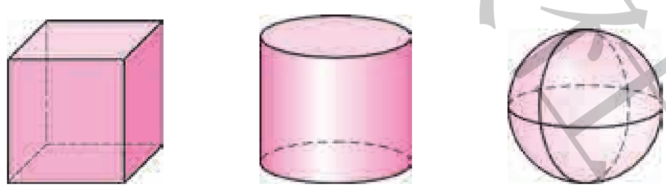
本章我们将认识一些常见的立体图形，研究基本的平面图形.

4.1 生活中的立体图形

我们生活在三维的世界中，随时随地看到的和接触到的物体都是立体的. 有些物体，像石头、植物等呈现出极不规则的奇形怪状. 也有许多物体具有较为规则的形状，如自然界中存在的橙子、苹果、西瓜等；还有人类创造的，如蒙古包、钟楼、埃及金字塔、易拉罐、蛋筒冰淇淋等.

你还能举出类似的例子吗？比一比，看谁举得多.

仔细观察上图，我们可以发现这些物体可以抽象成某些立体图形，它们分别与图 4.1.1 中的一些立体图形相类似. 相信你都认识这些立体图形. 我们把图 4.1.1 中(1)、(2)所表示的立体图形叫做**柱体**(cylinder)；(4)、(5)所表示的立体图形叫做**锥体**(cone)；(3)表示的立体图形则叫做**球体**(sphere). 你能找出和这些立体图形相类似的物体吗？



(1)　　(2)　　(3)

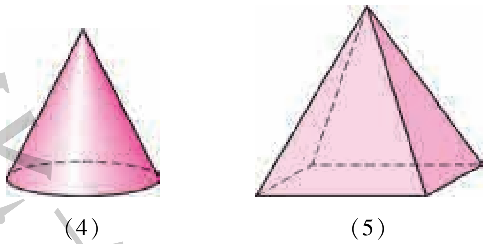


图 4.1.1

你能叫出图4.1.1中立体图形的“名字”吗?

我们可以发现,图4.1.1中的(1)、(2)都是柱体,但还是有一定的差别:(1)表示的图形称为**棱柱**(prism),(2)表示的图形称为**圆柱**(circular cylinder). 同样(4)、(5)都是锥体,但(4)表示的图形称为**圆锥**(circular cone),(5)表示的图形称为**棱锥**(pyramid).

它们的差别在哪里?

如图4.1.2,棱柱有三棱柱、四棱柱、五棱柱、六棱柱……棱锥也有三棱锥、四棱锥、五棱锥、六棱锥……

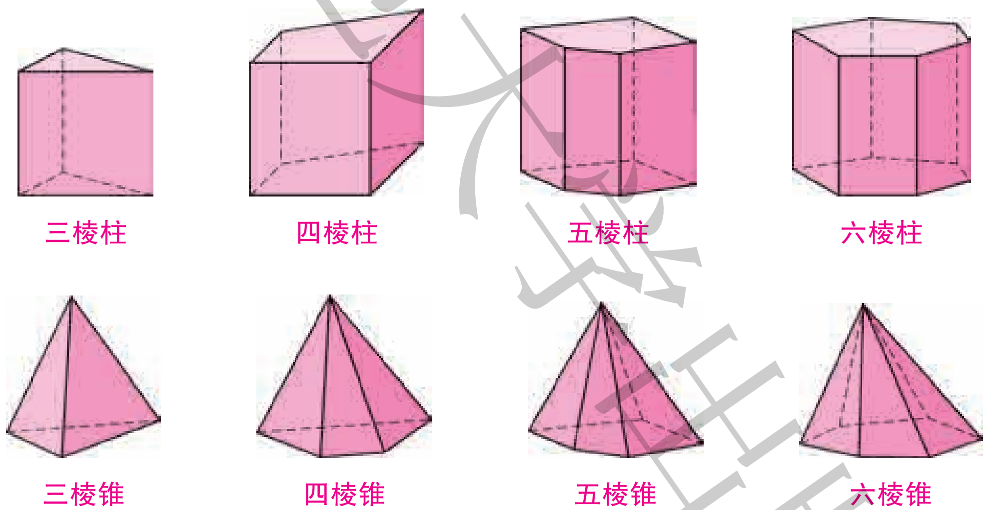


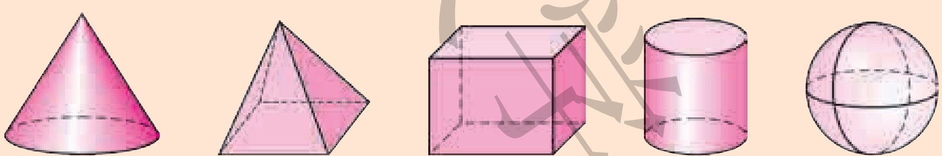
图 4.1.2

我们还可以发现,图4.1.1中的(1)和(5)与(2)、(3)、(4)存在一定的差异,围成(1)和(5)的每一个面都是平的,像这样的立体图形,又称为**多面体**(polyhedron).

练　习

1. 下列图形中,上面是一些具体的物体,下面是一些立体图形,试找出与下面立体图形相类似的实物.

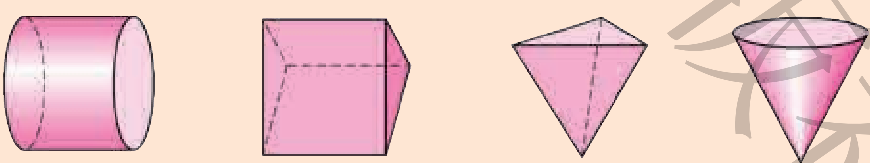
实　物



立体图形

(第 1 题)

2. 写出下列立体图形的名称.

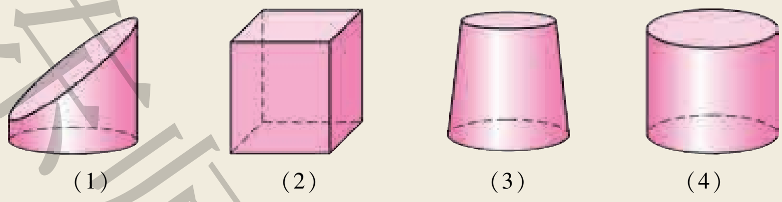


(第 2 题)

3. 用牙签和橡皮泥制作三棱柱、三棱锥、四棱柱、四棱锥.

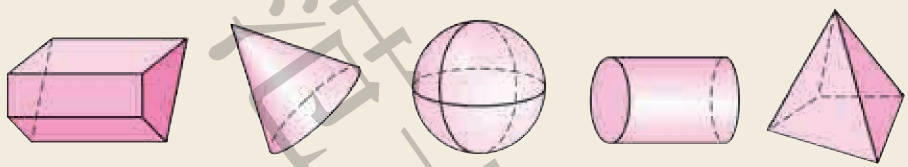
习题 4.1

1. 举 5 个生活中的形状较为规则的物体,并说出和它相类似的立体图形.
2. 下面图形中为圆柱的是________.



(第 2 题)

3. 把图形与对应的图形名称用线连起来:



圆锥　　圆柱　　棱柱　　棱锥　　球

(第 3 题)

4.2 立体图形的视图

1. 由立体图形到视图

工人在建造房子之前,首先要看房子的图纸. 但在平面上画空间的物体不是一件简单的事,因为必须把它画得从各个角度都能看得很清楚. 为了解决这个问题,可以采用三视图法. 建筑工程师和工人为了描绘和制造各种物体,常常使用这种方法.

视图(view)来自于投影. 投影现象广泛存在于我们日常生活中,如图4.2.1,在灯光下,将两手交叉握紧,墙上就会出现动物头部的影子;如图4.2.2,在阳光下,会看到自己身体的影子. 灯光的光线可以看作是从一点发出的,我们称这种投影为中心投影;而太阳的光线可以看作是平行的,我们称这种投影为平行投影.

图4.2.1

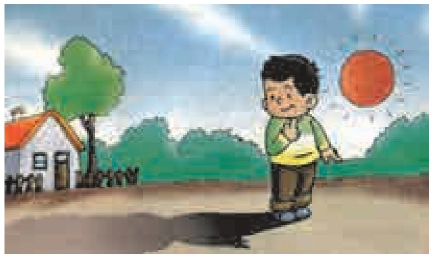


图4.2.2

视图是一种特殊的平行投影. 如图4.2.3是三个立体图形在一个面的视图.

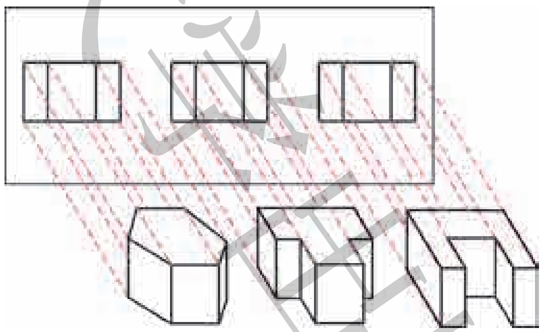


图4.2.3

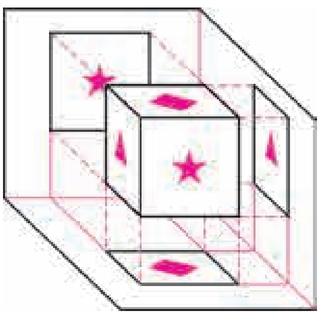


图4.2.4

如图4.2.4,从正面、上面和侧面(左面或右面)三个不同的方向进行平行投影,可以得到三个投影,这样就可以用平面图形去刻画一个立体图形了.

从正面得到的投影,称为主视图;从上面得到的投影,称为俯视图;从侧面得到的投影,称为侧视图,依投影方向不同,有左视图和右视图. 通常将主视图、俯视图与左(或右)视图称做一个物体的三视图.

如图 4.2.5 是一个螺栓. 图 4.2.6 就是它的三视图，工人可以根据这三个图形制造出这个螺栓.

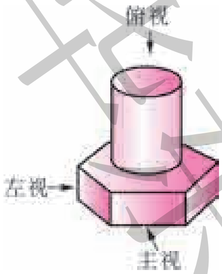


图 4.2.5

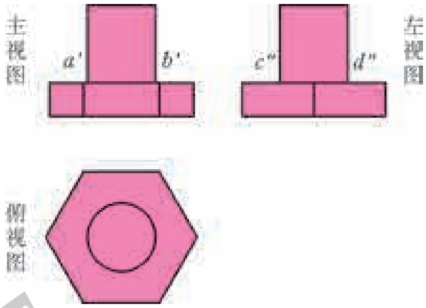


图 4.2.6

例 1 画出如图 4.2.7 和图 4.2.8 所示的正方体和圆柱的三视图.

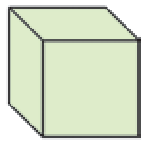


图 4.2.7

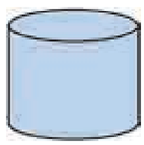


图 4.2.8

解 如图 4.2.9，正方体的三视图都是正方形.

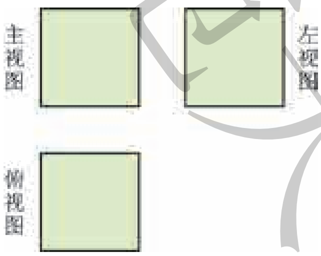


图 4.2.9

如图 4.2.10，圆柱的主视图和左视图都是长方形，俯视图是圆.

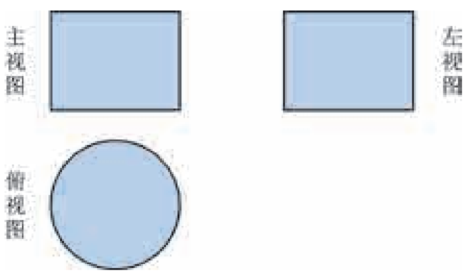


图 4.2.10

试一试

观察粉笔盒、茶叶盒，试着画出它们的三视图.

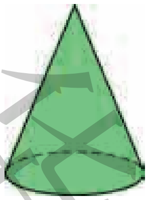


图 4.2.11

例 2 画出如图 4.2.11 所示的圆锥的三视图.

解 圆锥的三视图如图 4.2.12 所示.

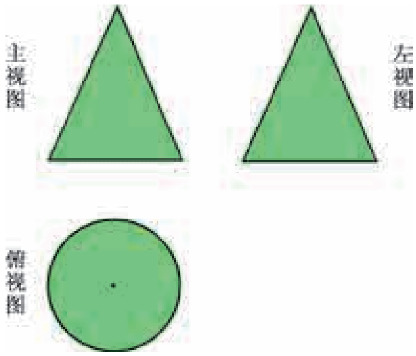
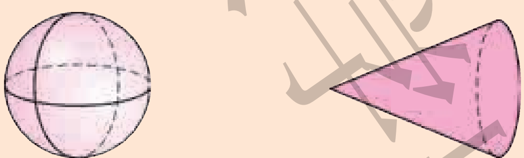


图 4.2.12

三视图法是描述立体图形的一种方法，以后，还会学习更多的其他方法.

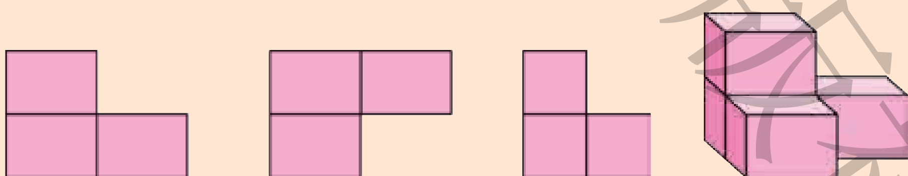
练　习

1. 画出下列立体图形的三视图.



（第 1 题）

2. 图中右边是由四个相同的小长方体堆成的物体，试指出左边三个平面图形分别是这个物体的三视图中的哪个视图.



(　　)　　(　　)　　(　　)

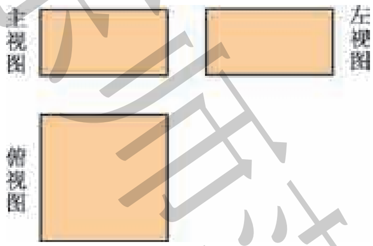
（第 2 题）

2. 由视图到立体图形

现在我们来根据视图想象物体的形状. 让我们先观察一些较为简单的、熟悉的物体的视图.

例 3 图 4. 2. 13 所示的是一些立体图形的三视图,请根据视图说出立体图形的名称.

(1)



(2)

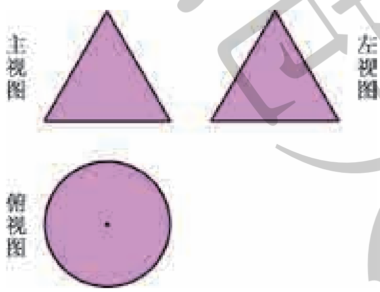


图 4. 2. 13

解 (1) 该立体图形是长方体,如图 4. 2. 14 所示.

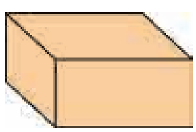


图 4. 2. 14

(2) 该立体图形是圆锥,如图 4. 2. 15 所示.

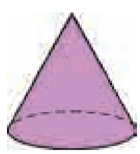


图 4. 2. 15

试一试

图 4.2.16 是一个物体的三视图，试想象该物体的形状.

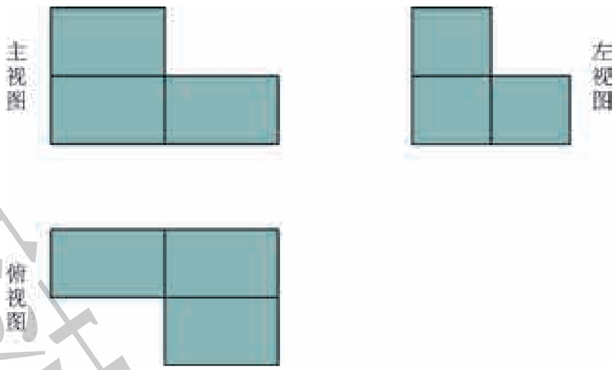


图 4.2.16

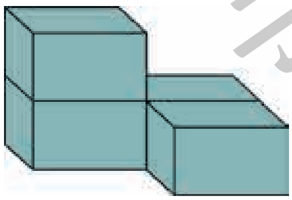
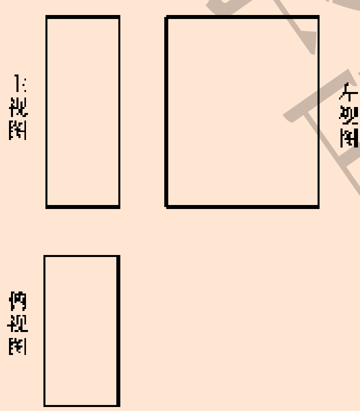


图 4.2.17

你想出的物体形状和图 4.2.17 所示的一样吗？

练　习

1. 如图是一个立体图形的三视图，请说出这个立体图形的名称，并画出它的大致形状.



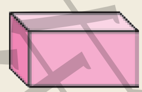
(第 1 题)

2. 试说出几个俯视图为一个圆的物体.

习题 4.2

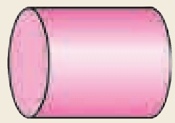
1. 根据要求画出下列立体图形的视图.

(1)



（画左视图）

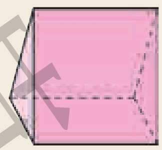
(2)



（画俯视图）

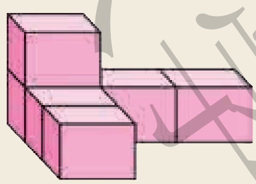
（第 1 题）

2. 画出下面立体图形的三视图.



（第 2 题）

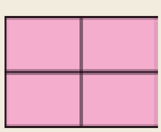
3. 如图是由 6 个相同的长方体堆成的物体，试画出这一物体的主视图.



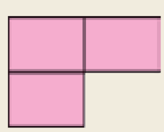
（第 3 题）

4. 改变第 3 题中物体的形状，使它的俯视图分别如下图所示：

(1)



(2)



（第 4 题）

试试看，还可能得到哪些俯视图？

4.3 立体图形的表面展开图

我们知道,圆柱的侧面展开图是长方形,而在实际生活中常常需要了解整个立体图形的表面展开的形状,如包装一个长方体形状的物体,需要根据它的表面展开图来裁剪纸张. 下面要讨论的是一些简单多面体的表面**展开图**.

试一试

图 4.3.1～4.3.3 的三个图是一些多面体的表面展开图,你能说出这些多面体的名称吗?

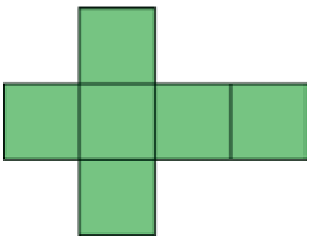


图 4.3.1

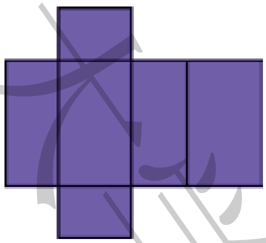


图 4.3.2

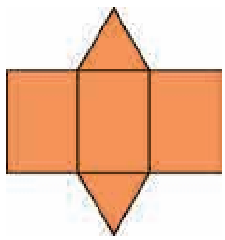


图 4.3.3

同一个立体图形,按不同的方式展开得到的表面展开图是不一样的. 想想看,图 4.3.4～4.3.9 的图形都是正方体的表面展开图吗?

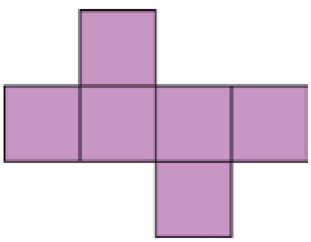


图 4.3.4

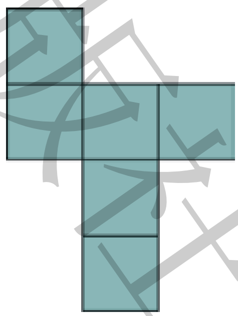


图 4.3.5

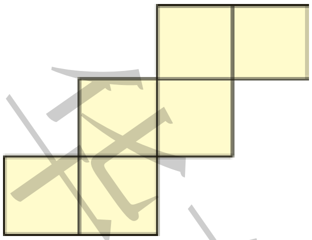


图 4.3.6

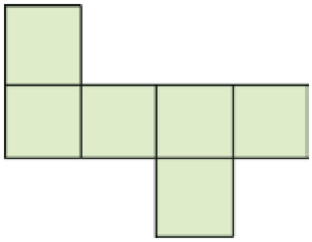


图 4.3.7

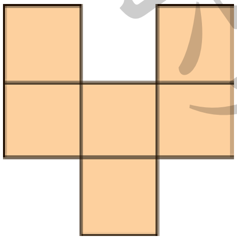


图 4.3.8

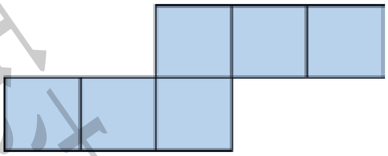
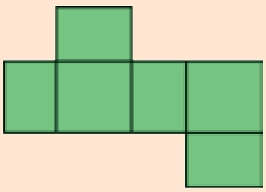


图 4.3.9

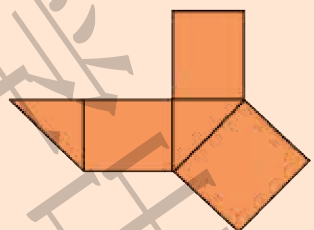
练　习

1. 下列图形是某些多面体的表面展开图,说出这些多面体的名称.

(1)



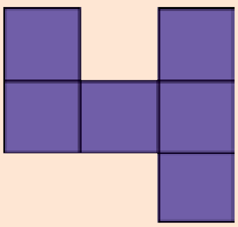
(2)



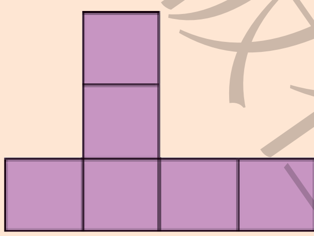
(第 1 题)

2. 下列图形都是正方体的表面展开图吗?

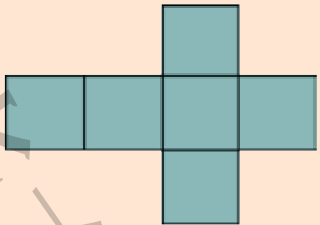
(1)



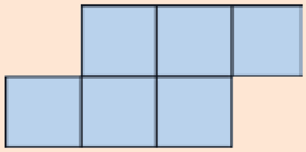
(2)



(3)



(4)



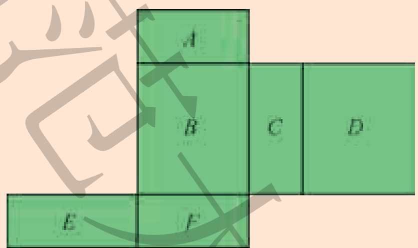
(第 2 题)

3. 下面是一个多面体的表面展开图，每个面内都标注了字母，请根据要求回答问题：

(1) 如果面 A 在多面体的底部，那么哪一面会在上面？

(2) 如果面 F 在前面，从左面看是面 B，那么哪一面会在上面？

(3) 如果从右面看是面 C，面 D 在后面，那么哪一面会在上面？

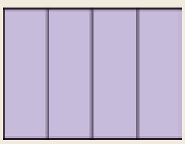


(第 3 题)

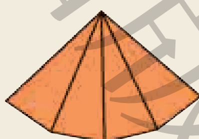
习题 4.3

1. 下面的图形中哪一个是四棱柱的侧面展开图？

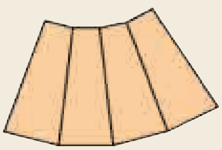
(1)



(2)

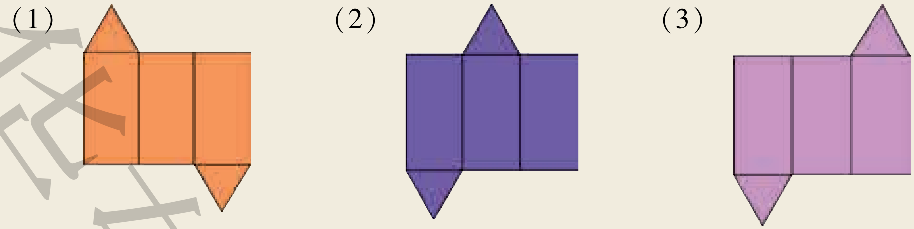


(3)



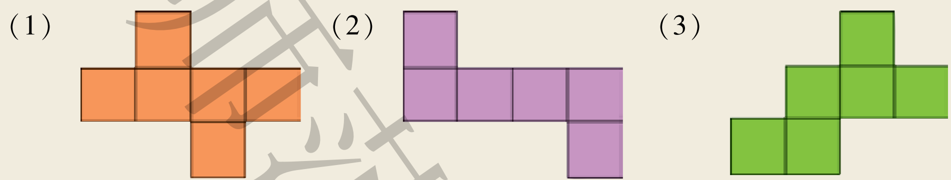
(第 1 题)

2. 下面的图形中有三棱柱的表面展开图吗?



(第 2 题)

3. 下面的图形都是由 6 个大小一样的正方形拼接而成的. 你还能画出一些其他不同的拼接图形吗? 这些图形中哪些可以折成正方体?



(第 3 题)

4.4 平面图形

通过前几节的学习,我们认识了由实际生活中所存在的各种物体抽象而成的许多立体图形,其中不少立体图形都是由平面图形围成的,而且可以通过某些平面图形描述它的形状和特性,因此研究立体图形往往从平面图形开始.

观察图 4.4.1 中所示的各物体,你能画出它们的表面轮廓线的形状吗?

你还能举出类似的例子吗?

图 4.4.1

把你画的图形和图 4.4.2 所示的图形相比较，看看你所画的是否也是这几个平面图形？

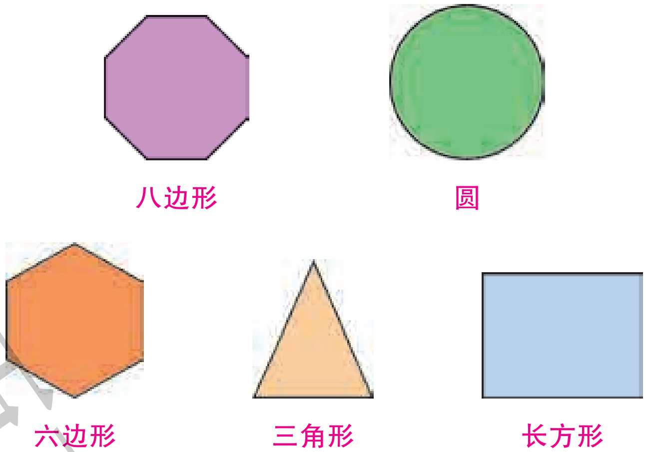


图 4.4.2

这里的三角形、长方形和圆是我们早就熟悉的图形. **圆**(circle)是由曲线围成的封闭图形，而其他由线段围成的封闭图形叫做**多边形**(polygon). 按照组成多边形的边的条数，多边形可分为三角形、四边形、五边形、六边形……

想一想

图 4.4.3 中的几个图形是多边形吗？

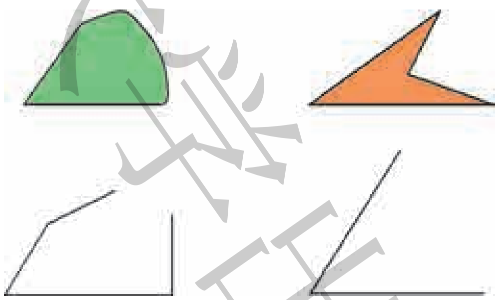


图 4.4.3

图 4.4.4 所示的图形中有哪几个是四边形？

说说“是”或“不是”的理由.

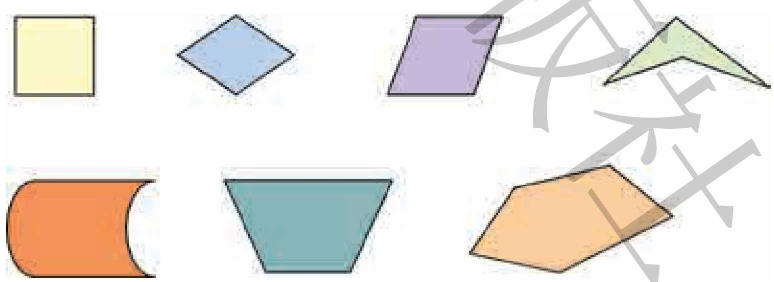


图 4.4.4

在多边形中,三角形是最基本的图形. 如图 4.4.5 所示,每一个多边形都可以分割成若干个三角形.

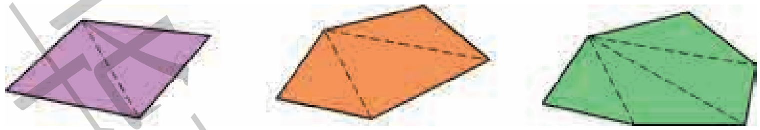


图 4.4.5

数一数每个多边形中三角形的个数,你能发现什么规律?

试一试

生活中经常可以看到由一些多边形或圆组成的优美图案. 图 4.4.6~4.4.9 是一些布料和旗帜的照片,请你在照片上找一找你已熟悉的平面图形.

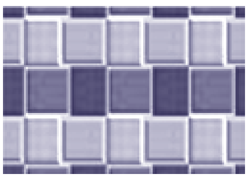


图 4.4.6

图 4.4.7

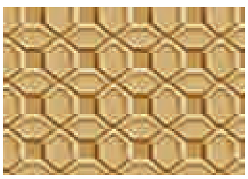


图 4.4.8

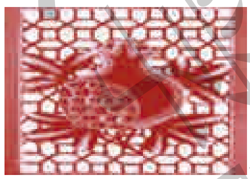


图 4.4.9

图 4.4.6 由长方形和正方形组成;图 4.4.7 由长方形和五角形组成;图 4.4.8 由正方形和六边形组成;图 4.4.9 由长方形和六边形组成,其中长方形和六边形还构成了八边形.

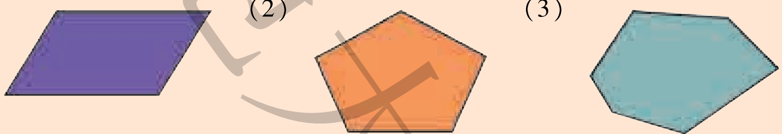
如图 4.4.10 所示,不少国家的国旗、团体或公司的标志的图案都是由简单图形组合而成的. 试找出其中的简单图形.

图 4. 4. 10

练　习

1. 分别举出有一个表面是圆或四边形的两个物体的例子.
2. 按照图 4. 4. 5 的方式分割下面的多边形, 使其由几个三角形组成.

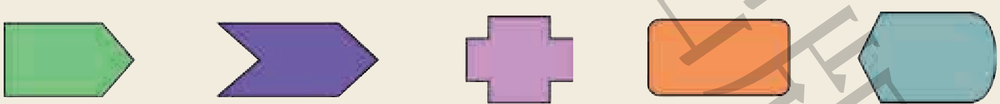
(1)　　　　(2)　　　　(3)



(第 2 题)

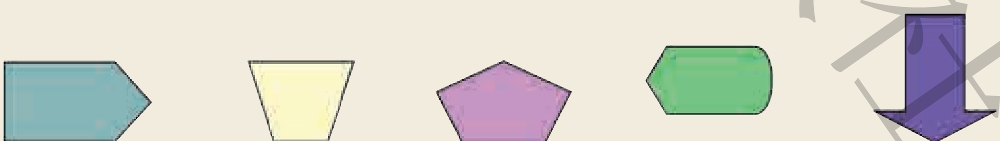
习题 4. 4

1. 下列图形中有几个是多边形?



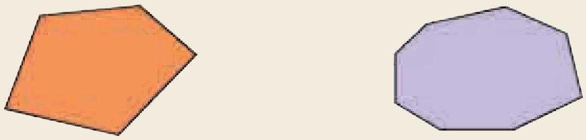
(第 1 题)

2. 下列图形中有几个是五边形?



(第 2 题)

3. 分别把下列各图形分割成三角形，每个图形至少可以分割成多少个三角形？

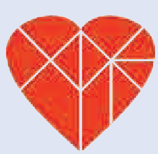


（第3题）

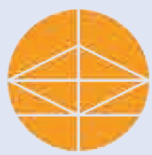
阅读材料

七　巧　板

你玩过七巧板吗？那是我国古代人民创造的益智游戏，流传到世界上不少国家. “七巧板”也称“七巧图”，就是用七块不同形状和大小的木板构成图形的游戏. 相传宋朝时，有一位叫黄伯思的人，对几何图形很有研究，他热情好客，发明了一种用6张小桌子组成的“宴几”——请客吃饭的小桌子. 后来有人将它改进为7张桌子组成的宴几，可以根据吃饭人数的不同，把桌子拼成不同的形状，比如3人拼成三角形，4人拼成正方形……这样用餐时人人方便，气氛更好. 再后来，有人把宴几缩小，改变成七块板，用来拼图，逐渐演变成一种智力玩具——七巧板，现在又拓展为九巧板、十巧板等.

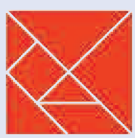


心形十巧板

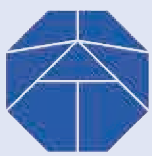


圆形十巧板

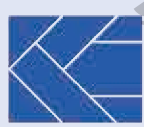
蛋形十巧板



中国七巧板

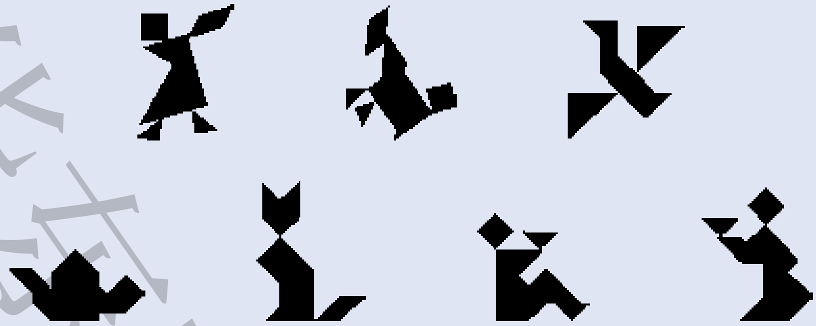


八卦七巧板



燕式七巧板

“七巧板”游戏就是利用7块木板，拼出下图所列出的各种图案. 你一定还能想出其他的图案来.



“中国七巧板”的 7 个部件中已经有 3 种不同大小的三角形，用其中的 4 个部件：1 个大三角形、2 个小三角形和 1 个正方形，还能拼出一个三角形. 你能想象出来吗？思考下列问题：

(1) 用 2 块部件能拼成一个三角形吗？3 块呢？5 块、6 块、7 块呢？

(2) 用 2 块部件能拼成正方形吗？3 块呢？

(3) 用哪些部件能拼成长方形？还能拼成什么样的多边形？

4.5 最基本的图形——点和线

1. 点和线

通过前面的学习，大家一定会感叹，生活中有那么多奇妙的图形！其实不管是什么样的图形，它都是由一些基本的图形构成的.

下面先看两个最基本的图形.

用削尖的铅笔轻触一张白纸，就在纸上留下了**点**(point)的直观形象. 在许多图示上，点常用来表示那些大小尺寸可以忽略的物体. 例如，在小比例尺地图

上，一个城市就常常用一个点来表示. 许多点的聚集又可以表现不同的图形，例如，报纸上的图片、电视屏幕上的画面，都是由浓淡不同或者色彩各异的点组成的.

在日常生活中，一根拉紧的绳子、一根竹竿、人行横道线都给我们以**线段**（line segment）的形象. 实际上，线段是无数排成行的点的聚集.

在前面抽象得到的多面体上，我们可以找到点和线的形象. 例如，如图 4.5.1 所示的长方体，它由 6 个面组成，两个相邻的面交于一条线段，这条线段称为棱；两条相接的棱交于一个点，这个点称为顶点.

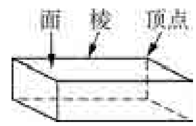


图 4.5.1

我们可以用如图 4.5.2 所示的方式来表示点和线段，其中在线段 AB 中，点 A 和点 B 称为线段 AB 的端点.

图 4.5.2

读一读

“抽象”是数学的一种基本思想和基本方法. 从实际生活中的物体、图形抽象得到的点、线、面、体等数学概念，概括了客观事物的数学属性，但又不再是原来的事物了. 例如，抽象出来的数学上的“点”是没有大小的，但如果我们在纸上画“点”，无论铅笔削得多尖，画出来的点都有大小（你可以用一个放大镜看一看）. 本册教科书的第 2、3 两章谈的是数与代数领域中数量和数量关系的抽象. 现在我们又从简单图形和图形关系出发抽象出了一些最基本的几何概念. 我们还将在此基础上进一步运用抽象等数学思想和方法，研究和解决各种几何图形中的问题.

试一试

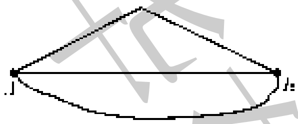


图 4. 5. 3

如图 4. 5. 3，从 A 地到 B 地有三条路径，你会选择哪一条？

在实际情况中，我们都希望走的路程越短越好，当然选择笔直的路线. 这条路线就是线段 AB. 也就是我们平时所说的基本事实：

两点之间，线段最短.

此时线段 AB 的长度，就是 A、B 两点间的距离.

如图 4. 5. 4，把线段向一方无限延伸所形成的图形叫做**射线**(ray).

图中固定的点 O 称为射线 OC 的端点.

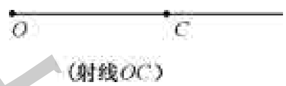


图 4. 5. 4

如图 4. 5. 5，手电筒的光线和激光灯的光束，给我们以射线的形象.

图 4. 5. 5

如图 4. 5. 6，把线段向两方无限延伸所形成的图形叫做**直线**(straight line).

图 4. 5. 6

试一试

在纸上画出一点 A 和一点 B，过点 A 你能画出几条直线？经过 A、B 两点画直线，你又可以画几条？

我们可以发现这样一个基本事实：

经过两点有一条直线，并且只有一条直线. 即**两点确定一条直线.**

练　习

1. 要在墙上钉牢一根木条，至少要钉几颗钉子？为什么？
2. 请举出生活中运用“两点之间，线段最短”的几个例子.

2. 线段的长短比较

记得你和同学是怎样比较个子高矮的吗？可能大家通常会有两种办法：一是让两人分别说出自己的身高，对比一下；二是让两人背对背地站在同一块平地上，脚底平齐，观看两人的头顶，直接比出高矮（图 4.5.7）.

图 4.5.7

那么，我们可以怎样比较两条线段的长短呢？

你一定会发现，两条线段也可以通过类似的方法来比较长短. 对于图 4.5.8 中的线段 AB、CD，我们用刻度尺量一下，就可以知道它们谁长谁短了. 这是第一种方法.

图 4.5.8

这里 AB 比 CD 短，我们可以记为

$$AB < CD（或 CD > AB）.$$

比较两条线段的长短的第二种方法与直接比较个子高矮一样,就是把其中的一条线段移到另一条线段上去加以比较. 如图 4.5.9,将线段 AB 放到线段 CD 上,点 A 和点 C 重合,观察另外两个端点 B、D 的位置,便可确定这两条线段的长短. 图中点 B 落在线段 CD 的内部,可以知道线段 AB 比 CD 短,也就是 $AB < CD$.

如果点 B 落在线段 CD 的延长线上呢?

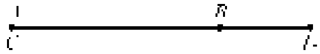


图 4.5.9

如果点 B 恰好与点 D 重合,则可以知道两者一样长,AB 与 CD 相等,即 $AB = CD$.

做一做

如图 4.5.10, MN 为已知线段,你能用直尺和圆规准确地画一条与 MN 相等的线段吗?

图 4.5.10

如图 4.5.11,我们可以先画射线 AB,然后用圆规量出线段 MN 的长,再在射线 AB 上截取 $AC = MN$, 线段 AC 就是所要画的线段.

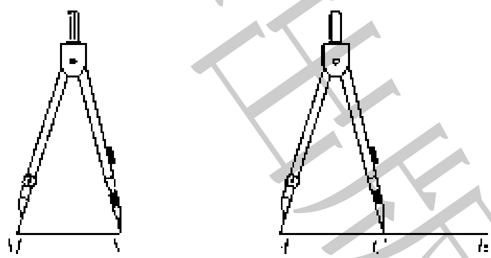


图 4.5.11

把一条线段分成两条相等线段的点,叫做这条线段的**中点**(mid-point).

在图 4.5.12 中,点 C 是线段 AB 的中点,可以写成

$AC = CB = \frac{1}{2}AB$, 或 $AB = 2AC = 2CB$.

图 4.5.12

又如图4.5.13，$AB=6\text{ cm}$，点 C 是线段 AB 的中点，点 D 是线段 CB 的中点，那么 AD 有多长呢？

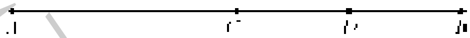


图 4.5.13

这里 A、C、D 三点在同一条直线上，线段 AD 可以看成是线段 AC 与线段 CD 的和，即 $AD=AC+CD$.

类似于数，线段也可以相加减.

由已知，可得

$$AC=CB=\frac{1}{2}AB=3\text{ cm},$$

$$CD=\frac{1}{2}CB=1.5\text{ cm},$$

$$AD=AC+CD=4.5\text{ cm}.$$

练　习

1. 根据所示图形填空：

(1) $AB+BC=(\qquad)$；

(2) $AD=(\qquad)+CD$；

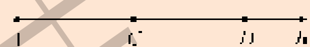
(3) $CD=AD-(\qquad)$；

(4) $BD=CD+(\qquad)=AD-(\qquad)$；

(5) $AC-AB+CD=(\qquad)=BC+(\qquad)$.

(第 1 题)

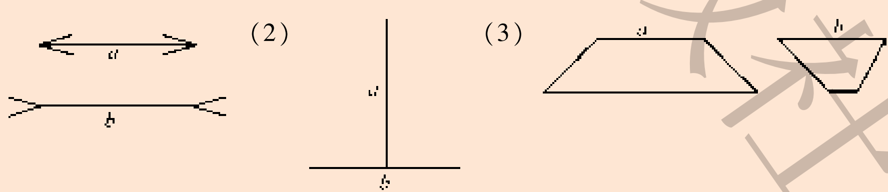
2. 如图，已知点 C 是线段 AD 的中点，$AC=1.5\text{ cm}$，$BC=2.2\text{ cm}$，那么 $AD=(\quad)\text{cm}$，$BD=(\quad)\text{cm}$.



(第 2 题)

3. 请通过直接观察分别比较三组图形中线段 a、b 的长短．再用刻度尺量一下，看看你的观察结果是否正确.

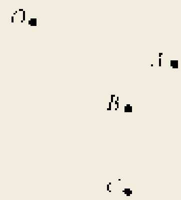
(1)　　(2)　　(3)



(第 3 题)

习题 4.5

1. 直线 l 上有一个点. 在直线 l 上,以这个点为端点的不同射线共有多少条?
2. 如图,有 A、B、C、O 四个点. 分别画出以点 O 为端点,经过 A、B、C 各点的射线.



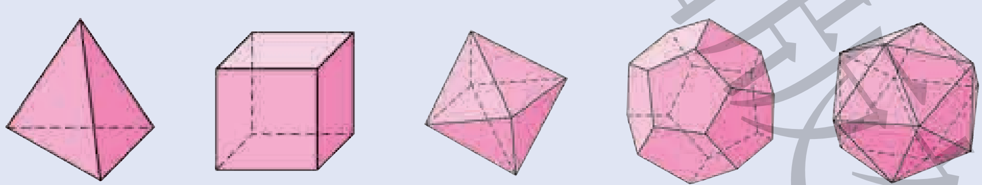
(第 2 题)

3. 画出长度为 5 cm 的线段 AB,并用刻度尺找出它的中点.
4. 在一条直线上顺次取 A、B、C 三点,使 $AB = 5$ cm, $BC = 2$ cm,并且取线段 AC 的中点 O,求线段 OB 的长.
5. 读下列语句,并画出相应的图形:
   (1) 点 A 在直线 l 上,点 B 在直线 l 外;
   (2) 任意画一点 P,过点 P 画直线 PQ;
   (3) 任意画 A、B 两点,过 A、B 两点画直线 AB;
   (4) 任意画 A、B、C 三点,过 A、C 两点画直线 l. 此时点 B 是否一定在这条直线上?

阅读材料

欧 拉 公 式

新年晚会是我们最欢乐的时候. 会场上,悬挂着五彩缤纷的小装饰,其中有各种各样的立体图形. 下面是常见的一些多面体:



正四面体　　正方体　　正八面体　　正十二面体　　正二十面体

请你数一下上面图中每一个多面体具有的顶点数(V)、面数(F)和棱数(E),并且把结果记入下表中.

多面体	顶点数(V)	面数(F)	棱数(E)	$V+F-E$
正四面体				
正方体				
正八面体				
正十二面体				
正二十面体	12	20	30	

令人惊奇的是，上表最后一栏中的数是完全一样的！

你若有兴趣的话，可以随意做一个多面体，看看是否还是这样的结果.

伟大的数学家欧拉(L. Euler, 1707－1783)证明了这一令人惊叹的关系式，即欧拉公式：

顶点数＋面数－棱数＝2.

4.6 角

1. 角

观察图4.6.1中的图形，你发现它们有什么共同的特点吗？

生活中还有哪些东西具有类似的形象？

图4.6.1

这些图形都给出了角的形象.

在小学里,我们已学习过**角**(angle)的概念,角是由两条有公共端点的射线组成的图形.

> 回想一下锐角、钝角、直角的形状.

如图 4.6.2,角更可以看成是由一条射线绕着它的端点旋转而成的图形. 射线的端点叫做角的顶点,起始位置的射线叫做角的始边,终止位置的射线叫做角的终边.

图 4.6.2

> 注意用三个字母表示角时,必须把表示角的顶点的字母写在中间.

如图 4.6.3,角可以用几种不同的方法表示.

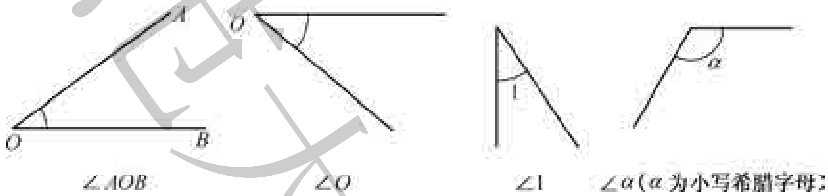


图 4.6.3

> 本书中的角,除了周角与平角外,一般是指小于平角的角.

在图 4.6.4 中可以观察到两种特殊情况:第一种情况是绕着端点旋转到角的终边和始边成一直线,这时所成的角叫做**平角**(straight angle);第二种情况是绕着端点旋转到终边和始边再次重合,这时所成的角叫做**周角**(perigon).

图 4.6.4

我们已经知道,如果把周角等分成 360 份,每一份就是 1 度的角,1 度记作 $1°$. 但是一个角的度数并不正好是整数,这时与长度单位一样,考虑用更小一些的单位. 把 1 度等分成 60 份,每一份就是 1 分,记作 $1'$;把 1 分再等分成 60 份,每一份就是 1 秒,记作 $1''$.

$$1\text{ 周角}=360^\circ.$$
$$1\text{ 平角}=180^\circ.$$
$$1^\circ = 60',\ 1' = 60''.$$

从角的度数看，大于 0°，且小于 90°的角是锐角；等于 90°的角是直角；大于 90°，且小于 180°的角是钝角.

请向同桌说明如何使用量角器测量角的大小.

例 1 （1）把 18°15′化成用度表示的角；

（2）把 93.2°化成用度、分、秒表示的角.

解 （1）先把 15′化成度，即

$$15' = \left(\frac{15}{60}\right)^\circ = 0.25^\circ,$$

所以 $$18^\circ15' = 18.25^\circ.$$

（2）因为 1° = 60′，所以

$$0.2^\circ = 60' \times 0.2 = 12',$$

因此 $93.2^\circ = 93^\circ12'$.

想一想

18°15′和 18.15°相等吗？哪一个较大？

还记得如图 4.6.5 所示的八个方向吗？那是日常生活中经常用到的一些方向，如太阳从东方升起，又如明天将有 4～5 级西北风，等等. 但实际上，八个方向还是不够用的. 如果要准确地表示方向，那就要借用角的表示方式.

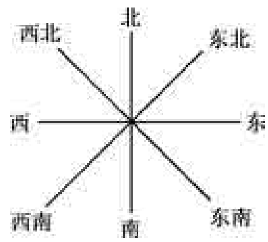


图 4.6.5

例 2 如图 4.6.6，*OA* 是表示北偏东 30°方向的一条射线.

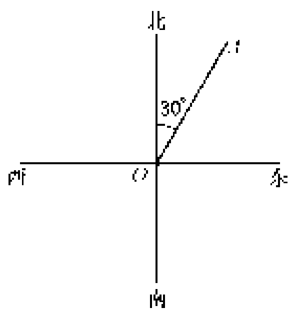


图 4.6.6

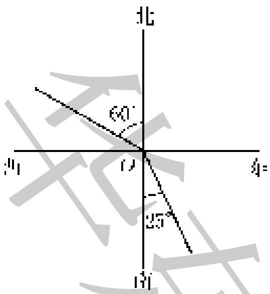


图 4.6.7

仿照这条射线，画出表示下列方向的射线：

（1）南偏东 25°；

（2）北偏西 60°.

解 如图 4.6.7 所示.

（1）以正南方向的射线为始边，逆时针旋转 25°，所成的角的终边即为所求的射线.

（2）以正北方向的射线为始边，逆时针旋转 60°，所成的角的终边即为所求的射线.

读一读

轮船、飞机等物体运动的方向与正北方向之间的夹角称为方位角，领航员常用地图和罗盘进行方位角的测定.

有时以正北、正南方向为基准，描述物体运动的方向. 如：“北偏东 30°”、“南偏东 25°”、“北偏西 60°”.

练　习

1. 根据图 4.6.5 填空：

（1）正东和正西方向所成的角是________度；

（2）正南和西南方向所成的角是________度；

（3）东北和西北方向所成的角是________度；

（4）正西和东南方向所成的角是________度.

2. 用直尺画出 30°、45°、60°、120°的角. 随后用量角器量一量，比一比谁画的角最为接近.

2. 角的比较和运算

观察如图 4.6.8 所示的三个角,哪一个最大?

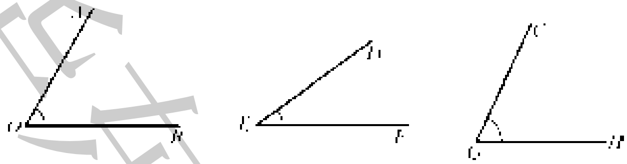


图 4.6.8

你能从比较线段长短的方法得到启示吗?

从上图我们可以发现,$\angle DEF$ 明显比 $\angle AOB$ 及 $\angle CGH$ 小,但 $\angle AOB$ 与 $\angle CGH$ 的大小关系不太明显. 那么如何比较,才能得到准确的结果呢?

你还记得比较两条线段长短的方法吗? 类似地,你一定会想到可以采用下面的方法:

如图 4.6.9 所示,把一个角放到另一个角上,使它们的顶点重合,其中的一边也重合,并使两个角的另一边都在重合的这一条边的同侧.

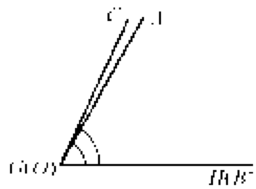


图 4.6.9

这时,角的大小关系就明显了,可以简单地记为

$$\angle CGH > \angle AOB, \quad 或\ \angle AOB < \angle CGH.$$

比较角的大小,也可以用量角器分别量出角的度数,然后加以比较. 如我们用量角器可以量出图 4.6.8 中三个角的度数分别为

在放大镜下,一个角变大了吗?

$$\angle AOB = 60°30', \angle DEF = 36°, \angle CGH = 65°,$$

所以 $\angle CGH > \angle AOB > \angle DEF.$

一副三角尺上的角是一些常用的角,除了可以用它们直接画出 30°、45°、60°和 90°的角之外,还可以画出其他一些特殊的角.

如图 4.6.10 所示,用两种方法放置一副三角尺,可以画出 75°和 15°的角.

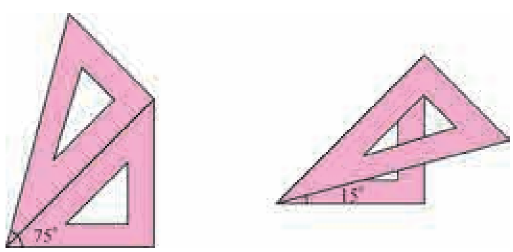


图 4.6.10

想一想

用一副三角尺还可以画出哪些特殊的角?

做一做

如图4.6.11，$\angle AOB$为已知角，试按下列步骤用圆规和直尺准确地画一个角等于$\angle AOB$.

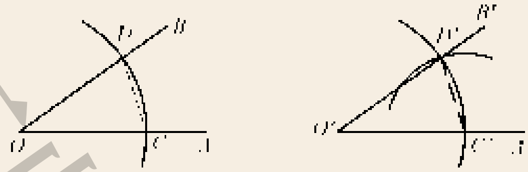


图4.6.11

第一步：画射线$O'A'$；

第二步：以点O为圆心，以适当长为半径画弧，交OA于点C，交OB于点D；

第三步：以点O'为圆心，以OC长为半径画弧，交$O'A'$于点C'；

第四步：以点C'为圆心，以CD长为半径画弧，交前一条弧于点D'；

第五步：经过点D'画射线$O'B'$.

$\angle A'O'B'$就是所要画的角.

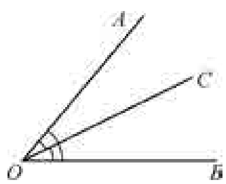


图4.6.12

我们可以对角进行简单的加减运算，如：

(1) $34°34' + 21°51' = 55°85' = 56°25'$；

(2) $180° - 52°31' = 179°60' - 52°31' = 127°29'$.

观察图4.6.12中的$\angle AOC$、$\angle COB$和$\angle AOB$，如何表示它们之间的关系呢？

我们可以用熟悉的"和差"来表示：

$$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB,$$

或 $$\angle AOB - \angle AOC = \angle COB,$$

或 $$\angle AOB - \angle COB = \angle AOC.$$

可见，两个角相加或相减，得到的和或差也是角.

做一做

如图 4.6.13，用量角器和直尺在纸上画 $\angle AOB = 84°$. 然后沿点 O 对折，使边 OB 和 OA 重合，那么折痕把角分成了大小相等的两部分.

你也可以用量角器画出等分 $\angle AOB$ 的射线 OC.

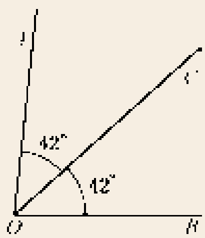


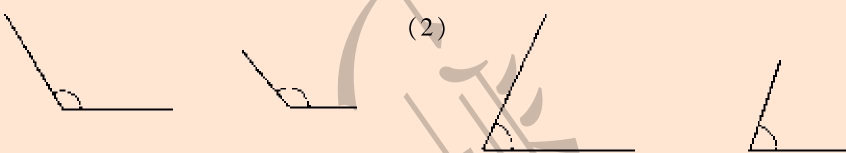
图 4.6.13

从一个角的顶点引出的一条射线，把这个角分成两个相等的角，这条射线叫做这个**角的平分线**（angular bisector）.

练　习

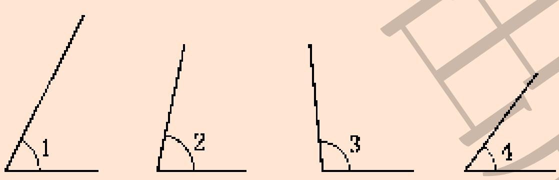
1. 先观察下列各组角，其中哪一个角较大？然后用量角器量一量每个角，看看你的观察结果是否正确.

(1)　　　　(2)



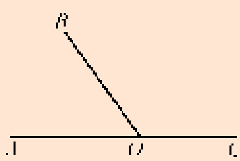
（第 1 题）

2. 请用三角尺中的角估计下列角的度数，并按大小次序用“＞”号连接这四个角.



（第 2 题）

3. 如图，$\angle AOB = 55°$. 画出 $\angle BOC$ 的平分线 OD，并计算 $\angle AOD$ 的度数.



（第 3 题）

3. 余角和补角

在我们所用的一副三角尺中，每块都有一个角是 90°，而其他两个角，一块是 30°与 60°，另一块都是 45°，它们的和都是 90°.

在图 4.6.14 中，用量角器量一量两组图中各角的大小，发现也有这样的特殊关系.

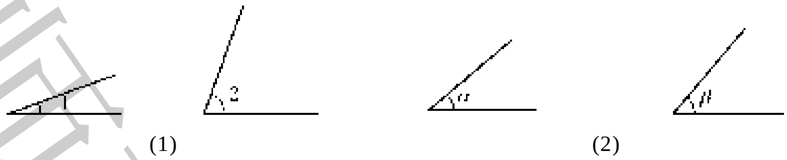


图 4.6.14

两个角的和等于 90°（直角），就说这两个角互为**余角**（complementary angle），简称互余.

例如，如果 $\angle 1+\angle 2=90°$，那么$\angle 1$ 是$\angle 2$ 的余角，$\angle 2$ 也是$\angle 1$ 的余角.

反过来，如果两个角互余，那么把这两个角如图 4.6.15 那样拼在一起的话，就构成一个直角.

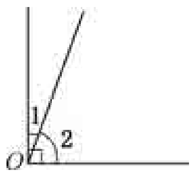


图 4.6.15

同样，如果两个角的和等于 180°（平角），就说这两个角互为**补角**（supplementary angle），简称互补.

如图 4.6.16，$\angle 3+\angle 4=180°$，所以$\angle 3$、$\angle 4$ 互为补角.

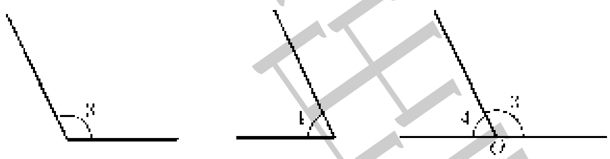


图 4.6.16

同角或等角的余角相等；同角或等角的补角相等.

想想看，如果$\angle 1$ 与$\angle 2$ 互余，$\angle 3$ 与$\angle 4$ 互余，$\angle 2=\angle 4$，那么$\angle 1$ 和$\angle 3$ 有什么关系？相等角的补角又有什么关系？

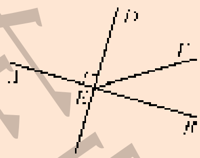
例 3 已知 $\angle\alpha=50°17'$，求$\angle\alpha$ 的余角和补角.

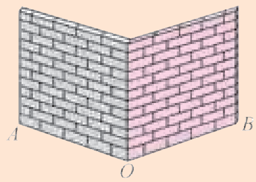
解 $\angle\alpha$ 的余角 $=90°-50°17'=39°43'$，

$\angle\alpha$ 的补角 $=180°-50°17'=129°43'$.

练　习

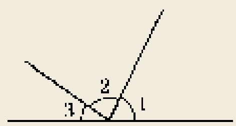
1. 说出图中互余和互补的角.
2. 如图,有两堵围墙,有人想测量地面上所形成的∠AOB 的度数,但人又不能进入围墙,只能站在墙外,请问该如何测量?


(第 1 题)

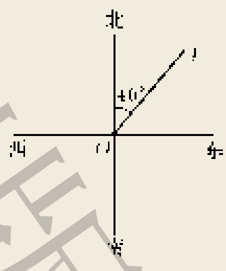

(第 2 题)

习题 4.6

1. 填空:
(1) $77°42' + 34°45' =$ ________;
(2) $108°18' - 56°23' =$ ________;
(3) $180° - (34°54' + 21°33') =$ ________.
2. 时钟的分针,1 小时转了________度的角,1 分钟转了________度的角.
3. 如图,如果 $\angle 1 = 65°15'$, $\angle 2 = 78°30'$, 则∠3 是多少度?

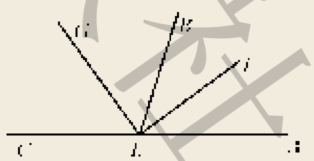

(第 3 题)

4. 任意画一个∠AOB,在∠AOB 的内部引射线 OC、OD,这时图中共有几个角?分别把它们表示出来.
5. 两个相等的钝角有同一个顶点和一条公共边,并且两个角的另一条边所成的角为 90°,画出图形,并求出该钝角的大小.
6. 如图,OA 是表示什么方向的一条射线?仿照这条射线画出表示下列方向的射线:
(1) 南偏东 60°;
(2) 北偏西 70°;
(3) 西南方向(即南偏西 45°).



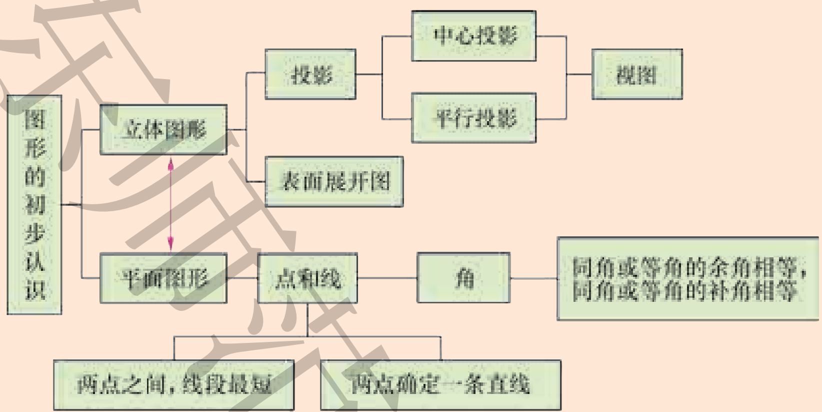
(第 6 题)

7. $72°20'$的角的余角等于________;$25°31'$的角的补角等于________.
8. 在图中, EF、EG 分别是∠AEB 和∠BEC 的平分线,求∠GEF 的度数,并写出∠BEF 的余角.


(第 8 题)

小结

一、知识结构



二、要点

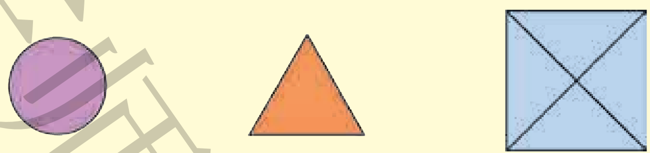
1. 本章从生活中的物体入手，认识抽象得到的立体图形与点、线、面. “抽象”是数学的一种基本思想，由此我们可以发现和认识这些简单的几何图形相互之间的关系，这是以后进一步抽象及学习研究的基础.

2. 通过本章的学习，相信你体会到了周围的世界是多么的奇妙，看到了立体图形的形状是多么的千变万化. 现在你对一些简单的立体图形有了初步的了解，能描述它们的视图，能根据视图想象出这些物体的形状，并能认识某些立体图形的表面展开图；你知道了“两点确定一条直线”和“两点之间，线段最短”这两个公认的基本事实，会比较线段的长短、角的大小等.

复习题

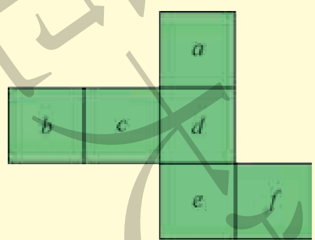
A组

1. 如图是一些立体图形的视图，但是观察的方向不同，试说明下列各图可能是哪一种立体图形的视图.



（第 1 题）

2. 如图是正方体的展开图，如果 a 在后面，b 在下面，c 在左面，试说明其他各面的位置.



（第 2 题）

3. 参看第 135 页的图 4.4.5，用类似的方法能将八边形分成几个三角形？九边形、十边形呢？一般的 n 边形呢？试说明多边形的边数与所分成的三角形个数之间的关系.

4. 如图，A、B、C 三点在一条直线上，则关于线段 AB、BC 和 AC 有下列等式成立：

（1）$AB+BC=$ ________；

（2）$AC-BC=$ ________；

（3）$AC-AB=$ ________.

（第 4 题）

5. 在纸上画出四个点（其中任意三点不在同一条直线上），经过每两点用直尺画一条直线，一共可以画几条？试画出所有的直线.

6. 计算下列各题：

（1）$23°30'=$ ________°，$13.6°=$ ________° ________′；

（2）$52°45'-32°46'=$ ________° ________′；

（3）$18.3°+26°34'=$ ________° ________′.

7. 根据图形填空：

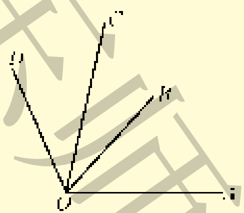
(1) $\angle AOC =$ ________ + ________；

(2) $\angle AOC - \angle AOB =$ ________；

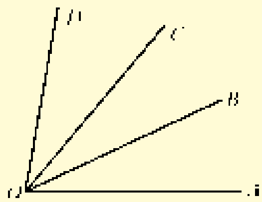
(3) $\angle COD = \angle AOD -$ ________；

(4) $\angle BOC =$ ________ $- \angle COD$；

(5) $\angle AOB + \angle COD =$ ________ − ________.



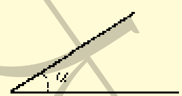
（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，$\angle AOD = 80°$，$\angle COD = 30°$，OB 是 $\angle AOC$ 的平分线，求 $\angle AOC$、$\angle AOB$ 的度数.

9. 如图，已知 $\angle\alpha$，试用量角器或三角尺画出它的余角、补角及它的角平分线.



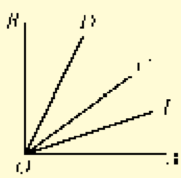
（第 9 题）

B组

10. 用 6 根火柴能否摆成 4 个一样大的三角形？若能，请说明你的图形.

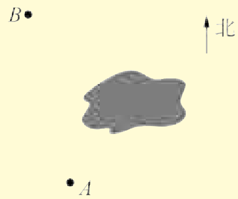
11. 你能用 12 根火柴摆成 5 个正方形吗？能摆成 6 个正方形吗？若能，试画出你摆成的图形.

12. 如图，$\angle AOB$ 是直角，OC 是位于 $\angle AOB$ 内的一条射线，OD 平分 $\angle BOC$，OE 平分 $\angle AOC$，求 $\angle EOD$ 的度数.



（第 12 题）

13. 在一张地图上有 A、B、C 三地，但地图被墨迹污染，C 地具体位置看不清楚了，但知道 C 地在 A 地的北偏东 $30°$，在 B 地的南偏东 $45°$. 你能确定 C 地的位置吗？

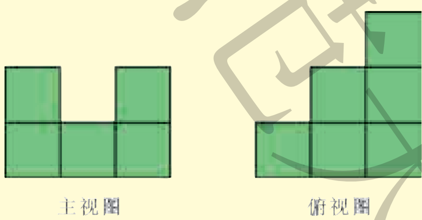


（第 13 题）

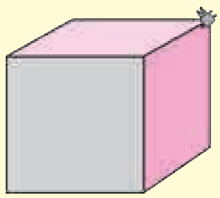
14. （1）一个角与它的余角相等，这个角是怎样的角？
（2）一个角与它的补角相等，这个角是怎样的角？
（3）互补的两个角能否都是锐角？能否都是直角？能否都是钝角？

C组

15. 几个相同的正方体叠合在一起，该组合体的主视图与俯视图如图所示，那么组合体中正方体的个数至少有几个？至多有几个？



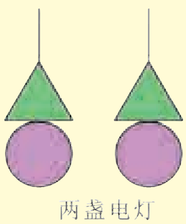
（第 15 题）

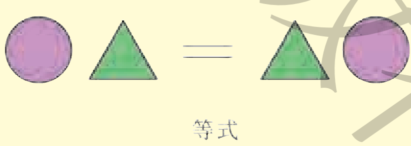


（第 16 题）

16. 如图，一只昆虫要从正方体的一个顶点爬到相距它最远的另一个顶点，请你帮它确定一条最短的路线，并说明理由.

17. 请以给定的图形“○○、△△、＝”（两个圆、两个三角形、两条平行线段）为构件，尽可能多地构思独特且有意义的图形，并写上一两句贴切、诙谐的解说词. 如图就是符合要求的两个图形. 你还能构思出其他的图形吗？比一比，看谁想得多.





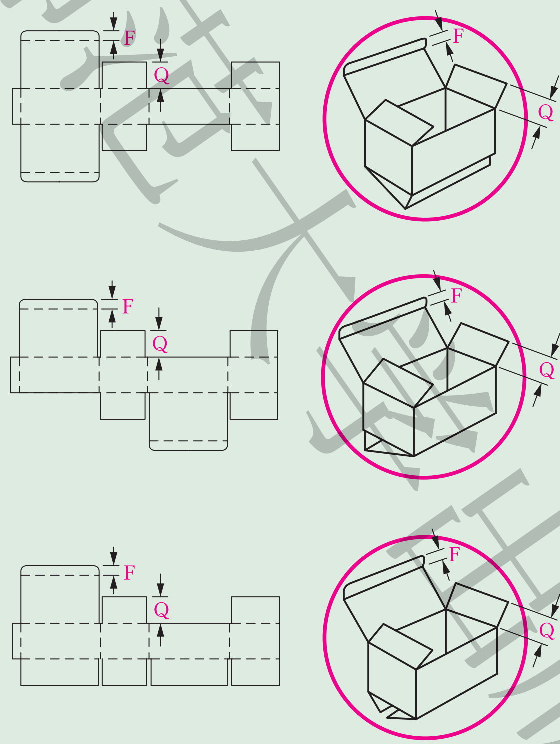
（第 17 题）

综合与实践

制 作 包 装 盒

“Happy birthday to you，……”，当你唱着这首生日快乐歌时，你一定还会收到你的好朋友送给你的生日礼物. 打开外面的包装盒，里面包着的是好朋友的心意.

你知道这些包装盒是如何制作的吗？下图是一个包装盒的几种不同制作方法的表面展开示意图.



动手试试看，为你的心爱之物制作一个精美合身的包装盒吧.

第 5章　相交线与平行线

生活中到处可见相交线与平行线，你知道它们有什么特征吗？你能判定两条直线平行吗？

本章将从人们所公认的一些事实出发，探索相交线与平行线的特征，以及平行线的判定方法.

5.1 相交线

1. 对顶角

我们已经知道，两条直线相交，只有一个**交点**(intersection point). 例如，在图 5.1.1 中，直线 AB 与直线 CD 相交，交点为 O，可以说成“直线 AB、CD 相交于点 O”.

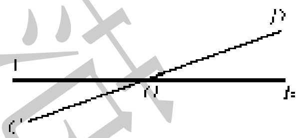


图 5.1.1

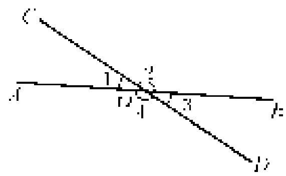


图 5.1.2

如图 5.1.2，两条直线相交形成了∠1、∠2、∠3 和∠4，我们已经知道，有些角之间存在一定的关系，例如：

角	∠1 和∠2	∠2 和∠3	…
位置关系	相邻	相邻	…
数量关系	互补	互补	…

从位置关系与数量关系上看，图中还有哪些角之间存在某种关系呢？

看一看，想一想，将你的发现填入下面的表中：

角			
位置关系			
数量关系			

我们可以直观地发现图中的∠1 和∠3 是相对的两个角，而且似乎相等.

$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 具有相同的顶点，且 $\angle 1$ 的两边 OA、OC 分别与 $\angle 3$ 的两边 OB、OD 互为反向延长线，我们把这样的两个角叫做**对顶角**(opposite angles). $\angle 2$ 和 $\angle 4$ 也是对顶角.

射线 OA 的反向延长线是指从点 A 到点 O 方向延长得到的一条射线，即射线 OB.

下面我们通过一个具体的例子，算算看，直观所发现的这两个角相等的结论是否正确.

例 1　在图 5.1.2 中，$\angle 1 = 30°$，那么 $\angle 2$、$\angle 3$ 和 $\angle 4$ 各等于多少度？图中存在哪些相等关系？

解　$\angle 2 = 180° - \angle 1 = 180° - 30° = 150°$，

$\angle 3 = 180° - \angle 2 = 180° - 150° = 30°$，

$\angle 4 = 180° - \angle 1 = 180° - 30° = 150°$.

由此，我们得到

$$\angle 1 = \angle 3,\ \angle 2 = \angle 4.$$

其实，对于任意两条直线相交形成的对顶角，由于它们都有一个相同的补角，所以它们是相等的.

例如，图 5.1.2 中的 $\angle 1$、$\angle 3$ 都和 $\angle 2$ 互补，即

$$\angle 1 + \angle 2 = 180°,\ \angle 3 + \angle 2 = 180°.$$

因此 $\angle 1 = \angle 3$，同理 $\angle 2 = \angle 4$.

于是我们得到对顶角的性质：

对顶角相等.

例 2　如图 5.1.3，直线 AB、CD 相交于点 E，$\angle AEC = 50°$，求 $\angle BED$ 的度数.

解　因为直线 AB、CD 相交于点 E，所以 $\angle AEC$ 与 $\angle BED$ 是对顶角. 根据对顶角相等，得

$$\angle BED = \angle AEC = 50°.$$

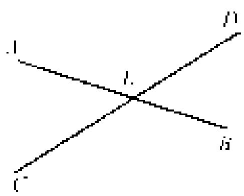
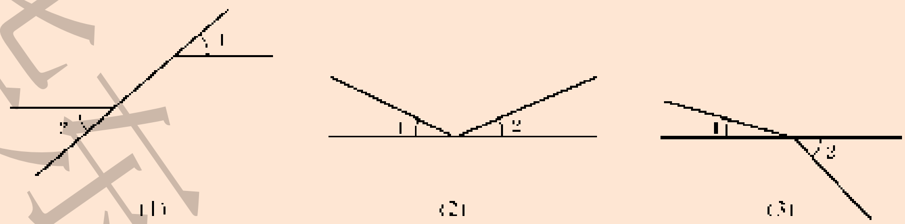


图 5.1.3

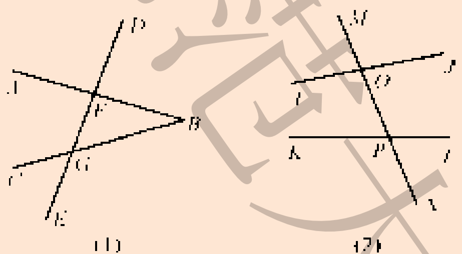
练　习

1. 下列各图中的∠1和∠2是不是对顶角?

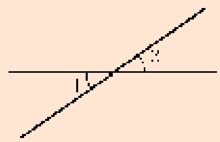


(第1题)

2. 说出各图中的对顶角,其中直线 AB、CB 分别与直线 DE 相交于点 F、G,直线 IJ、KL 分别与直线 MN 相交于点 O、P.



(第2题)



(第3题)

3. 如图,∠1与∠2是对顶角,$\angle 1 = 180° - \alpha$, $\angle 2 = 35°$,则 $\alpha =$ ________°.

2. 垂线

你知道其中的道理吗?

如图5.1.4(1),直线 AB 与 CD 相交于点 O,我们将直线 CD 绕着点 O 旋转,使 $\angle BOD$ 为直角(如图5.1.4(2)所示).当两条直线 AB、CD 所构成的四个角中有一个为直角时,其他三个角也都成为直角,此时,直线 AB、CD 互相**垂直**(perpendicular),记作“$AB \perp CD$”,它们的交点 O 叫做**垂足**(foot of a perpendicular).我们把其中的一条直线叫做另一条直线的**垂线**(perpendicular).

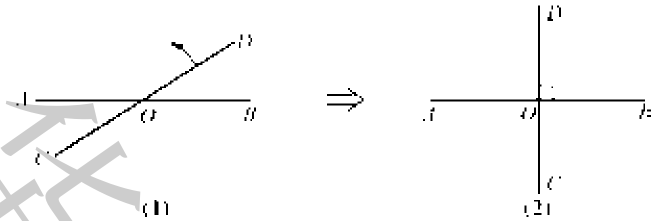


图 5.1.4

在日常生活中,我们经常可以看到线线互相垂直的图形(如图 5.1.5).

图 5.1.5

你能再举出一些例子吗?

试一试

经过直线 AB 外一点 P,按图 5.1.6 所示的两种方法,画出垂直于直线 AB 的直线. 这样的垂线能画多少条呢?

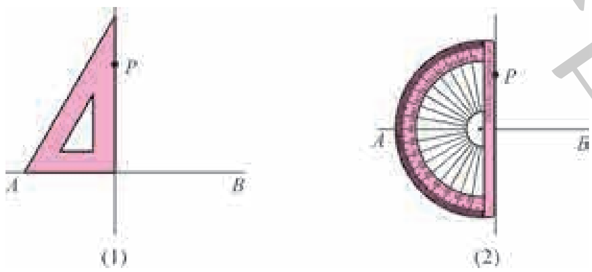


图 5.1.6

如图 5.1.7,你能经过直线 AB 上一点 P,画出垂直于直线 AB 的直线吗? 这样的垂线能画多少条呢?

图 5.1.7

由上述操作可以得到关于垂线的一个基本事实:

过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

在图5.1.8所示的方格纸中，点 A 是直线 l 外一点，AB 与直线 l 垂直，点 B 为垂足. 点 A 与直线 l 上各点的距离长短不一，我们可以发现其中最短的应该是线段 AB，线段 AB 叫做点 A 到直线 l 的**垂线段**.

从直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做**点到直线的距离**. 例如，线段 AB 的长度就是点 A 到直线 l 的距离.

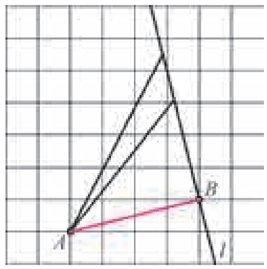


图5.1.8

体育课上是怎样测量跳远成绩的？你知道其中的原因吗？

做一做

如图5.1.9，小海龟位于图中点 A 处，按下述口令移动：前进3格；向右转90°，前进5格；向左转90°，前进3格；向左转90°，前进6格；向右转90°，后退6格；最后向右转90°，前进1格. 用粗线将小海龟经过的路线描出来，看一看是什么图形.

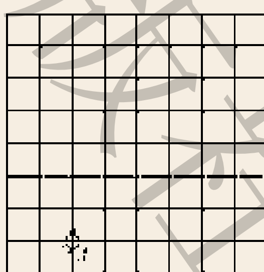


图5.1.9

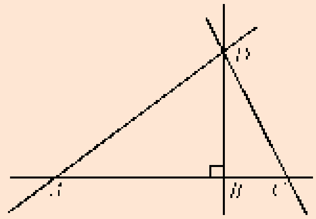
1. 如图，$\angle ABD = 90^\circ$，在下列各语句中填入适当的文字或数字：

（1）点 B 在直线________上，点 D 在直线________外；

（2）直线______与直线________相交于点 A，点 D 是直线________与直线________的交点，也是直线________与直线________的交点，又是直线________与直线________的交点；

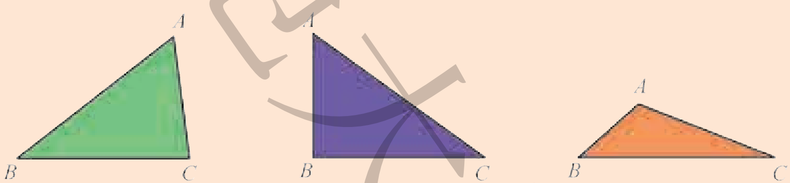
（3）直线________ $\perp$ 直线________，垂足为点________；

（4）过点 D 有且只有________条直线与直线 AC 垂直.



（第 1 题）

2. 如图所示的各个三角形中，分别过点 C 画直线 AB 的垂线，并量出三角形顶点 C 到直线 AB 的距离.（精确到 1 mm）



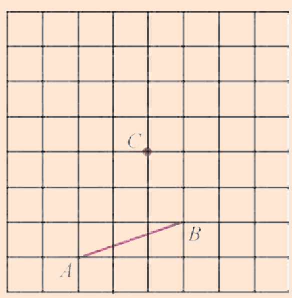
（第 2 题）

3. 在如图所示的方格纸中，按下述要求画图并回答问题：

（1）过点 C 画线段 AB 的垂线，垂足为点 D；

（2）该垂线是否经过格点（格点指的是方格纸中纵向和横向线段的交点）？如果经过格点，请在图中标出垂线所经过的格点；

（3）量出点 C 到线段 AB 所在直线的距离（精确到 1 mm）.



（第 3 题）

3. 同位角、内错角、同旁内角

我们知道，两条直线相交，可以得到四个角. 如图5.1.10，直线 a、b 相交，得到 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$. 在这些角中，有的是相对且相等的，有的是相邻且互补的.

试分别指出相等的角与互补的角.

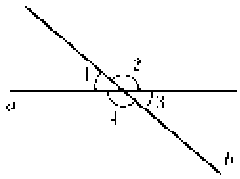


图 5.1.10

而在一个平面内，一条直线 l 与两条直线 a、b 分别相交于点 P、Q，这可以说成"直线 l 分别截直线 a、b 于点 P、Q". 两条直线被另一条直线所截，可得八个角.

如图5.1.11，直线 l 截直线 a、b，得到 $\angle 1$，$\angle 2$，…，$\angle 8$. 从位置关系上看，这些角有的是对顶角，有的是相邻的角；从数量关系上看，对顶角相等，相邻的角互补. 那么除此之外，这八个角中还存在哪些关系呢？

你会发现，在一般的情况下，似乎没有其他的相等或互补关系. 你也会发现，从位置关系上看，似乎存在某些关系.

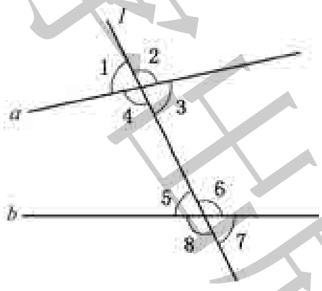


图 5.1.11

观察

图5.1.11 中的 $\angle 1$ 与 $\angle 5$ 的位置有什么关系呢？

从直线 l 来看，$\angle 1$ 与 $\angle 5$ 处于哪个位置？

从直线 a、b 来看，$\angle 1$ 与 $\angle 5$ 又处于哪个位置？

我们可以发现，$\angle 1$ 与 $\angle 5$ 处于直线 l 的同一侧，且分别在直线 a、b 的同一方. 这样位置的一对角就是**同位角**(corresponding angles).

在图 5.1.11 中，$\angle 2$ 和 $\angle 6$ 也是同位角，除此以外，同位角还有________________.

观察

图 5.1.11 中的 $\angle 3$ 与 $\angle 5$ 的位置和同位角 $\angle 1$ 与 $\angle 5$ 相比，有什么一样？有什么不一样？

$\angle 3$ 与 $\angle 5$ 处于直线 l 的________，直线 a、b 的________. 这样位置的一对角就是**内错角**(alternate interior angles).

图 5.1.11 中，内错角还有________________.

观察

图 5.1.11 中的 $\angle 4$ 与 $\angle 5$ 的位置与同位角、内错角相比，又有什么一样？有什么不一样？

$\angle 4$ 与 $\angle 5$ 处于直线 l 的________，直线 a、b 的________. 这样位置的一对角就是**同旁内角**(interior angles on the same side).

图 5.1.11 中，同旁内角还有________________.

试一试

在图 5.1.12 中，$\angle 1$ 是直线 a、b 相交所成的一个角，用量角器量出 $\angle 1$ 的度数；画一条直线 c，使直线 c 与直线 b 相交所成的角中有一个与 $\angle 1$ 为一对同位角，且这对同位角的度数相等.

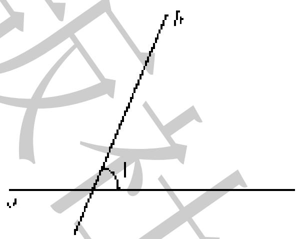
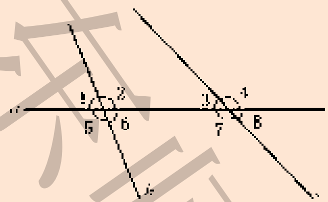


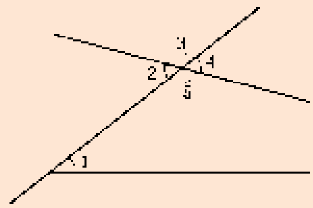
图 5.1.12

练 习

1. 如图，直线 a 截直线 b、c 所得的同位角有______对，它们是____________________；内错角有______对，它们是____________________；同旁内角有______对，它们是____________________.



（第 1 题）

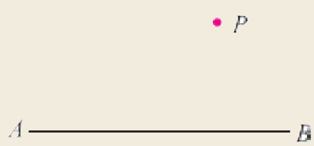


（第 2 题）

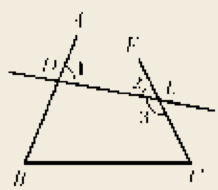
2. 如图，与∠1 是同位角的角是________，与∠1 是内错角的角是________，与∠1 是同旁内角的角是________.

习题 5.1

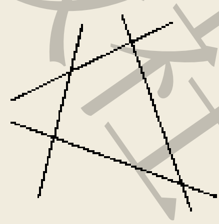
1. 如图，已知直线 AB 以及直线 AB 外一点 P. 按下述要求画图并填空：
（1）过点 P 画 $PC \perp AB$，垂足为点 C；
（2）P、C 两点间的距离是线段________的长度；
（3）点 P 到直线 AB 的距离是线段________的长度；
（4）点 P 到直线 AB 的距离为____________（精确到 1mm）.
2. 如图，∠____与∠C 是直线 DE 与 BC 被直线 FC 所截得的同位角，∠____与∠____是直线 AB 与 FC 被直线 DE 所截得的内错角，∠B 与∠C 是直线 AB 与 FC 被直线____所截得的同旁内角.
3. 在四条直线组成的图形中，试找出两对对顶角、两对同位角、两对内错角与两对同旁内角.（用适当的方法表示这些角）



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

5.2 平行线

1. 平行线

我们已经知道，在同一平面内不相交的两条直线叫做**平行线**(parallel lines). 如图 5. 2. 1，直线 a 与直线 b 互相平行，记作“$a \parallel b$”.

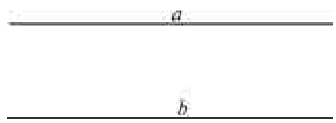


图 5. 2. 1

在同一平面内，两条不重合的直线的位置关系只有两种：相交或平行.

你能按照图 5. 2. 2 所示的方法，画一条直线 b 与已知直线 a 平行吗？

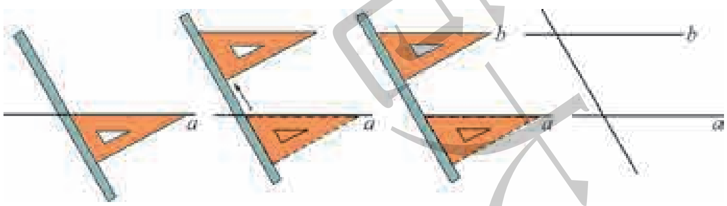


图 5. 2. 2

如图 5. 2. 3 所示，不少国家的国旗、团体或公司的标志的图案是由平行线、垂线构成的.

你能再举出一些例子吗？

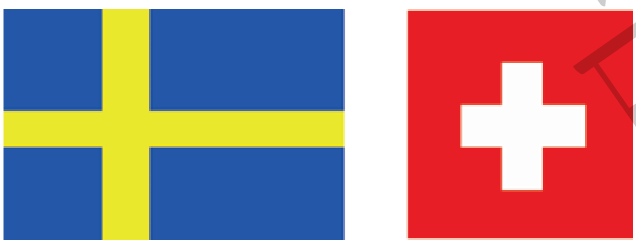


图 5. 2. 3

做一做

如果在直线 a 外有一个已知点 P，那么经过点 P 可以画多少条直线与已知直线 a 平行？请动手画一画.

动手操作的结果表明，经过点 P 只能画一条直线与已知直线 a 平行. 于是我们得到关于平行线的一个基本事实：

过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行.

试一试

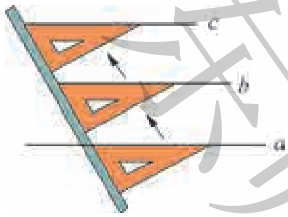


图 5.2.4

画一条直线 a，按图 5.2.4 所示的方法，画一条直线 b 与直线 a 平行，再向上推三角尺，画另一条直线 c，也与直线 a 平行.

你发现直线 b 与直线 c 有什么关系？你的同伴是否也有类似的发现？

此时，你会发现直线 b 与直线 c 也是平行的. 这就是说：

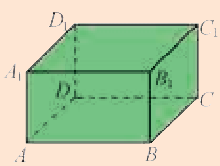
如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

练　习

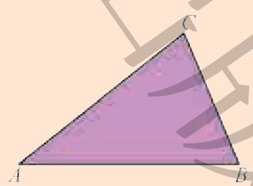
1. 观察如图所示的长方体后填空：

(1) 用符号表示下列两棱的位置关系：A_1B_1 ______ AB，AA_1 ______ AB，A_1D_1 ______ C_1D_1，AD ______ BC；

(2) A_1B_1 与 BC 所在的直线是两条不相交的直线，它们 ______ 平行线（填“是”或“不是”），由此可知，在 ______________ 内，两条不相交的直线才能叫做平行线.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 根据下列语句，利用所给△ABC 画出图形：

(1) 过△ABC 的顶点 C，画 $MN \parallel AB$；

(2) 过△ABC 的边 AB 的中点 D，画平行于 AC 的直线，交 BC 于点 E.

2. 平行线的判定

要判定两条直线互相平行，我们无法依据它的定义，判断这两条直线在无限延长的过程中是否永远不相交. 那么从前面画平行线的过程，我们可以得到什么启示呢？

在图 5.2.2 所示的画图过程中，三角尺沿着直尺的方向由原来的位置移动到另一个位置，三角尺紧靠直尺的一边和直线 a 所成的角在移动前的位置与移动后的位置构成了一对同位角，其大小始终没变，因此，只要保持同位角相等，就可以保证画出的直线与已知直线的方向一致，即平行于已知直线.

于是，可以得到如下关于平行线的又一个基本事实：

两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行. 简单地说，就是：

同位角相等，两直线平行.

例如，如图 5.2.5，直线 a、b 被直线 l 所截，如果 $\angle 1 = \angle 2$，那么 $a \parallel b$.

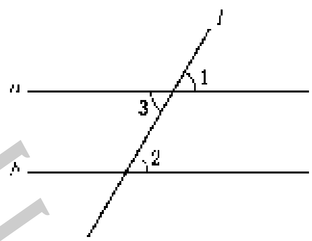


图 5.2.5

除了同位角，我们能否依据内错角或同旁内角判定两条直线平行呢？

在图 5.2.5 中，由于 $\angle 1 = \angle 3$，因此，若 $\angle 2 = \angle 3$，那么就有 $\angle 1 = \angle 2$，于是根据“同位角相等，两直线平行”，可得 $a \parallel b$. 这就是说：

两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行. 简单地说，就是：

内错角相等，两直线平行.

我们还可以得到：

同旁内角互补，两直线平行.

你能说明其中的理由吗？

概括

平行线的判定方法：

1. 同位角相等，两直线平行.
2. 内错角相等，两直线平行.
3. 同旁内角互补，两直线平行.

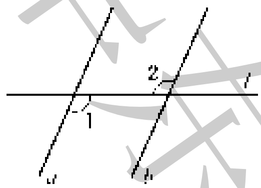


图 5.2.6

例 1 如图 5.2.6，直线 a、b 被直线 l 所截，已知 $\angle 1 = 115°$，$\angle 2 = 115°$，直线 a、b 平行吗？为什么？

分析 由已知条件可得 $\angle 1 = \angle 2$. 根据内错角相等，两直线平行，可知 $a \parallel b$.

括号内所写的，就是括号前这一结论成立的理由.

等量代换以及等式的性质是我们常用的推理依据.

我们用符号“$\because$”、“$\therefore$”分别表示“因为”、“所以”，于是分析中的推理过程就可以写成如下形式.

解 $\because$ $\angle 1 = 115°$，$\angle 2 = 115°$（已知），

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$（等量代换），

$\therefore$ $a \parallel b$（内错角相等，两直线平行）.

读一读

“推理”是数学的一种基本思想，包括归纳推理和演绎推理. 归纳推理是一种从特殊到一般的推理，我们经过一些探索、操作，得到某些猜想就是这样的过程，数与代数中由一些具体的结果，归纳得到一般的结论也是这样的推理. 演绎推理是一种从一般到特殊的推理，它借助于一些公认的基本事实及由此推导得到的结论，通过推断，说明最后结论的正确. 上面采用的就是一种演绎推理.

例2 如图 5.2.7, 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $\angle B=60^\circ$, $\angle C=120^\circ$, AB 与 CD 平行吗? AD 与 BC 平行吗?

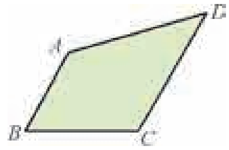


图 5.2.7

解 $\because$ $\angle B=60^\circ$, $\angle C=120^\circ$(已知),

$\therefore$ $\angle B+\angle C=180^\circ$(等式的性质),

$\therefore$ $AB \parallel CD$(同旁内角互补,两直线平行).

本题中,根据已知条件,无法判定 AD 与 BC 是否平行.

例3 如图 5.2.8,在同一平面内,直线 CD、EF 均与直线 AB 垂直, D、F 为垂足. 试判断 CD 与 EF 是否平行.

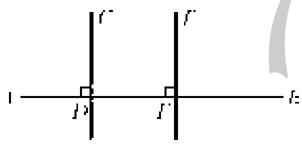


图 5.2.8

解 $\because$ $CD \perp AB$, $EF \perp AB$(已知),

$\therefore$ $\angle ADC=\angle AFE=90^\circ$,

$\therefore$ $CD \parallel EF$(同位角相等,两直线平行).

此例告诉我们:

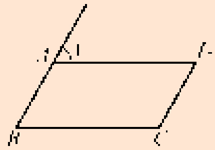
在同一平面内,垂直于同一条直线的两条直线平行.

试一试

尽可能多地举出我们周围所存在的平行线和垂线的例子.(也可以和你的同学一起轮流举出这些直线的例子)

练　习

1. 在下列解答中，填上适当的理由：



(第 1 题)

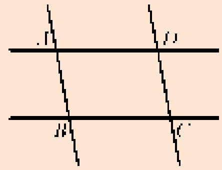
(1) $\because \angle B=\angle 1$(已知)，

$\therefore AD \parallel BC$(　　　　　　　　　　　　)；

(2) $\because \angle D=\angle 1$(已知)，

$\therefore AB \parallel CD$(　　　　　　　　　　　　).

2. 在下列解答中，填空：



(第 2 题)

(1) $\because \angle BAD+\angle ABC=180^\circ$(已知)，

$\therefore$ (　　) $\parallel$ (　　)(同旁内角互补，两直线平行)；

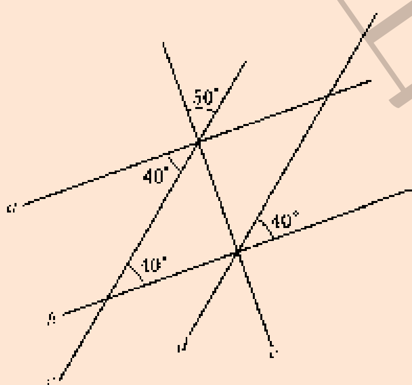
(2) $\because \angle BCD+\angle ABC=180^\circ$(已知)，

$\therefore$ (　　) $\parallel$ (　　)(同旁内角互补，两直线平行).

3. 使用直尺、量角器和三角尺，在下面的某学校平面图上找出互相平行的直线和互相垂直的直线.

(第 3 题)

4. 根据图中给出的条件，指出互相平行的直线和互相垂直的直线.



(第 4 题)

3. 平行线的性质

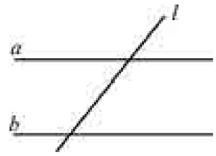


图 5.2.9

如图 5.2.9，我们已经学会，借助于第三条直线与两条已知直线构成的同位角、内错角或同旁内角判断这两条已知直线是否平行. 那么，如果已知直线 a 与直线 b 平行，即不相交，它们之间还具有什么性质呢？

为此，我们再次借助于第三条直线 l，用它去截平行直线 a 与 b，探索截得的同位角、内错角、同旁内角分别有什么关系.

试一试

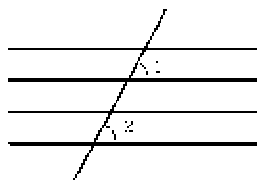


图 5.2.10

如图 5.2.10，翻开你的练习本，每一页上都有许多互相平行的横线条，随意画一条斜线与这些横线条相交，找出其中任意一对同位角. 观察或用量角器度量这两个同位角，你有什么发现？

你会发现它们相等.

那么，在一般情况下，如图 5.2.11，如果直线 a 与直线 b 平行，直线 l 与直线 a、b 分别交于点 O 与点 P，那么其中的同位角 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 必定相等吗？

如果不相等，会出现什么情况呢？

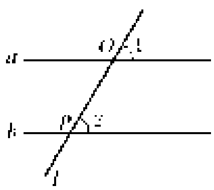


图 5.2.11

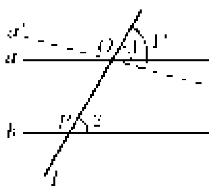


图 5.2.12

此时，如图 5.2.12，我们可以以点 O 为顶点，画另一个角 $\angle 1'$，使 $\angle 1' = \angle 2$，这样就画出了过点 O 的另一条直线 a'. 由于 $\angle 1' = \angle 2$，根据“同位角相等，两直线平行”的基本事实，可以得到 $a' \parallel b$.

现在你会发现经过点 O 竟有两条直线 a、a' 与 b 平行，这就与“经过已知直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行”矛盾了.

因此∠1 与∠2 一定相等. 这就是说:

两条平行线被第三条直线所截,同位角相等.

简单地说,就是:

两直线平行,同位角相等.

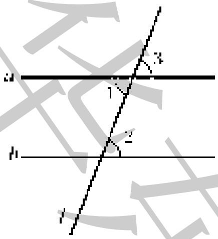


图 5. 2. 13

有了“两直线平行,同位角相等”,我们就能用推理的方法得出“两条平行线被第三条直线所截,内错角相等”.

如图 5. 2. 13, 我们将∠1 的对顶角记为∠3, 故∠1 = ∠3(对顶角相等).

∵ $a \parallel b$(已知),

∴ ∠3 = ∠2(两直线平行,同位角相等).

∴ ∠1 = ∠2(等量代换).

有了“两直线平行,同位角相等”,我们也可以用推理的方法得出“两条平行线被第三条直线所截,同旁内角互补”.

你能说明其中的理由吗?

简单地说,就是:

两直线平行,内错角相等.

两直线平行,同旁内角互补.

概括

平行线的性质:

1. 两直线平行,同位角相等.
2. 两直线平行,内错角相等.
3. 两直线平行,同旁内角互补.

例 4 如图 5. 2. 14, 已知直线 $a \parallel b$, ∠1 = 50°, 求∠2 的度数.

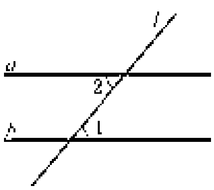


图 5. 2. 14

解 ∵ $a \parallel b$(已知),

∴ ∠2 = ∠1(两直线平行,内错角相等).

∵ ∠1 = 50°(已知),

∴ ∠2 = 50°(等量代换).

例 5 如图 5.2.15，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle B=60^\circ$，求 $\angle C$ 的度数. 能否求得 $\angle A$ 的度数？

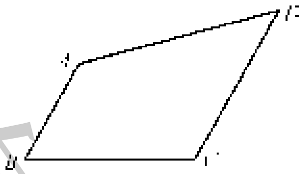


图 5.2.15

解 $\because$ $AB \parallel CD$（已知），

$\therefore$ $\angle B+\angle C=180^\circ$（两直线平行，同旁内角互补）.

$\because$ $\angle B=60^\circ$（已知），

$\therefore$ $\angle C=180^\circ-\angle B=120^\circ$（等式的性质）.

根据题目的已知条件，无法求出 $\angle A$ 的度数.

例 6 将如图 5.2.16 所示的方格纸中的图形向右平行移动 4 格，再向上平行移动 3 格，画出平行移动后的图形.

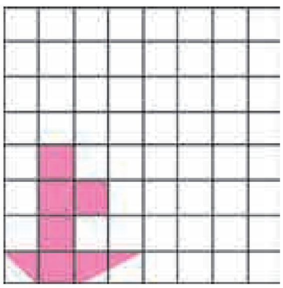


图 5.2.16

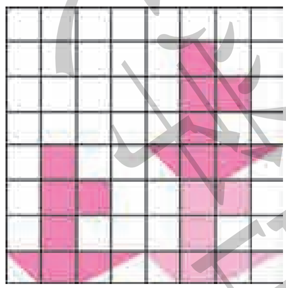


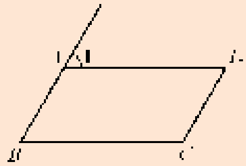
图 5.2.17

解 如图 5.2.17 所示的图形，即为原图形以及原图形向右平行移动 4 格，再向上平行移动 3 格后的图形.

从图中可以看出，原图中的每一个顶点以及每一条边都向右平行移动了 4 格，再向上平行移动了 3 格.

练　习

1. 在下列解答中，填上适当的理由：



（第 1 题）

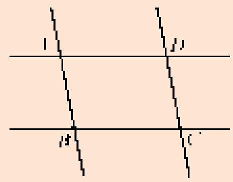
(1) ∵ $AD \parallel BC$（已知），

∴ $\angle 1 = \angle B$（　　　　　　　　　）；

(2) ∵ $AB \parallel CD$（已知），

∴ $\angle 1 = \angle D$（　　　　　　　　　）.

2. 在下列解答中，填空：



（第 2 题）

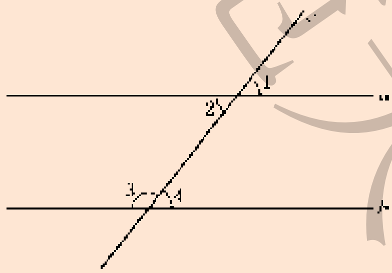
(1) ∵ $AD \parallel BC$（已知），

∴（　　）$+ \angle ABC = 180°$（两直线平行，同旁内角互补）；

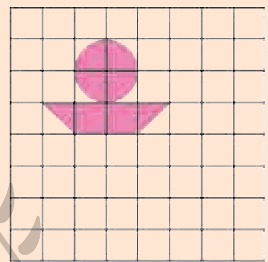
(2) ∵ $AB \parallel CD$（已知），

∴ $\angle ABC +$（　　）$= 180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

3. 如图，两条平行线 a、b 被第三条直线 c 所截. 若 $\angle 1 = 52°$，那么 $\angle 2 =$ ________，$\angle 3 =$ ________，$\angle 4 =$ ________.



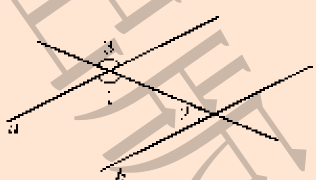
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，将方格纸中的图形向右平行移动 3 格，再向下平行移动 4 格，画出平行移动后的图形.

5. 如图，已知直线 $a \parallel b$，$\angle 3 = 131°$，求 $\angle 1$、$\angle 2$ 的度数.



（第 5 题）

抄写下面的解答过程，并填空（理由或数学式）.

解　∵ $\angle 3 = 131°$（　　），

又∵ $\angle 3 = \angle 1$（　　　　　　　），

∴ $\angle 1 =$（　　）（　　　　　　　）.

∵ $a \parallel b$（　　），

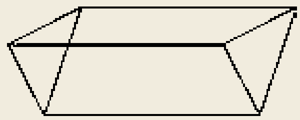
∴ $\angle 1 + \angle 2 = 180°$（　　　　　　　　　　　），

∴ $\angle 2 =$（　　）（等式的性质）.

习题 5.2

1. 在同一平面内，与已知直线 a 平行的直线有________条，而经过直线 a 外一点 P，与已知直线 a 平行的直线有且只有________条.

2. 用平移三角尺的方法可以检验出图中共有平行线________对.



（第 2 题）

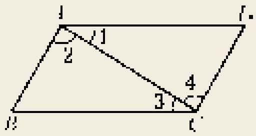
3. 如图，已知 $\angle 2 = \angle 4$，$\angle 1 = \angle 3$，在下列解答中，填空（理由或数学式）：

（1）$\because$ $\angle$（　　）$=\angle$（　　）（已知），

$\therefore$ $AB \parallel CD$（　　　　　　　　　　）；

（2）$\because$ $\angle$（　　）$=\angle$（　　）（已知），

$\therefore$ $AD \parallel BC$（　　　　　　　　　　）.

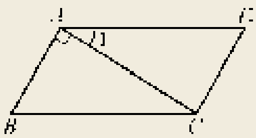


（第 3 题）

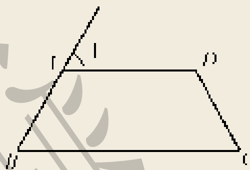
4. 如图，已知 $\angle 1 = 30°$，$\angle B = 60°$，$AB \perp AC$.

（1）$\angle DAB + \angle B =$________；

（2）AD 与 BC 平行吗？AB 与 CD 平行吗？若平行，请说明理由；若不一定，那么再加上什么条件就平行了呢？



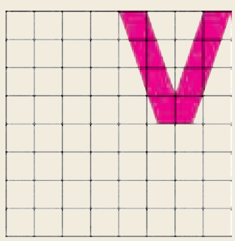
（第 4 题）



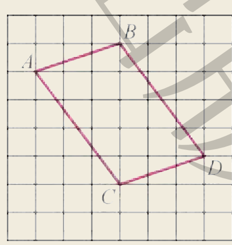
（第 5 题）

5. 如图，$AD \parallel BC$，$\angle B = 60°$，$\angle 1 = \angle C$. 那么 $\angle C =$________.

6. 如图，将方格纸中的图形向左平行移动 3 格，再向下平行移动 4 格，画出平行移动后的图形.



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，线段 CD 是线段 AB 经过向右平行移动________格，再向下平行移动________格后得到的线段. 线段 BD 向左平行移动________格，再向下平行移动________格后得到线段 AC.

阅读材料

九 树 成 行

你知道这样一道数学趣题吗？

有九棵树，要栽成九行，使得每行恰好有三棵树，应该如何栽树？

如图 1，可能有的同学马上想到画一个正方形，再画出两条对角线，分别连结两组对边的中点，数一数，有九个点了，图中每条线上有了三个点，但可惜的是只有八条线. 也就是九棵树，排成了八行，每行有三棵树，离我们的要求，还差了一条线.

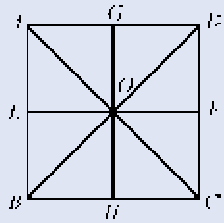


图 1

看来必须寻找新的办法.

我们可以先画两条直线，在每条直线上各任取三点，交叉相连，组成如图 2(1) 所示的图形.

图 2

如图 2(2)，交叉相连的线段在中间产生了三个交点 X、Y 与 Z，用你的直尺靠上去，你发现没有，真有那么巧，它们竟然恰好在一条直线上. 画出这条线，现在你数数看，刚好是九条线，且每条线上都有三个点. 将九棵树如图 2(2) 所示栽上，就解决了这道数学趣题了.

你看！九树成行这一数学趣题看起来比较复杂，竟然只用直尺就如此简单地解决了. 你若感兴趣，还可进一步探索九树十行的问题，充分感受数学的魅力与它的美. 这些问题蕴涵着的深刻的数学道理，竟有塞瓦(Giovanni Ceva，意大利)、梅涅劳斯(Menelaus，古希腊)、帕普斯(Pappus，古希腊)等伟大数学家的贡献呢.

小结

一、知识结构

- 相交线与平行线
  - 相交线
    - 对顶角相等
    - 过一点有且只有一条直线与已知直线垂直
  - 平行线
    - 过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行
    - 平行线的判定
      - 同位角相等，两直线平行
      - 内错角相等，两直线平行
      - 同旁内角互补，两直线平行
    - 平行线的性质
      - 两直线平行，同位角相等
      - 两直线平行，内错角相等
      - 两直线平行，同旁内角互补

二、要点

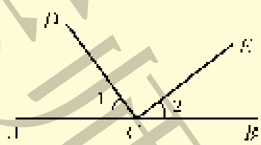
1. 小学里我们已经学过相交线与平行线. 当时我们只是通过观察，体会到相交线与平行线的一些基本属性. 本章在小学学习的基础上，深入学习相交线与平行线，并通过数学说理的方法从我们所公认的一些基本事实出发推导出平行线的判定方法、平行线的性质以及其他一些有用的结论. 这些判定方法及性质等都是今后进一步学习几何推理的依据.

2. “推理”是数学的一种基本思想，通过推理，我们可以深入理解所研究的对象之间的逻辑关系，而且可以用符号和术语清晰地表达这种关系. 本章的推理是一种演绎推理，通过这样的推理，我们可以完全确信最后结论的正确，体现了数学的严谨性.

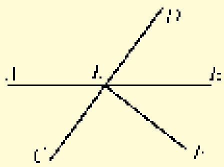
复习题

A组

1. 如图，点 A、B、C 在一直线上，已知 $\angle 1=53^\circ$，$\angle 2=37^\circ$，则 CD 与 CE 垂直吗？



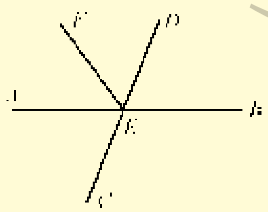
（第 1 题）



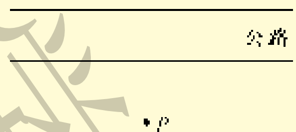
（第 2 题）

2. 如图，直线 AB、CD 相交于点 E，$\angle BEF=40^\circ$，$\angle CEF=85^\circ$，则 $\angle AED=$ ________ °.

3. 如图，直线 AB、CD 相交于点 E，EF 平分 $\angle AED$，$\angle DEF=55^\circ$，则 $\angle BEC=$ ________ °.



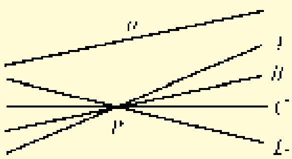
（第 3 题）



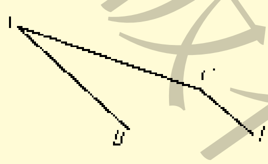
（第 4 题）

4. 如图，要从村庄 P 修一条小路，使人们自村庄 P 出发到公路的距离最短，试画出该小路，并说明理由.

5. 如图，经过直线 a 外一点 P 的 4 条直线中，与直线 a 平行的直线是________，共有________条.



（第 5 题）

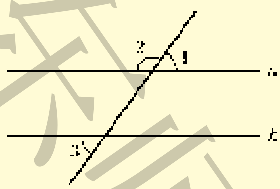


（第 6 题）

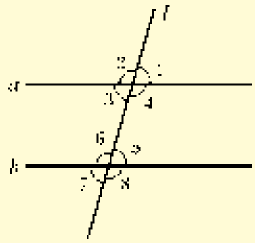
6. 如图，如果 $AB \parallel CD$，那么 $\angle A$ 与 $\angle C$ ____________.

B组

7. 如图,如果$\angle 1=\angle 3$,那么直线 a 与 b 平行吗?当$\angle 2$ 与$\angle 3$ 满足什么关系时,直线 a 与 b 平行?



(第 7 题)



(第 8 题)

8. 如图,已知平行直线 a、b 被直线 l 所截. 如果$\angle 1=75°$,那么$\angle 2=$________°,$\angle 3=$________°,$\angle 4=$________°,$\angle 5=$________°,$\angle 6=$________°,$\angle 7=$________°,$\angle 8=$________°.

9. 如图,直线 $a\parallel b$,$\angle 3=85°$,求$\angle 1$、$\angle 2$ 的度数.

抄写下面的解答过程,并填空(理由或数学式).

解 $\because$ $a\parallel b$ (   ),

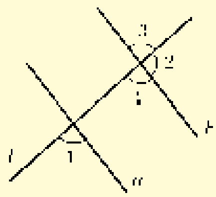
$\therefore$ $\angle 1=\angle 4$ (   ).

$\because$ $\angle 4=\angle 3$(   ),$\angle 3=85°$ (   ),

$\therefore$ $\angle 1=$(   )(等量代换).

又$\because$ $\angle 2+\angle 3=180°$,

$\therefore$ $\angle 2=$(   )(等式的性质).



(第 9 题)

10. 如图,已知 $AC\perp AE$,$BD\perp BF$,$\angle 1=35°$,$\angle 2=35°$,则 AC 与 BD 平行吗? AE 与 BF 平行吗?

抄写下面的解答过程,并填空(理由或数学式).

解 $\because$ $\angle 1=35°$,$\angle 2=35°$ (   ),

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$ (   ),

$\therefore$ (   )$\parallel$(   )(   ).

又$\because$ $AC\perp AE$ (   ),

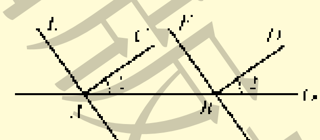
$\therefore$ $\angle EAC=90°$,

$\therefore$ $\angle EAB=\angle EAC+\angle 1=$(   )(等式的性质).

同理可得$\angle FBG=\angle FBD+\angle 2=$(   ).

$\therefore$ $\angle EAB=$(   )(等量代换),

$\therefore$ (   )$\parallel$(   )(   ).



(第 10 题)

11. 如图,如果 $AB \parallel CD$, $\angle B = 37°$, $\angle D = 37°$,那么 BC 与 DE 平行吗?
抄写下面的解答过程,并填空(理由或数学式).

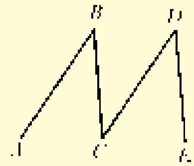
解 $\because AB \parallel CD$ (　　),

$\therefore \angle B =$ (　　)(　　　　　　　　　　).

$\because \angle B = \angle D = 37°$ (　　　　　),

$\therefore$ (　　) $= \angle D$(　　　　　),

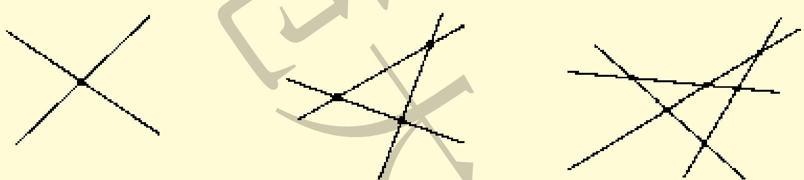
$\therefore BC \parallel DE$ (　　　　　　　　　).



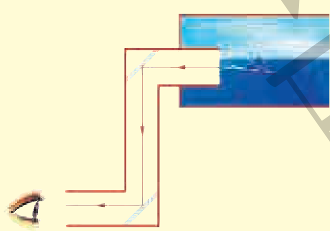
(第 11 题)

C组

12. 我们知道,2 条直线相交只有 1 个交点,3 条直线两两相交最多能有 3 个交点,4 条直线两两相交最多能有 6 个交点,5 条直线两两相交最多能有 10 个交点,6 条直线两两相交最多能有 15 个交点…… n 条直线两两相交呢?

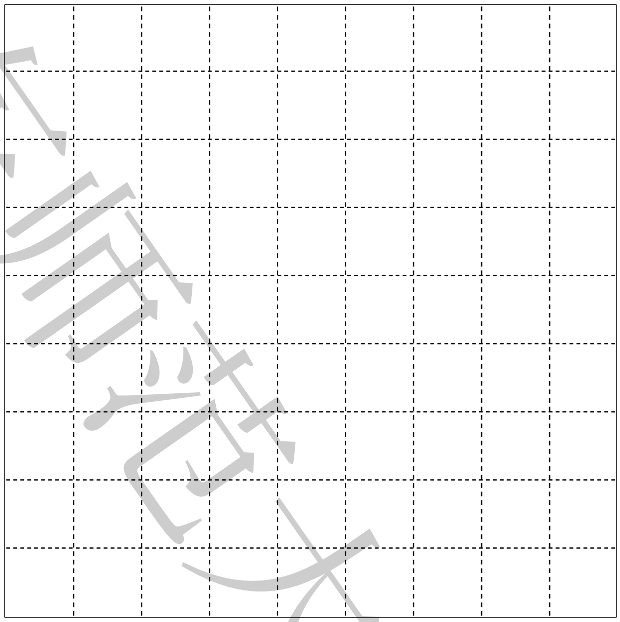

(第 12 题)

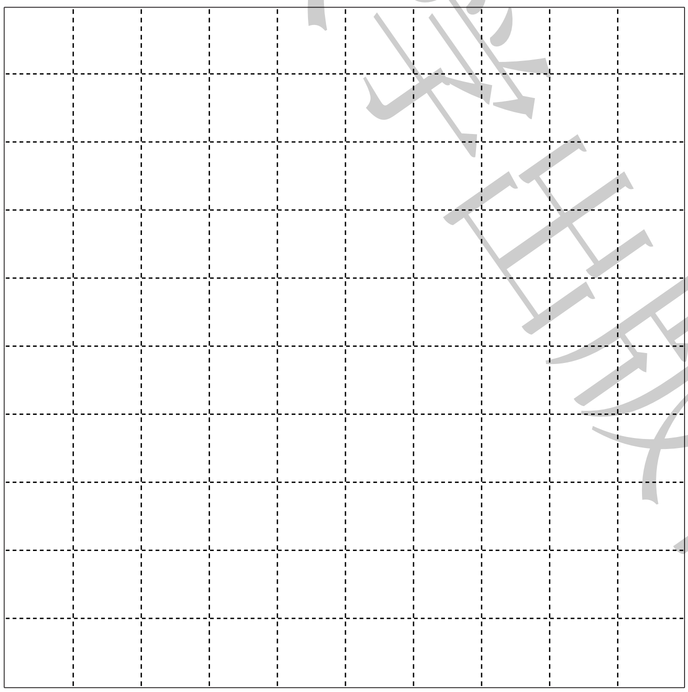
13. 潜望镜中,两面镜子互相平行放置. 你知道为什么进入潜望镜的光线和离开潜望镜的光线平行吗?


(第 13 题)

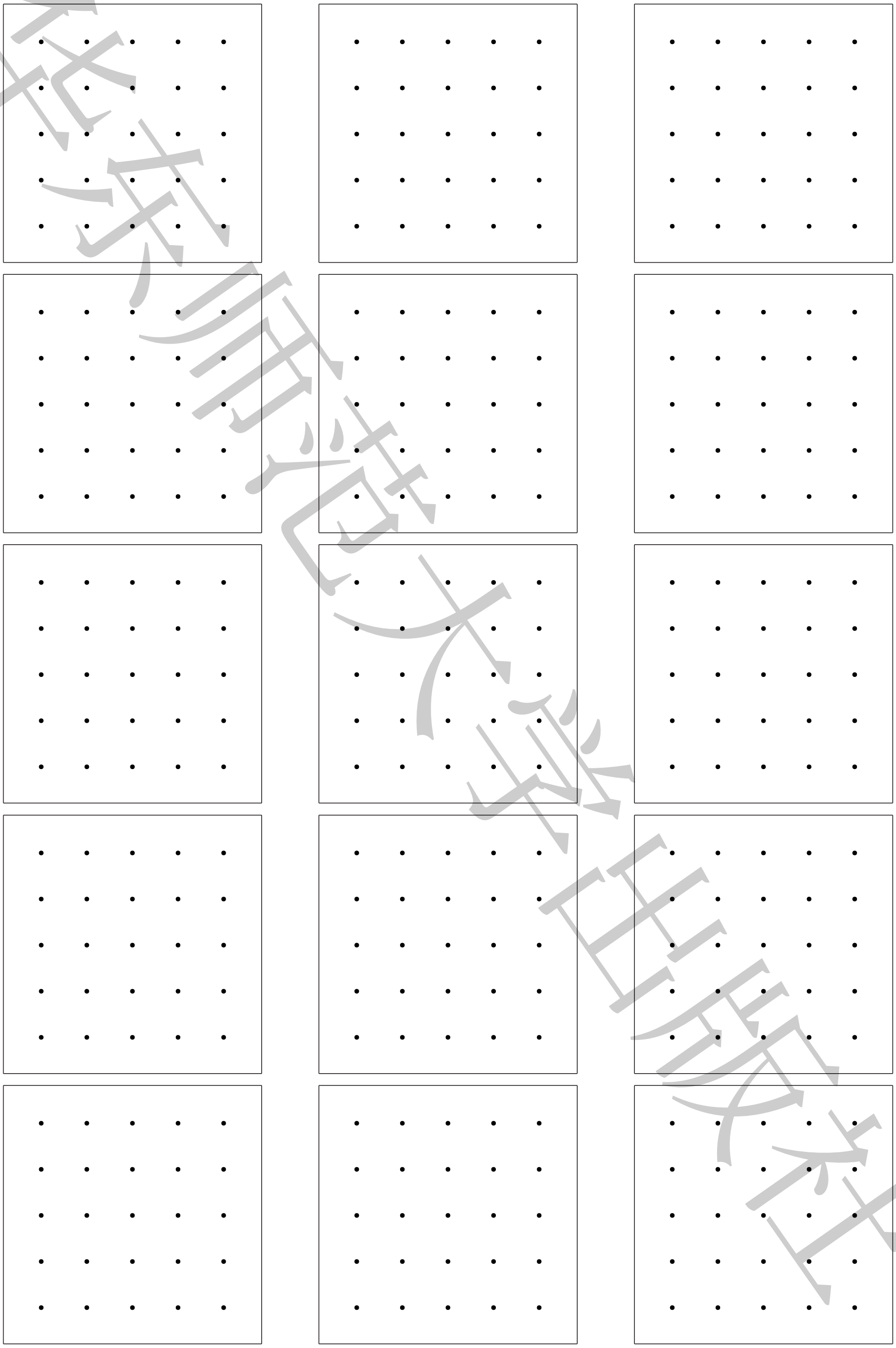
数学实验附图

方格图





格点图



后　　记

华东师大版初中数学教材是最早通过教育部审查的新课标初中数学教材之一. 自2001年秋季在7个国家级实验区投入实验以来,已有分布在26个省、市、自治区的地市选用过或正在选用本套教材. 10多年来,实验区的广大师生对本套教材寄予了厚爱,为它的不断完善提出了许多宝贵意见. 根据这些意见,在实验期间,我们对教材进行了多次修改. 在此,我们对多年来给予本套教材关心的各级领导、广大实验区师生和各位同仁表示衷心感谢.

根据教育部的统一部署,在2012年前要完成义务教育阶段所有新课标教材的修订工作. 为了确保本套教材修订工作的顺利进行,在2011年4月至7月间,我们就本套教材的修订广泛征求了第一线教师的意见. 2011年9月在南京召开了"华东师大版初中数学教材修订研讨会",来自实验区的120多名教研员和骨干教师以及全体编写人员参加了会议. 会议期间就本套教材修订的整体框架达成了广泛共识. 本套教材的修订稿完成后,我们又特邀有关专家和来自第一线的教师进行了审稿. 参与本册教材审稿的有冯国卫、郭奕津等专家和教师.

尽管我们对修订工作倾注了心血,但是现在呈现在广大师生面前的修订教材肯定还存在有待进一步完善的地方. 我们真诚希望广大师生继续关心我们的教材,对我们的教材不断提出新的宝贵意见.

本册教材修订的撰稿人如下(以姓氏笔画为序):

王继延、李文革、李宏、吴中才、忻重义、沈加、唐复苏.

编　者